
STEREO VISION PAR
PROJECTIONS PERSPECTIVES

STEREO VISION
USING PERSPECTIVE PROJECTIONS

Serge CASTAN et Jun SHEN

Laboratoire C.E.R.F.I.A. Université Paul Sabatier 118, route de Narbonne 31077 TOULOUSE Cédex, FRANCE

RESUME

La vision stéréoscopique est une approche permettant de déterminer l'information tridimensionnelle des objets. Les images stéréo étant des images d'une même scène prises sous différents angles, elles diffèrent l'une de l'autre par une distortion perspective. Il est donc nécessaire de corriger cette distortion en tenant compte de l'orientation de la surface de l'objet pour la mise en correspondance des images.

Dans cet article, basé sur le système d'équations de mise en correspondance stéréoscopique (SCES), nous montrons d'abord la signification géométrique des paramètres k_0 , k_1 et k_2 dans SCES et proposons en suite un algorithme de mise en correspondance des images stéréo qui tient compte de la distortion perspective. Par cet algorithme avec la correction additionnelle, on arrive à une précision de mise en correspondance meilleure qu'un pixel pour les images de niveaux de gris aléatoires. Les masques pour calculer les dérivées sont données dans l'appendice.

Mots-clés : Stéréo vision, Mise en correspondance, Distortion perspective.

SUMMARY

Stereo vision is an approach for determining the three-dimensional informations of objects. The stereopair images are different one from the other because they are taken from different angles, and have therefore different perspective distortions. In order to find a good matching between the images, it is necessary to correct this distortion according to the estimated surface orientation.

In the present paper, based on the stereo correspondence equation system (SCES), we point out what the parameters k_0 , k_1 and k_2 in SCES mean in geometry and propose an algorithm for stereopair image matching taking account of the perspective distortion. By use of this algorithm with an additional correction, we have a matching precision better than one pixel for the random grey value images. The masks for calculating the derivatives are given in the appendix.

Key words : Stereo vision, Matching, Perspective distortion



I. INTRODUCTION

Dans de nombreuses applications de la vision par ordinateur (robotique, télédétection), il est important de connaître l'information tridimensionnelle des objets. La vision stéréoscopique est une approche permettant de déterminer cette information [1,2,3]. Lorsque les objets ont des formes relativement simples, par exemple, polyédriques, on peut utiliser les relations géométriques et topologiques entre les frontières pour mettre en correspondance les frontières physiques des objets [1,4]. Mais pour les scènes générales (analyse de scène d'intérieur ou d'extérieur), il semble qu'il soit nécessaire de mettre en correspondance les deux images stéréo avec des informations locales pour obtenir la forme de l'objet avec plus de précision [5,6,7]. Les images stéréo étant des images d'une même scène prises sous différents angles, elles diffèrent l'une de l'autre par une distorsion perspective. Cela implique que les caractéristiques locales des pixels homologues (par exemple, les dérivées de niveaux de gris) peuvent changer d'une image à l'autre et il est donc nécessaire de tenir compte de l'orientation de la surface de l'objet et de corriger ainsi la distorsion perspective pour la mise en correspondance [8].

Dans un autre article [5], nous avons analysé la relation entre les caractéristiques locales (c'est-à-dire, les dérivées de niveaux de gris) des pixels homologues dans les deux images et proposé un système de huit équations, appelé SCES (Stereo Correspondence Equation System). Dans le présent article, après avoir rappelé brièvement le SCES et les premières conclusions qu'on a obtenues, nous montrons d'abord la signification géométrique des paramètres dans le SCES et présentons en suite l'implémentation de l'algorithme de mise en correspondance, basé sur le SCES, avec un processus de correction additionnel qui peut améliorer la précision de l'algorithme. Cet algorithme a été essayé sur des images de niveaux de gris aléatoires, et le résultat est satisfaisant. Nous donnons à l'appendice la détermination des masques qu'on utilise pour calculer les dérivées.

II. LE SYSTEME D'EQUATIONS DE MISE EN CORRESPONDANCE STEREOSCOPIQUE (SCES)

Nous nous rappelons ici brièvement le système d'équations de correspondance en vision stéréoscopique (SCES) [5].

II.1. SCES

Lemme de Profondeur d'un Plan

Si l'équation d'une surface de l'objet $Z = S(X,Y)$ est linéaire, alors $Z = Z(u,v)$ est un hyperboloïde et $\frac{1}{Z}$ est une fonction linéaire de (u,v) , où (u,v) est l'image du point (X,Y,Z) .

SCES

Soient (u,v) et (u',v') des points homologues dans les images stéréo gauche et droite, et $G(u,v)$ et $G'(u',v')$, étant les fonctions images associées, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'_{uu} \cdot k_1^2 - 2G'_{uv} \cdot k_1 - \Delta G_{uu} = 0 \quad (1) \\ G'_{uu} \cdot k_2^2 - 2G'_{uv} \cdot k_2 - \Delta G_{vv} = 0 \quad (2) \\ G'_{uu} \cdot (1-k_1) \cdot k_2 + G'_{uv} \cdot k_1 + \Delta G_{uv} = 0 \quad (3) \\ G'_u \cdot k_1 + \Delta G_u = 0 \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G'_u \cdot k_2 + \Delta G_v = 0 \quad (5) \\ \Delta G_o = 0 \quad (6) \\ v = v' \quad (7) \\ k_o = u - u' \quad (8) \end{array} \right.$$

où :

$$\Delta G_o = G(u,v) - G'(u',v') \quad (9)$$

$$\Delta G_u = G_u - G'_u \quad (10)$$

$$\Delta G_v = G_v - G'_v \quad (11)$$

$$\Delta G_{uu} = G_{uu} - G'_{uu} \quad (12)$$

$$\Delta G_{uv} = G_{uv} - G'_{uv} \quad (13)$$

$$\Delta G_{vv} = G_{vv} - G'_{vv} \quad (14)$$

avec :

$$G_u = \frac{\partial G(u,v)}{\partial u}$$

$$G_v = \frac{\partial G(u,v)}{\partial v}$$

$$G_{uu} = \frac{\partial^2 G(u,v)}{\partial u^2}$$

⋮

$$G'_u = \frac{\partial G'(u',v')}{\partial u'}$$

etc.

Les systèmes de coordonnées sont dans la figure 1.

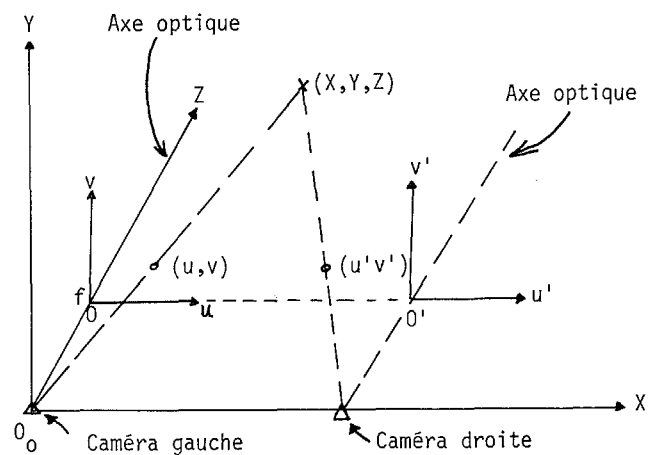


Fig. 1. Les systèmes de coordonnées

k_o, k_1 et k_2 sont des paramètres concernant la profondeur et l'orientation de la surface (voir III).

II.2. Des conclusions du SCES

A partir du SCES, nous pouvons déduire les conclusions suivantes :

(1) Propriétés de passages par zéro.

Les passages par zéro suivants sont invariants dans les deux projections perspectives (c'est-à-dire, les deux images) :

STEREO VISION USING PERSPECTIVE PROJECTIONS
STEREO VISION PAR PROJECTIONS PERSPECTIVES

Serge CASTAN et Jun SHEN

- passages par zéro de G_u , C.A.D., $G_u = 0$
- passages par zéro de G_u et G_v , C.A.D., $\begin{cases} G_u = 0 \\ G_v = 0 \end{cases}$
- passages par zéro de G_{uu} , C.A.D., $G_{uu} = 0$
- passages par zéro de G_{uu} et G_{uv} , C.A.D., $\begin{cases} G_{uu} = 0 \\ G_{uv} = 0 \end{cases}$

Nous remarquons que le passage par zéro du Laplacien n'est pas toujours une caractéristique invariante dans les deux images stéréo.

(2) Corrélation Entre les Images Stéréo

La corrélation entre les deux images stéréo ne représente vraiment la correspondance entre elles que lorsque $k_1 = k_2 = 0$, c'est-à-dire, quand la surface est perpendiculaire aux axes optiques des caméras. Dans les autres cas, on devra considérer la distorsion perspective.

III. SIGNIFICATION GEOMETRIQUE DE k_0 , k_1 et k_2

Dans ce paragraphe, nous allons montrer la relation entre $k_i (i=0,1,2)$ et l'orientation locale de la surface.

Considérons un voisinage S autour de (u_0, v_0) dans l'image gauche, les paramètres $k_i (i=0,1,2)$ sont définis par [5] :

$$\begin{cases} k = \frac{bf}{Z} & (15) \\ k = k_0 + k_1(u-u_0) + k_2(v-v_0) & (16) \end{cases}$$

où :

- b est la distance entre les deux caméras
- f est la distance focale des caméras
- (u, v) est l'image du point (X, Y, Z) dans la surface.

On a la relation géométrique suivante :

$$\frac{bf}{Z} = \frac{bu}{X} = \frac{bv}{Y} \quad (17)$$

Différentiant (17) par rapport à Y , nous avons :

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = f \left[\frac{1}{v} - \frac{Y}{v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial Y} \right] \quad (18)$$

De (15), (16) et (17), nous avons :

$$X = \frac{bu}{k_0 + k_1(u-u_0) + k_2(v-v_0)} \quad (19)$$

$$Y = \frac{bv}{k_0 + k_1(u-u_0) + k_2(v-v_0)}$$

Différentiant (19) par rapport à Y , nous avons :

$$\begin{bmatrix} k_1 - \frac{b}{X} & k_2 \\ k_1 & k_2 - \frac{b}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{bv}{Y^2} \end{bmatrix}$$

Cela donne :

$$\frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{-v(k_1 - b/X)}{Y^2(-k_2/X - k_1/Y + b/(XY))}$$

Considérant (15) et (16), nous avons :

$$\frac{\partial v}{\partial Y}(u_0, v_0) = \frac{k_0(k_1 u_0 - k_0)}{b(k_1 u_0 + k_2 v_0 - k_0)} \quad (20)$$

Appliquant (20) dans (18), nous avons :

$$\frac{\partial Z}{\partial Y}(u_0, v_0) = \frac{f k_2}{k_1 u_0 + k_2 v_0 - k_0} \quad (21)$$

De même, nous avons :

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{f k_1}{k_1 u_0 + k_2 v_0 - k_0} \quad (22)$$

Les équations (21) et (22) expriment la relation entre $k_i (i=0,1,2)$ et l'orientation locale de la surface. De (15) et (16), nous voyons que k_0 est la disparité du pixel (u_0, v_0) . De (21) et (22), nous voyons que k_1 et k_2 ne sont égaux à zéro que lorsque la surface locale est perpendiculaire aux axes optiques des caméras.

IV. CORRECTION ADDITIONNELLE

Généralement, la disparité est mesurée par un nombre entier de pixels, or en réalité, à un pixel de l'image gauche correspond un point de l'image droite situé entre deux pixels. On est donc amené à effectuer le calcul de la disparité en nombre réel plutôt qu'en nombre entier.

Supposons qu'au pixel (u_0, v_0) de l'image gauche corresponde approximativement le pixel (u'_0, v'_0) dans l'image droite et précisément le point $(u'_0 + \delta, v'_0)$ dans l'image droite ($v_0 = v'_0$), où u_0, u'_0 sont des nombres entiers et δ réel, avec $|\delta| < 1$. A partir des séries de deuxième ordre de Taylor de niveaux de gris de $G'(u', v')$ dans un voisinage de (u'_0, v'_0) , nous avons :

$$G'_{uu}(u'_0 + \delta, v'_0) = G'_{uu}(u'_0, v'_0) \quad (23)$$

$$G'_{uv}(u'_0 + \delta, v'_0) = G'_{uv}(u'_0, v'_0) \quad (24)$$

$$G'_{vv}(u'_0 + \delta, v'_0) = G'_{vv}(u'_0, v'_0) \quad (25)$$

$$G'_u(u'_0 + \delta, v'_0) = G'_u(u'_0, v'_0) + G'_{uu}(u'_0, v'_0) \cdot \delta \quad (26)$$

$$G'_v(u'_0 + \delta, v'_0) = G'_v(u'_0, v'_0) + G'_{uv}(u'_0, v'_0) \cdot \delta \quad (27)$$

$$G'_0(u'_0 + \delta, v'_0) = G'_0(u'_0, v'_0) + G'_u(u'_0, v'_0) \delta + \frac{1}{2} G'_{uu}(u'_0, v'_0) \delta^2 \quad (28)$$

Considérant que $(u'_0 + \delta, v'_0)$ correspond précisément à (u_0, v_0) dans l'image à gauche, nous avons :

$$G'_0(u'_0 + \delta, v'_0) = G_0(u_0, v_0)$$

(28) devient :

$$\frac{1}{2} G'_{uu}(u'_0, v'_0) \delta^2 + G'_u(u'_0, v'_0) \delta - \Delta G_0 = 0 \quad (29)$$

Appelons δ la correction additionnelle et l'algorithme de mise en correspondance est alors :

Soit P l'ensemble des pixels dans l'image droite candidats des pixels correspondant à (u_0, v_0) de l'image gauche, $P = \{(u_k, v'_0) / k = 1, \dots, n\}$



```

DEBUT
  POUR k=1,n
    Calculer  $\delta_1$  et  $\delta_2$  pour  $(u_k, v'_0)$  à partir de (29)
    L'ensemble  $S = \emptyset$ 
    POUR i=1,2
      SI  $|\delta_i| < 1$  Alors  $S = S \cup \{\delta_i\}$ 
      FINSI
    FINPOUR
    SI  $S = \emptyset$ 
      Alors  $R(u_0, u'_0) = \infty$ 
      Sinon
        POUR chaque élément  $\delta_i \in S$ 
          Calculer les dérivées dans  $(u'_k + \delta_i, v'_0)$ 
          à partir de (23) ~ (27)
          Calculer  $R(u_0, u_k + \delta_i)$  à partir de (1) ~ (5),
           $R(u_0, u_k + \delta_i) = \sum_{j=1}^5 p_j F_j^2$  où  $p_j$  est le poids
          et  $F_j$  est la gauche de la formule (j)
        FINPOUR
        Soit  $R(u_0, u_k + \delta_\ell) = \min_{\forall i} \{R(u_0, u_k + \delta_i)\}$ 
         $R(u_0, u_k) = R(u_0, u_k + \delta_\ell)$ 
         $D(u_0, u_k) = u_k + \delta_\ell - u_0$ 
      FINSI
    FINPOUR
    Prendre  $(u_c, v'_0) \in P$  tel que  $\forall (u_k, v'_0) \in P, u_k \neq u_c$ 
     $R(u_0, u_c) < R(u_0, u_k)$ 
    SI  $R(u_0, u_c) \leq T$  (T est un seuil)
      Alors  $Du_0 = D(u_0, u_c)$ 
      Sinon  $(u_0, v_0)$  n'a pas de pixels correspondants
    FINSI
  FIN
   $Du_0$  est la disparité associée à  $(u_0, v_0)$ .
  
```

Avec la correction additionnelle, on obtient la disparité par un nombre réel améliorant ainsi la précision. Cette augmentation de précision engendre une diminution de la fonction d'erreur correspondant à cette position, facilitant ainsi le processus de décision.

V. VERIFICATION EXPERIMENTALE

Cet algorithme a été essayé par des images de niveaux de gris aléatoires.

On crée d'abord une image gauche aléatoire, c'est-à-dire, pour chaque pixel de l'image, on donne une valeur entière de 0 à 255 comme niveau de gris. Ensuite, d'après la forme et la profondeur de la surface, on calcule la position correspondante (u, v) dans l'image gauche à chaque pixel (u', v') de l'image droite. Si (u, v) correspond à un pixel, on donne le niveau de gris de (u, v) au pixel (u', v') , sinon on utilise l'interpolation (arrondie à un nombre entier de 0 à 255) pour obtenir le niveau de gris de (u', v') . Pour l'image droite qu'on ne "voit" pas dans l'image gauche, on donne un niveau de gris aléatoire.

Nous avons essayé cet algorithme pour des surfaces de différentes formes et profondeurs. Dans tous les cas, on trouve une bonne mise en correspondance entre les deux images. On arrive à une précision meilleure qu'un pixel. Des résultats sont donnés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Des résultats de l'algorithme

Disparité supposée	Disparité trouvée
13.25	13.269
13.125	13.065
13	13.169
12.875	12.980
12.75	12.80
12.625	12.73
12.5	12.601
12.375	12.490
12.25	12.283
12.125	12.128
12	11.97
11.875	11.824
11.75	11.73
11.625	11.61
11.5	11.503

VI. CONCLUSION

A partir du système d'équations de correspondance en stéréovision (SCES) que nous avons proposé, nous analysons, dans cet article, la signification géométrique des paramètres k_0 , k_1 et k_2 . Un algorithme de mise en correspondance des images stéréovision est proposé qui tient compte de l'orientation de la surface. Par cet algorithme avec la correction additionnelle, on arrive à une précision de mise en correspondance meilleure qu'un pixel pour les images de niveaux de gris aléatoires. Les marques pour calculer les dérivées sont données dans l'appendice.

BIBLIOGRAPHIES

1. R. Bajesý
Three-Dimensional Scene Analysis. Proc. of the 5th ICPR, Miami, 1980
2. Y. Shirai
Three-Dimensional Computer Vision, pp. 187-206, Computer Vision and Sensor-Based Robots, Ed. G.G. Dodd and L. Rossol, NY, 1979
3. F.R. Norvelle
Interactive Digital Correlation Techniques for Automatic Compilation of Elevation Data, the 47th Annual Meeting ASP, Washington, 1981

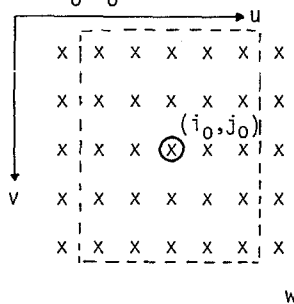
STEREO VISION PAR PROJECTIONS PERSPECTIVES
 STEREO VISION USING PERSPECTIVE PROJECTIONS
 Serge CASTAN et Jun SHEN

4. S. Castan and J. Shen
 A Method for Finding Straight Line and Plane Correspondences in Stereopair Images, ICASSP 84, San Diego, 1984
5. S. Castan and J. Shen
 A Stereo Vision Algorithm Taking into Account The Perspective Distortions, (to appear), 7ICPR, Montreal, 1984
6. W.E.L. Grimson
 From images to surfaces, MIT Press, 1981
7. D. Marr
 Vision, Freeman, San Francisco, CA, 1982
8. A. Rosenfeld
 Image analysis : Progress, Problems and Prospects, 6ICPR, Munich, 1982

$$\left\{ \begin{aligned} & \hat{G}_0 \cdot a_{20} + \hat{G}_u \cdot a_{30} + \hat{G}_v \cdot a_{21} + \hat{G}_{uv} \cdot a_{31} + \frac{1}{2} \hat{G}_{uu} \cdot a_{40} + \frac{1}{2} \hat{G}_{vv} \cdot a_{22} \\ & = \sum_{(i,j) \in w} G(i,j) \cdot (i-i_0)^2 \\ & \hat{G}_0 \cdot a_{11} + \hat{G}_u \cdot a_{21} + \hat{G}_v \cdot a_{12} + \hat{G}_{uv} \cdot a_{22} + \frac{1}{2} \hat{G}_{uu} \cdot a_{31} + \frac{1}{2} \hat{G}_{vv} \cdot a_{13} \\ & = \sum_{(i,j) \in w} G(i,j) \cdot (i-i_0) \cdot (j-j_0) \\ & \hat{G}_0 \cdot a_{01} + \hat{G}_u \cdot a_{11} + \hat{G}_v \cdot a_{02} + \hat{G}_{uv} \cdot a_{12} + \frac{1}{2} \hat{G}_{uu} \cdot a_{21} + \frac{1}{2} \hat{G}_{vv} \cdot a_{03} \\ & = \sum_{(i,j) \in w} G(i,j) \cdot (j-j_0) \\ & \hat{G}_0 \cdot a_{10} + \hat{G}_u \cdot a_{20} + \hat{G}_v \cdot a_{11} + \hat{G}_{uv} \cdot a_{21} + \frac{1}{2} \hat{G}_{uu} \cdot a_{30} + \frac{1}{2} \hat{G}_{vv} \cdot a_{12} \\ & = \sum_{(i,j) \in w} G(i,j) \cdot (i-i_0) \\ & \hat{G}_0 \cdot a_{00} + \hat{G}_u \cdot a_{10} + \hat{G}_v \cdot a_{01} + \hat{G}_{uv} \cdot a_{11} + \frac{1}{2} \hat{G}_{uu} \cdot a_{20} + \frac{1}{2} \hat{G}_{vv} \cdot a_{02} \\ & = \sum_{(i,j) \in w} G(i,j) \end{aligned} \right.$$

APPENDICE

Masques pour calculer les dérivées. Prenons une fenêtre $w_{(2m+1) \times (2n+1)}$ centrée au pixel intéressé (i_0, j_0)



Soit :

$$\hat{G}(i,j) = \hat{G}_0 + \hat{G}_u \cdot (j-j_0) + \hat{G}_v \cdot (i-i_0) + \frac{1}{2} \hat{G}_{uu} (j-j_0)^2 + \frac{1}{2} \hat{G}_{vv} (i-i_0)^2 + \hat{G}_{uv} (i-i_0)(j-j_0)$$

où :

$$a_{kl} = \sum_{(i,j) \in w} (i-i_0)^k \cdot (j-j_0)^l$$

Les masques pour calculer les dérivées peuvent ainsi être déterminées. Nous donnons ici les masques pour les fenêtres 3x3 et 5x5.

Masques pour calculer les dérivées

\hat{G} est la fonction d'image approximée
 $\hat{G}_0 = \hat{G}(i_0, j_0)$

Soit $G(i,j)$ la fonction d'image, nous définissons la fonction d'erreur S :

$$S = \sum_{i=i_0-n}^{i_0+n} \sum_{j=j_0-m}^{j_0+m} [\hat{G}(i,j) - G(i,j)]^2$$

En minimisant S , nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial S / \partial \hat{G}_0 &= 0 \\ \partial S / \partial \hat{G}_u &= 0 \\ \partial S / \partial \hat{G}_v &= 0 \\ \partial S / \partial \hat{G}_{uu} &= 0 \\ \partial S / \partial \hat{G}_{vv} &= 0 \\ \partial S / \partial \hat{G}_{uv} &= 0 \end{aligned} \right.$$

C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{G}_0 \cdot a_{02} + \hat{G}_u \cdot a_{12} + \hat{G}_v \cdot a_{03} + \hat{G}_{uv} \cdot a_{13} + \frac{1}{2} \hat{G}_{uu} \cdot a_{22} \\ + \frac{1}{2} \hat{G}_{vv} \cdot a_{04} = \sum_{(i,j) \in w} G(i,j) \cdot (j-j_0)^2 \end{aligned} \right.$$

Fenêtre 3x3

$$\hat{G}_0 : \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Fenêtre 5x5

$$\frac{1}{175} \begin{bmatrix} -13 & 2 & 7 & 2 & -13 \\ 2 & 17 & 22 & 17 & 2 \\ 7 & 22 & 27 & 22 & 7 \\ 2 & 17 & 22 & 17 & 2 \\ -13 & 2 & 7 & 2 & -13 \end{bmatrix}$$

$\hat{G}_u : \frac{1}{6}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{50}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\hat{G}_v : \frac{1}{6}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{50}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



STEREO VISION USING PERSPECTIVE PROJECTIONS
 STEREO VISION PAR PROJECTIONS PERSPECTIVES

Serge CASTAN et Jun SHEN

$$\hat{G}_{uu} : \frac{1}{3}$$

1	-2	1
1	-2	1
1	-2	1

$$\frac{1}{35}$$

2	-1	-2	-1	2
2	-1	-2	-1	2
2	-1	-2	-1	2
2	-1	-2	-1	2
2	-1	-2	-1	2

$$\hat{G}_{uv} : \frac{1}{4}$$

1	0	-1
0	0	0
-1	0	1

$$\frac{1}{100}$$

4	2	0	-2	-4
2	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0
-2	-1	0	1	2
-4	-2	0	2	4

$$\hat{G}_{vv} : \frac{1}{3}$$

1	1	1
-2	-2	-2
1	1	1

$$\frac{1}{35}$$

2	2	2	2	2
-1	-1	-1	-1	-1
-2	-2	-2	-2	-2
-1	-1	-1	-1	-1
2	2	2	2	2