



ONDELETTES, SPECTROGRAMMES ET LISSAGES DE LA DISTRIBUTION DE WIGNER-VILLE (*)

P. Flandrin (1), J. Sageloli (2), J.P. Sessarego (2), B. Vidalie (1) et M. Zakharia (1)

(1) LTS-ICPI (URA 346 CNRS), 25 rue du Plat 69288 Lyon Cedex 02
(2) LMA-CNRS, 31 chemin J. Aiguier, BP 71, 13402 Marseille Cedex 9

RESUME

Resituant l'analyse (énergétique) en ondelettes dans le cadre général des représentations temps-fréquence, on peut montrer que, tout comme le spectrogramme, elle résulte d'un lissage conjoint de certaines représentations mieux localisées dans le plan temps-fréquence, et dont le prototype est la distribution de Wigner-Ville. A la différence du spectrogramme, le lissage associé aux ondelettes n'est pas homogène dans le plan : l'analyse est, en fréquence, du type banc de filtres à surtension constante. On précise les conditions assurant de telles relations de lissages et un comportement comparé des trois outils principaux (ondelettes, spectrogramme et Wigner-Ville) est illustré sur deux exemples typiques.

SUMMARY

Replacing the (energetic) wavelet transform in the general framework of time-frequency representations, it can be shown that, in similarity with the spectrogram, it results from a joint smoothing of some distributions which are better localized in the time-frequency plane, and whose prototype is the Wigner-Ville distribution. In contrast with the spectrogram, the smoothing associated to wavelets is not homogeneous over the plane : the transform is, in the frequency domain, of the form of a bank of constant-Q filters. Conditions for the smoothing relationships to hold are provided and the compared behavior of the three main tools (wavelets, spectrogram and Wigner-Ville) is illustrated by means of two typical examples.

1. Introduction

L'analyse spectrale non-paramétrique des signaux non-stationnaires reposait jusqu'à récemment sur deux classes principales d'approches. L'une, linéaire, s'articulait autour de la transformation de Fourier à court-terme tandis que l'autre, bilinéaire, reposait de manière centrale sur la transformation de Wigner-Ville.

Depuis quelques années est apparu un troisième outil, appelé transformation en ondelettes, dont un des objectifs est, tout en restant linéaire, de dépasser certaines limitations des analyses de type Fourier à court-terme. Les liens entre ces dernières méthodes et les représentations temps-fréquence de type Wigner-Ville étant maintenant bien connus, il apparaît nécessaire de situer par rapport à elles les analyses en ondelettes afin de préciser les domaines d'application privilégiés de chacune des méthodes.

Nous proposons ici les premiers éléments d'une telle comparaison en partant de liens théoriques et en les illustrant sur des exemples typiques.

2. Transformations linéaires

L'idée d'utiliser des transformations linéaires pour décrire et analyser des signaux non-stationnaires est avant tout une idée de décomposition [1-2]. Il s'agit de représenter un signal de structure complexe (dans son évolution temporelle) comme la superposition d'un certain nombre de signaux élémentaires ou "briques de base", le poids associé à chacun de ces signaux élémentaires étant obtenu par une transformation linéaire : la *projection* du signal sur la brique correspondante.

D'une manière plus précise, on cherche dans une telle approche à représenter un signal $x(t)$ comme :

$$(1-a) \quad x(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} R(u, \theta) L(t; u, \theta) d\mu(u, \theta)$$

avec

$$(1-b) \quad R(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) L^*(u; t, \theta) du$$

La quantité $R(t, \theta)$ est alors la représentation de $x(t)$ sur les variables t et θ ; c'est aussi le poids de la brique de base $L(u; t, \theta)$ au point d'évaluation (t, θ) considéré, μ étant une mesure caractérisant la transformation.

De façon à simplifier l'analyse, on suppose généralement que chacun des signaux analysés $L(u; t, \theta)$ peut en fait se déduire d'un signal élémentaire h , unique et le plus "atomique" possible (i.e. le moins dispersé

possible dans le plan transformé (t, θ)), par un groupe de transformations L susceptibles de paver le plan transformé, ce que l'on écrira :

$$(2) \quad L(u; t, \theta) = [L(t, \theta)h](u)$$

L'arbitraire possible de telles décompositions repose donc sur le choix des variables de description, elles-même étroitement liées à la nature du groupe de transformations utilisées.

Si l'on souhaite, comme c'est naturel dans le cas des signaux non-stationnaires, privilégier l'aspect d'évolution temporelle, on choisit (comme on l'a fait implicitement ici) d'utiliser le *temps* comme première variable, la seconde pouvant prendre quant à elle un statut soit de *fréquence*, soit d'*échelle*, conduisant respectivement à la transformation de Fourier à court-terme et à la transformation en ondelettes, ainsi qu'on va le voir.

2.1. Transformation de Fourier à court-terme

Considérons dans un premier temps le groupe (dit de *Weyl-Heisenberg*) des translations en temps et en fréquence ($\theta = \nu$) :

$$(3) \quad [L_{WH}(t, \nu)h](u) = h(u - t) e^{i2\pi\nu u}$$

En portant (3) dans (1-b), on obtient la représentation correspondante

$$(4) \quad F_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h^*(u - t) e^{-i2\pi\nu u} du$$

qui n'est autre qu'une *transformation de Fourier à court-terme* [3] de fenêtre h , ou encore une décomposition de Gabor [4], telle qu'elle a été généralisée au cas continu par Helstrom [5] puis Montgomery et Reed [6].

Une telle transformation fournit une représentation admissible de carré intégrable de $x(t)$ puisque, pourvu que la fenêtre d'analyse à court-terme $h(t)$ soit d'énergie unité, on a :

$$(5) \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} |F_x(t, \nu)|^2 dt d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

De plus, la représentation (4) s'inverse suivant :

$$(6) \quad x(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_x(u, \nu) h(t - u) e^{i2\pi\nu u} du d\nu$$



ce qui fait clairement apparaître le rôle de F_x comme poids associé aux différentes translations en temps et en fréquence de la fenêtre de base h .

L'expression (4), basée sur la représentation temporelle $x(t)$, admet une formulation duale basée sur la représentation fréquentielle $X(v)$ du même signal :

$$(7) F_x(t, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [X(n) e^{i2\pi nt}] H^*(n - v) dn.$$

Ceci correspond au suivi temporel du signal en sortie d'un *banc de filtres uniforme*, chaque filtre du banc se déduisant d'un gabarit unique H par translation fréquentielle (ou *hétérodynage*).

2.2. Transformation en ondelettes

Abandonnant la notion explicite de fréquence liée au groupe de Weyl-Heisenberg, on peut envisager de la remplacer par une notion d'échelle (notée a) associée au groupe, dit *alline*, tel que :

$$(8) [L_A(t, a)h](u) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{u-t}{a}\right), \quad a > 0.$$

On obtient ainsi par (1-b) une nouvelle représentation :

$$(9) T_x(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h^*\left(\frac{u-t}{a}\right) du,$$

appelée *transformée en ondelettes* [7-9].

On peut justifier qu'une telle représentation est admissible si l'on a :

$$(10) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(v)|^2 \frac{dv}{|v|} = 1; \quad H(0) = 0.$$

ce qui permet d'écrire :

$$(11) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |T_x(t, a)|^2 \frac{da}{a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

et

$$(12) x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_x(t, a) \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-u}{a}\right) \frac{du da}{a^2}.$$

La condition d'admissibilité (10) revient à imposer au signal élémentaire h une structure de type réponse de filtre passe-bande, possédant donc au moins quelques oscillations, d'où le nom d'ondelette.

Il est à noter qu'une transformation en ondelettes n'est qu'implicitement une représentation temps-fréquence, la relation entre fréquence analysée et échelle pouvant s'écrire [10] :

$$(13) v = \frac{v_0}{a},$$

si v_0 est la fréquence centrale du filtre élémentaire.

Cette interprétation fréquentielle peut être précisée en réécrivant (9) sous sa forme duale :

$$(14) T_x(t, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} [X(n) e^{i2\pi nt}] \sqrt{a} H^*(an) dn$$

qui est à comparer à (7). On constate sur (14) qu'une transformation en ondelettes réalise maintenant un suivi temporel du signal en sortie d'un *banc de filtres non-uniforme*, chaque filtre du banc étant déduit du filtre de base H par dilatation ou compression : ceci n'est autre qu'une analyse à \mathcal{O} - (surtension) *constant(e)* [1-2, 20-21].

3. Transformations bilinéaires

Au lieu de chercher à décomposer le signal lui-même sur des signaux élémentaires, on peut se proposer de distribuer son *énergie* dans un plan transformé. Pour ce faire, il est convenable d'utiliser des transformations bilinéaires dont on spécifie le noyau par un ensemble de contraintes imposées *a priori* [11-13].

Se restreignant ici à des problèmes liés aux approches présentées précédemment, il est utile de rappeler, pour des représentations temps-fréquence bilinéaires, quelques résultats relatifs aux contraintes de translations, changements d'échelle et conservation du produit scalaire (se reporter par exemple à [13]).

3.1. Translations

Un résultat remarquable est qu'imposer à une distribution énergétique temps-fréquence d'être compatible avec les *translations* temporelles et fréquentielles (i.e. avec le groupe de Weyl-Heisenberg) suffit à restreindre l'espace des solutions admissibles à la classe, dite de Cohen [11], définie par :

$$(15) C_x(t, v; f) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi n(u-t)} f(n, t) x\left(u + \frac{t}{2}\right) x^*\left(u - \frac{t}{2}\right) e^{-i2\pi vt} dn dt.$$

où f est une fonction arbitraire telle que $f(0, 0) = 1$.

On peut vérifier que l'on a alors :

$$(16) y(t) = [L_{WH}(t_0, v_0)x](t) \Rightarrow C_y(t, v; f) = C_x(t - t_0, v - v_0; f).$$

On obtient ainsi une paramétrisation des représentations admissibles par l'intermédiaire d'une fonction arbitraire pouvant être spécifiée lorsque l'on impose des contraintes supplémentaires.

3.2. Changements d'échelle

Une première contrainte imaginable, à l'intérieur de la classe de Cohen, est d'imposer à (15) d'être compatible avec les *changements d'échelle*, i.e. de satisfaire à :

$$(17) y(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} x\left(\frac{t}{a}\right) \Rightarrow C_y(t, v; f) = C_x\left(\frac{t}{a}, av; f\right).$$

On peut alors montrer [13] que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la fonction arbitraire f vérifie :

$$(18) f(n, \tau) = f\left(an, \frac{\tau}{a}\right), \quad \forall a > 0$$

et donc qu'elle ne dépende de ses variables que par l'intermédiaire de leur produit :

$$(19) \exists g(\theta) |f(n, \tau) = g(n\tau).$$

3.3. Produit scalaire

Une deuxième contrainte imaginable, toujours à l'intérieur de la classe de Cohen, est d'imposer à (15) d'assurer une *conservation de produit scalaire* du type :

$$(20) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} C_x(t, v; f) C_y^*(t, v; f) dt dv.$$

C'est là une propriété permettant de généraliser la notion de comparaison entre signaux en termes de corrélation temporelle (ou fréquentielle) aux deux variables conjointes temps et fréquence, propriété utile en particulier pour formuler une théorie de la détection optimale dans le plan temps-fréquence [14]. On peut alors montrer que ceci est vérifié si et seulement si f est unimodulaire :

$$(21) |f(n, \tau)| = 1.$$

4. Liens entre transformée de Fourier à court-terme, transformée en ondelettes et représentations temps-fréquence

L'ensemble des conditions énoncées au § 3 va maintenant nous permettre de préciser certains liens existant entre transformée de Fourier à court-terme, transformée en ondelettes et représentations temps-fréquence. Quoique des comparaisons puissent porter directement sur les transformées linéaires [2], c'est à leur version énergétique que nous nous intéresserons ici.

4.1. Relations de lissage

Ainsi, si l'on se place dans le cas unimodulaire (21), il est clair que l'on peut écrire, d'après (7), (16) et (20) :

$$(22) |F_x(t, v)|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} C_x(u, n; f) C_h^*(u - t, n - v; f) du dn.$$

Si, de plus, (18) est vérifiée, on a d'après (14) et (17) :

$$(23) |T_x(t, a)|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} C_x(u, n; f) C_h^*\left(\frac{u-t}{a}, an; f\right) du dn.$$

Ainsi, pour toutes les distributions de la classe de Cohen associées à une fonction f de la forme :

$$(24) f(n, \tau) = e^{i\theta(n\tau)},$$

les modules carrés de la transformée de Fourier à court-terme (ou spectrogramme) et de la transformée en ondelettes peuvent s'exprimer comme versions doublement lissées (en temps et en fréquence) de la représentation correspondante du signal par la représentation associée du signal analysant.



4.2. Interprétation et optimalité de la distribution de Wigner-Ville

La différence essentielle entre (22) et (23) est que, dans le premier cas, le lissage est homogène dans tout le plan alors que, dans le second, il dépend du point d'évaluation d'une façon naturellement liée à la géométrie du groupe affine.

Si l'on veut être en droit d'interpréter ces relations de lissages comme une perte de résolution par rapport à la distribution non-lissée, il faut que cette dernière soit elle-même la plus concentrée possible dans le plan temps-fréquence. On sait alors, au moins dans le cas où

$$(25) \phi(\theta) = k\theta, \quad k \in \mathbb{R},$$

que cette contrainte implique [15] :

$$(26) k = 0 \Rightarrow f(n, \tau) = 1,$$

la représentation résultante étant la distribution de Wigner-Ville [16-17] :

$$(27) W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\nu\tau} d\tau.$$

Il apparaît donc que la transformée en ondelettes, tout comme la transformée de Fourier à court-terme, sont, dans leur versions énergétiques, des versions dégradées en résolution par rapport à la distribution de Wigner-Ville. On retrouve ainsi, comme cas particulier de (23) le résultat établi par Rioui [18]. Il est à noter que le résultat général (23) avait en fait déjà été obtenu dans un autre contexte [19] : celui des *fonctions d'ambiguïté à large bande*, dont on sait qu'elles partagent avec les transformées en ondelettes une similarité de structure [1-2].

Ainsi, quoique la transformée en ondelettes présente, en tant qu'analyse multirésolution, des avantages certains vis-à-vis de la transformée de Fourier à court-terme, ses propriétés de localisation conjointe en temps et en fréquence restent néanmoins inférieures à ce qu'il est possible d'atteindre par une distribution de Wigner-Ville.

4.3. Deux exemples

Deux exemples illustrant les comportements comparés des analyses considérées précédemment sont présentés en figures 1 et 2. Le premier cas (fig.1) concerne un signal formé de trois paquets gaussiens semblables, mais de dates d'apparition et de fréquences centrales différentes. Ce signal, dont l'allure temporelle (resp. fréquentielle) est présentée en fig.1-a (resp. fig.1-b) a été analysé par trois spectrogrammes différents (fenêtre étroite (fig.1-c), intermédiaire (fig.1-d) et large (fig.1-e)), une transformée en ondelettes (fig.1-f) basée sur l'ondelette classique de Morlet [8-9] et une transformée de Wigner-Ville (fig.1-g). L'ensemble de ces diagrammes fait clairement apparaître les propriétés de lissage (homogène ou non) discutées au § 4.1, en particulier la dégradation (resp. l'amélioration) de la résolution fréquentielle (resp. temporelle) de l'analyse en ondelettes lorsque la fréquence d'évaluation augmente. En ce qui concerne la distribution de Wigner-Ville, le gain en résolution pour les composantes utiles du signal est contrebalancé par la présence de termes d'interférence dont l'influence peut être réduite par un lissage approprié : à titre de comparaison, la fig.1-h présente le résultat d'un lissage séparable [13, 17] inférieur à celui (fixe) imposé par le spectrogramme ou l'analyse en ondelettes.

Le deuxième exemple concerne l'existence d'une petite discontinuité sur un signal périodique, phénomène que l'on peut considérer comme la superposition de deux événements intervenant à deux échelles de temps différentes. Le signal (resp. son spectre) est présenté en fig.2-a (resp. fig.2-b). Pour un tel signal, la comparaison entre un spectrogramme (fig.2-c) et une transformée en ondelettes (fig.2-d) confirme l'intérêt de cette dernière pour mettre en évidence la singularité [8-9]. Ces deux représentations doivent cependant être comparées également à la distribution de Wigner-Ville (fig.2-e) dont elles sont toutes deux des versions lissées : on constate alors que la singularité s'y manifeste de manière très claire.

5. Conclusion

En partant de liens théoriques et en les illustrant sur deux exemples typiques, il a été possible de proposer les premiers éléments d'une comparaison entre trois méthodes d'analyse non-paramétrique de signaux non-stationnaires (ondelettes, spectrogramme et Wigner-Ville), le but d'une telle comparaison étant d'aider à préciser les domaines d'excellence de chacune d'elles. D'un point de vue énergétique, les résultats présentés confirment le rôle central joué par la distribution de Wigner-Ville, les deux autres méthodes pouvant s'en déduire par lissage dans le plan temps-fréquence, et fournissant donc une résolution moindre. Ils suggèrent aussi de nouvelles approches s'inspirant du lissage séparable de la distribution de Wigner-Ville [13, 17], mais en l'adaptant au groupe affine [10, 18]. D'une manière plus générale, il faut remarquer que l'interprétation temps-fréquence de la transformation en ondelettes n'est qu'un sous-produit de sa définition, sa véritable interprétation étant celle d'une représentation temps-échelle [1-2, 9] : ceci tempère évidemment ses limitations, telles qu'on les a présentées ici.

References

- [1] P. Flandrin, "Some Aspects of Non-Stationary Signal Processing with Emphasis on Time-Frequency and Time-Scale Methods" in : *Wavelets* (J.M. Combes, A. Grossmann, P. Tchamitchian, eds.), Springer-Verlag, to appear.
- [2] P. Flandrin, "Time-Frequency and Time-Scale", *IEEE 4th ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, pp. 77-80, Minneapolis (MN), 1988.
- [3] J.B. Allen, L.R. Rabiner, "A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis", *Proc. IEEE* 65 (11), pp. 1558-1564, 1977.
- [4] D. Gabor, "Theory of Communication", *J. IEE* 93 (111), pp. 429-457, 1946.
- [5] C.W. Helstrom, "An Expansion of a Signal in Gaussian Elementary Signals", *IEEE Trans. on Info. Theory* IT-12, pp. 81-82, 1966.
- [6] L.K. Montgomery, I.S. Reed, "A Generalization of the Gabor-Helstrom Transform", *IEEE Trans. on Info. Theory* IT-13, pp. 344-345, 1967.
- [7] A. Grossmann, J. Morlet, "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape", *SIAM J. Math. Anal.* 15 (4), pp. 723-736, 1984.
- [8] R. Kronland-Martinet, J. Morlet, A. Grossmann, "Analysis of Sound Patterns Through Wavelet Transforms", *Int. J. Pattern Recogn. Artif. Intell.* 1 (2), pp. 273-302, 1987.
- [9] R. Kronland-Martinet, A. Grossmann, "Time and Scale Representations Obtained Through Continuous Wavelet Transforms", in : *Signal Processing IV - Theories and Applications* (J.L. Lacoume et al., eds.), pp. 243-252, North-Holland, 1988.
- [10] B. Vidale, P. Flandrin, "Comparaison Théorique de Deux Méthodes Temps-Fréquence et Temps-Echelle Obtenues par Lissage de la Distribution de Wigner-Ville", Rapport Interne ICPI TS-8810, 1988.
- [11] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part III : ", *Philips J. Res.* 35 (6), pp. 372-389, 1980.
- [12] W. Mecklenbrauker, "A Tutorial on Non-Parametric Bilinear Time-Frequency Signal Representations", in : *Traitement du Signal / Signal Processing* (J.L. Lacoume, T.S. Durrani, R. Stora, eds.), Les Houches, Session XLV, pp. 277-336, North-Holland, 1987.
- [13] P. Flandrin, "Représentations Temps-Fréquence des Signaux Non-Stationnaires", Thèse Doct. Etat ès Sc. Phys., Univ. Grenoble, 1987.
- [14] P. Flandrin, "A Time-Frequency Formulation of Optimum Detection", *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, ASSP-36 (9), pp. 1377-1384, 1988.
- [15] A.J.E.M. Janssen, "On the Locus and Spread of Pseudo-Density Functions in the Time-Frequency Plane", *Philips J. Res.* 37 (3), pp. 79-110, 1982.
- [16] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker, "The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part I : Continuous-Time Signals", *Philips J. Res.* 35 (3), pp. 217-250, 1980.
- [17] P. Flandrin, B. Escudié, "Principe et Mise en Oeuvre de l'Analyse Temps-Fréquence par Transformation de Wigner-Ville", *Traitement du Signal*, 2 (2), pp. 143-151, 1985.
- [18] O. Rioui, "Wigner-Ville Representations of Signals Adapted to Shifts and Dilatations", preprint, 1988.
- [19] P. Flandrin, "Time-Frequency Interpretation of Matched Filtering", *IEEE-Academia Sinica Workshop on Acoust., Speech and Signal Proc. WASSP-86*, pp. 287-290, Beijing, 1986.
- [20] G. Gambardella, "A Contribution to the Theory of Short-Time Spectral Analysis with Non-Uniform Bandwidth Filters", *IEEE Trans. on Circuit Theory* CT-18 (4), pp. 455-460, 1971.
- [21] J.E. Youngberg, S.F. Boll, "Constant-Q Signal Analysis and Synthesis", *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-78*, Tulsa (OK), pp. 375-378, 1978.

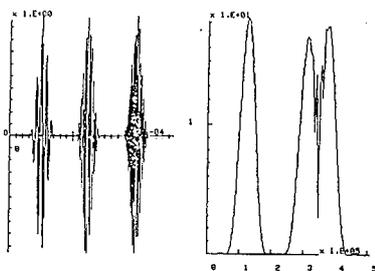


Fig.1-a

Fig. 1-b

- Fig.1-a : signal
 Fig.1-b : spectre
 Fig.1-c : spectrogramme à fenêtre étroite
 Fig.1-d : spectrogramme à fenêtre intermédiaire
 Fig.1-e : spectrogramme à fenêtre large
 Fig.1-f : module carré de la transformée en ondelettes
 Fig.1-g : distribution de Wigner-Ville
 Fig.1-h : distribution pseudo-Wigner-Ville lissée

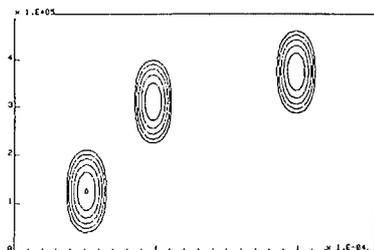


Fig.1-c

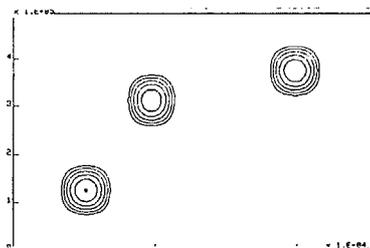


Fig.1-d

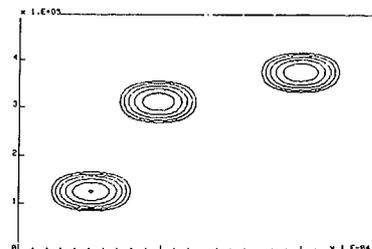


Fig.1-e

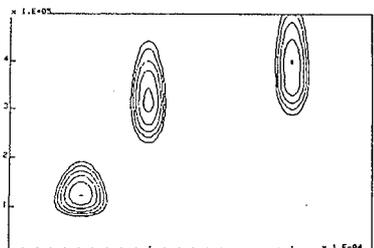


Fig.1-f

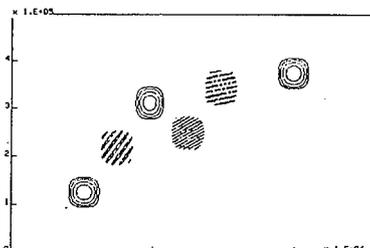


Fig.1-g

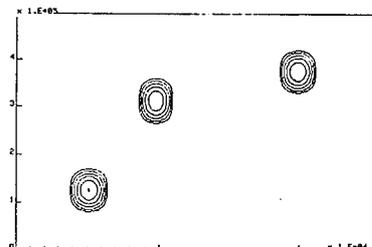


Fig.1-h

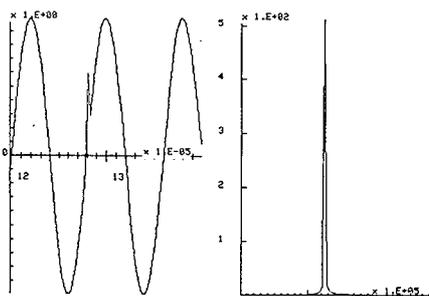


Fig.2-a

Fig.2-b

- Fig.2-a : signal
 Fig.2-b : spectre
 Fig.2-c : spectrogramme
 Fig.2-d : module carré de la transformée en ondelettes
 Fig.2-e : distribution de Wigner-Ville

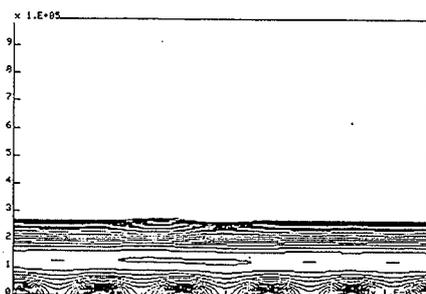


Fig.2-c

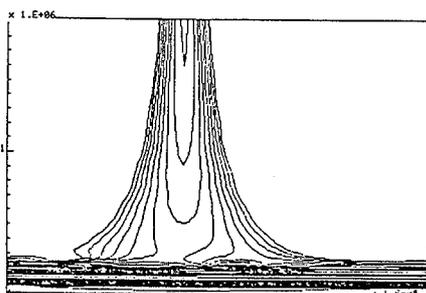


Fig.2-d

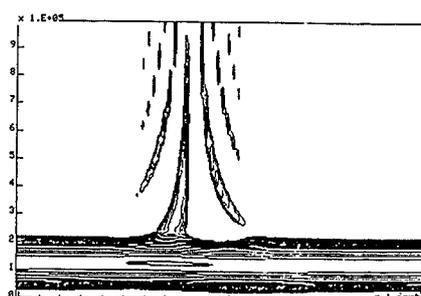


Fig.2-e