SUR LA DUALITE ENTRE LA PREDICTION LINEAIRE D'UN SIGNAL ET LA DECOMPOSITION QR

Maurice BELLANGER
T.R.T.
5, avenue Réaumur
92350 LE PLESSIS ROBINSON - FRANCE

RESUME

La factorisation triangulaire à base de rotations de la matrice des valeurs d'un signal, désignée par décomposition QR, est liée à la prédiction linéaire. On établit un ensemble de relations entre d'une part, les paramètres qui apparaissent dans ces rotations et les vecteurs des données transformées et d'autre part, les coefficients des prédicteurs en treillis normalisés, dans le cadre du filtrage adaptatif avec algorithmes de moindres carrés. L'application à l'analyse des signaux en temps réel est abordée.

SUMMARY

The triangular factorization of a signal data matrix called QR decomposition is related to linear prediction. In algorithms for adaptative filtering the factorization is carried out recursively through a set of rotations. In this paper relationships are established between the rotation parameters and the rotated data vectors and the reflection coefficients which appear in normalized lattice structures for linear prediction. The application to real time signal analysis is also considered.

1 INTRODUCTION

La prédiction linéaire appliquée à un signal x(n) avec des filtres dont l'ordre varie de 1 à N-1 conduit à une factorisation triangulaire de la matrice d'auto-corrélation d'ordre N, R_N, de ce signal. Comme on le montre au paragraphe 5.7 de la référence [1], avec la prédiction linéaire avant, cette factorisation peut se schématiser comme suit :

$$R_N = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}^t \operatorname{diag}(E_{ai}) \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ A_i & \ddots \end{bmatrix}^{-1} \quad (1)$$

où les E_{ai} sont les puissances des erreurs de prédiction avant, les A_i les vecteurs des coefficients de prédiction.

Avec la prédiction arrière, comme on le montre au paragraphe 5.3. de la référence [1], le schéma est le suivant :

$$R_N = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}^t \operatorname{diag}(E_{bi}) \begin{bmatrix} \ddots & B_i \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}^{-1} \quad (2)$$

où les E_b sont les puissances des erreurs de prédiction arrière et les B_i les vecteurs des coefficicients.

Or, cette factorisation peut s'obtenir directement par des rotations appliquées à la matrice des valeurs du signal. Dans le présent article, on se propose d'examiner les correspondances qui existent entre les éléments de ces matrices triangulaires et les paramètres habituels de la prédiction linéaire, en se plaçant dans le cadre du filtrage adaptatif par les moindres carrés. La motivation pour cette étude provient des algorithmes rapides proposés récemment, qui font appel à la décomposition QR et conduisent à la mise à jour de nouveaux types de variables internes [2,3].

Dans la référence [2] et le chapitre 10 de [1] c'est la prédiction linéaire avant qui sert de base, associée à la factorisation schématique (1). Ci-dessous, c'est plutôt la prédiction arrière qui est prise comme base de départ, comme dans la référence [3].

2 LA DECOMPOSITION TRIANGULAIRE PAR ROTATIONS

Soit Q(n) la matrice de rotation carrée à (n+1)x(n+1) éléments, telle que :

$$Q(n)\begin{bmatrix} x(n) & \cdots & x(n+1-N) \\ W^{1/2}x(n-1) & \cdots & W^{1/2}x(n-N) \\ \vdots & & \vdots \\ W^{n/2}x(0) & \cdots & W^{n/2}x(1-N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \\ & T_N(n) & \end{bmatrix} \qquad (3)$$

où W est le facteur de pondération et $T_N(n)$ une matrice triangulaire à N lignes et N colonnes. L'entier N est l'ordre du filtre adaptatif, ou du prédicteur appliqué au signal d'entée x(n).

La matrice Q(n) se calcule par récurrence. En effet, en désignant par $X_N(n)$ le tableau des valeurs des données dans l'équation (3), il vient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q(n-1) \end{bmatrix} X_N(n) = \begin{bmatrix} x(n) & \cdots & x(n+1-N) \\ & W^{1/2}\,T_N(n-1) & \end{bmatrix} \qquad (4)$$

La première ligne du tableau de droite peut être annulée de gauche à droite par un ensemble de N rotations Q(n) :

$$\hat{Q}(n) = \begin{bmatrix} \cos\Theta_N & -\sin\Theta_N & 0 \\ \sin\Theta_N & \cos\Theta_N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cos\Theta_N & 0 & -\sin\Theta_N \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta_N & 0 & \cos\Theta_N \end{bmatrix} \qquad (5)$$

qui conduisent à la récurrence :

$$Q(n) = \hat{Q}(n)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q(n-1) \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Dans la prédiction linéaire arrière d'ordre N, le vecteur des coefficients à l'indice n, $B_N(n)$, par définition minimise la norme du vecteur erreur suivant :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_b(n) \\ W^{1/2}\epsilon_b(n-1) \\ \vdots \\ W^{1/2}\epsilon_b(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n-N) \\ W^{1/2}x(n-N-1) \\ \vdots \\ W^{1/2}x(-N) \end{bmatrix} - X_N(n)\,B(n) \qquad (7)$$

Avec les notations :

$$\begin{bmatrix} x_{bqNn}(n) \\ x_{bqN(n-1)}(n) \\ \vdots \\ x_{bqN1}(n) \end{bmatrix} = Q(n)\begin{bmatrix} x(n-N) \\ W^{1/2}x(n-N-1) \\ \vdots \\ W^{n/2}x(-N) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

les N coefficients de la prédiction arrière sont donnés par:

$$\begin{bmatrix} x_{bqNN}(n) \\ \vdots \\ x_{bqN1}(n) \end{bmatrix} = X_{bqN}(n) = T_N(n)\;B_N(n) \qquad (9)$$

Les équations (3) et (8) peuvent être regroupées dans le système unique suivant :

$$Q(n)\begin{bmatrix} & x(n-N) \\ & W^{1/2}x(n-N-1) \\ X_N(n) & \vdots \\ & W^{n/2}x(-N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{bqNn}(n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{bqN(N+1)}(n) \\ 0 & & & \\ & T_N(n) & & X_{bqN}(n) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

On peut déterminer directement un ensemble de rotations qui annulent, dans la dernière colonne du membre de droite, les termes $x_{bqNi}(n)$ pour $N+2 \leq i \leq n$.

Il en résulte l'expression suivante :

$$T_{N+1}(n) = \begin{bmatrix} 0 \quad \dots \quad 0 & E_{bN}^{1/2}(n) \\ \begin{matrix} 0 & \\ & T_N(n) \end{matrix} & X_{bqN}(n) \end{bmatrix} \qquad (11)$$

où $E_{bN}(n)$ est l'énergie d'erreur de prédiction arrière, c'est à dire :

$$E_{bN}(n) = \sum_{p=0}^{n} W^{n-p}\left(x(p-N) - B_N^t(n)\, X(p) \right)^2 \qquad (12)$$

Par itérations, ou on déduit que la matrice triangulaire s'écrit :

$$T_{N+1}(n) = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & \dots & E_{bN}^{1/2}(n) \\ & \vdots & \vdots & & \\ & & E_{b1}^{1/2}(n) & & X_{bqN}(n) \\ E_{b0}^{1/2}(n) & X_{bq1}(n) & & & \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Cette matrice est un facteur de la matrice d'auto-corrélation estimée $R_N(n)$. En effet, d'après la définition (3), comme $Q(n)$ est une matrice de rotation on a :

$$R_N(n) = X_N^t(n)\, X_N(n) = T_N^t(n)\, T_N(n) \qquad (14)$$

A noter qu'une expression semblable à la factorisation (2) est obtenue en faisant appel à la matrice coidentité (ou de retournement) J_N :

$$R_N(n) = T_N^t(n)\; T_N(n) = T_N^t(n)\; J_N^t J_N\, T_N(n) \qquad (15)$$

Cette équation permet de donner une signification aux éléments de la dernière ligne de la matrice $T_{N+1}(n)$: ils sont proportionnels aux N + 1 premiers termes de la fonction d'auto-corrélation estimée du signal x(n), le facteur de proportionnalité étant

$$E_{b0}^{1/2}(n) = R_1^{1/2}(n)$$

c'est à dire la racine carrée de l'énergie du signal.

3 APPLICATION A LA PREDICTION LINEAIRE AVANT :

Soit le produit : (16)

$$\begin{bmatrix} Q(n-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) & \\ W^{1/2}x(n-1) & \\ & X_N(n-1) \\ W^{n/2}x(0) & 0 \;\dots\; 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{aqNn}(n) & 0 \;\dots\; 0 \\ x_{aqN(N+1)}(n) & 0 \;\dots\; 0 \\ X_{aqN}(n) & T_N(n-1) \\ W^{n/2}x(0) & 0 \;\dots\; 0 \end{bmatrix}$$

Par un ensemble de rotations, il est possible, dans la première colonne du tableau de droite, d'annuler les termes $x_{aqNi}(n)$ pour $N+2 \leq i \leq n$, ce qui fait apparaître l'énergie d'erreur de prédiction avant $E_{aN}(n)$. Le terme de droite de l'équation (16) devient ainsi :

$$\begin{bmatrix} X_{aqN}(n) & T_N(n-1) \\ E_{aN}^{1/2}(n) & 0 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Pour aboutir à la matrice triangulaire $T_{N+1}(n)$ il faut encore un ensemble de N rotations, annulant le vecteur $X_{aqN}(n)$ et définies par :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ E_{b0}^{1/2}(n) \end{bmatrix} = Q_\alpha(n) \begin{bmatrix} X_{aqN}(n) \\ \\ \\ E_{aN}^{1/2}(n) \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Alors la matrice $T_{N+1}(n)$ est donnée par : (19)

$$T_{N+1}(n) = \begin{bmatrix} 0 \quad \dots \quad 0 & E_{bN}^{1/2}(n) \\ \begin{matrix} 0 & \\ & T_N(n) \end{matrix} & X_{bqN}(n) \end{bmatrix} = Q_\alpha(n) \begin{bmatrix} & 0 \\ X_{aqN}(n) & \\ & T_N(n-1) \\ E_{aN}^{1/2}(n) & 0 \;\dots\; 0 \end{bmatrix}$$

A ce point du développement, une observation très intéressante est la suivante : les angles α_i dans les rotations de l'ensemble Q_α sont liés aux coefficients du treillis normalisé. En effet, en considérant les colonnes 2 à N+1 dans l'équation (19) il vient, pour $0 \leq i \leq N-1$:

$$E_{b(i+1)}^{1/2}(n) = \cos\alpha_{i+1}\, E_{bi}^{1/2}(n-1) \qquad (20)$$

Cette relation est à rapprocher de l'équation du treillis normalisé [(8.63) page 302 dans [1]] :

$$E_{b(i+1)}(n) = \left(1 - k_{i+1}^2(n) \right) E_{bi}(n-1) \qquad (21)$$

Il en résulte :

$$k_i(n) = \sin\alpha_i \quad ; \quad 1 \leq i \leq N \qquad (22)$$

soit, en fonction des paramètres de la prédiction avant, en appliquant l'équation (18) :

$$k_i(n) = \sin\alpha_i = \frac{x_{aqNi}(n)}{\sqrt{E_{aN}(n) + \sum_{j=i}^{N} x_{aqNj}^2(n)}} \qquad (23)$$

Donc les éléments du vecteur obtenu par transformation par rotations des données d'entrée sont liés aux coefficients de réflexion du filtre en treillis normalisé et les algorithmes peuvent fournir les coefficients k_i.

Un autre aspect important pour les algorithmes est le suivant. Les relations (20) permettent la mise à jour des énergies d'erreurs de prédiction. Or les angles θ_i dans l'expression (5) sont directement liés aux récurrences temporelles sur ces mêmes énergies comme le montre l'équation suivante déduite de (4) et (5) :

$$[\hat{Q}(n)]^t \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \\ & T_N(n) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n) & \cdots & x(n+1-N) \\ 0 & & \\ & W^{1/2}T_N(n-1) & \end{bmatrix} \quad (24)$$

qui fournit les relations $(0 \leq i \leq N-1)$:

$$\cos\Theta_{i+1}\, E_{bi}^{1/2}(n) = W^{1/2}\, E_{bi}^{1/2}(n-1) \quad (25)$$

En se reportant aux filtres en treillis normalisés et en désignant par $e_{nbi}(n)$ l'erreur de prédiction arrière normalisée, on a également :

$$\sin\Theta_{i+1} = e_{nbi}(n) \quad (25\text{-bis})$$

c'est à dire que la matrice de rotation $\hat{Q}(n)$ fournit les paramètres de la prédiction arrière du treillis normalisé.

En combinant les résultats ci-dessus avec la relation (19) et la récurrence temporelle (6), on aboutit à un algorithme de moindres carrés rapide [3].

4 APPLICATION A L'ANALYSE DES SIGNAUX

Les algorithmes de filtrage adaptatif font la mise à jour des vecteurs $X_{aqN}(n)$ et $X_{bqN}(n)$, qui satisfont les relations :

$$X_{aqN}(n) = T_N(n-1)\; A_N(n) \quad (26)$$

$$X_{bqN}(n) = T_N(n)\; B_N(n)$$

Si l'erreur de prédiction s'annule pour $N > M$, avec l'expression (13) et les relations (25) ci-dessus, il apparaît que la matrice $T_N(n)$ n'a que M +1 lignes non nulles et que les vecteurs X_{aqN} et X_{bqN} n'ont que M+1 éléments non nuls. Ainsi dans le cas de sinusoïdes, le nombre d'éléments non nuls de ces vecteurs donne le nombre de sinusoïdes.

Par exemple pour $x(n) = \sin n\frac{\pi}{3}$, le vecteur normalisé obtenu à l'ordre N = 8 par un algorithme rapide à l'itération 1000 s'écrit :

$$X_{aq8}(1000) = (-0.520,\ 0.854,\ 0.018,\ 0.003,\ -0.004,\ -0.007,\ -0.005,\ 0.001)^t$$

Une autre propriété des vecteurs X_{aqN} et X_{bqN} découle de la factorisation (14) de la matrice AC du signal. En effet si la matrice $R_N(n)$ est une matrice bande, on vérifie directement qu'il en est de même de la matrice $T_N(n)$. Ainsi, si la fonction AC du signal n'a que M+1 termes non nuls, le vecteur X_{aqN} aura ses M derniers termes non nuls.

Finalement, dans le vecteur X_{aqN}, les premiers termes apportent une information sur les composantes sinusoïdales du signal et les derniers sur la modélisation MA.

De plus, il est toujours possible d'utiliser l'information apportée par les coefficients de réflexion k_i, qui sont, soit disponibles dans l'algorithme avec les valeurs $\sin k_i$, soit calculables à partir des valeurs des éléments du vecteur X_{aqN} par les relations (23).

CONCLUSION

Des relations directes ont été mises en évidence entre d'une part, les algorithmes de moindres carrés basés sur la décomposition QR et les rotations et d'autre part, les algorithmes correspondant aux structures en treillis normalisé, pour le filtrage adaptatif. L'étude a été menée en se basant sur la prédiction linéaire arrière, qui permet une approche plus simple. Des résultats du même type pourraient être obtenus avec une approche basée sur la prédiction avant.

L'analyse des vecteurs des données transformées peut apporter des informations intéressantes pour l'analyse des signaux en temps réel. Les premiers résultats sont prometteurs, c'est une voie qui mérite d'être approfondie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BELLANGER, " Analyse des signaux et Filtrage Numérique Adaptatif ", Collection CNET-ENST, Editions MASSON, Paris 1989.

[2] J. CIOFFI, " A Fast QR/Frequency Domain RLS Adaptive Filter ", Proceedings of IEEE-ICASSP-87, Dallas, USA, April 1987, pp.407-410.

[3] I.K. PROUDLER, J.G. MACWHIRTER, T.J. SHEPHERD, " Fast QRD - based Algorithms for Least Squares Linear Prediction ", IMA Conference on Mathematics in Signal Processing, WARWICK, UK, december 1988.