Théorème sur les signaux analytiques

Roger CESCHI

Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electrotechnique et Electronique - B.P. 99 - 2 bd Blaise Pascal - 93162 Noisy Le Grand
Dpt SIGNAUX et TELECOMMUNICATIONS

RÉSUME

Le but de cet article consiste à fournir un théorème permettant d'élargir les hypothèses du théorème de Bedrosian.
En effet, celui-ci nous indique que, pour deux fonctions f et g dont les supports fréquentiels de F et G (Transformées de Fourier respectives de f et g) remplissant certaines conditions, alors la transformée de Hilbert du produit $f.g$ peut se séparer et s'écrire sous la forme $f.H_i[g]$.

Le théorème proposé va nous permettre pour une certaines classe de fonctions d'écrire $H_i[f.g] = f.H_i[g]$ bien que les conditions sur les supports de F et G ne soient pas remplies.
L'intérêt consiste, bien évidemment, à élargir la classe de signaux pour lesquels la séparation $H_i[f.g]$ peut être appliquée.
Par ailleurs, une autre démonstration du théorème de Bédrosian est proposée utilisant l'écriture analytique des supports fréquentiels.

SUMMARY

The object of this paper is to present a theorem which allows the exploitation of the Bedrosian theorem. The Bedrosian theorem states that for any given two fonctions f and g with their frequency support of F and G (the Fourier transforms of f and g respectively), that satisfy certain conditions, the Hilbert transform of the product $f.g$ may be, reexpressed as $f.H_i[g]$

The theorem proposed in this paper relieves the conditions of the Bedrosian theorem for a class of function and allows the equality $H_i[f.g] = f.H_i[g]$ even in the case where the support of F and G are not fulfilled.
The avantage of this theorem is the enlargement of the class of signals to which the separation applies. On the other hand, an alternative proff of the Bedrosian theorem, based on the analytic form of the frequency supports, is proposed

Théorème de Bedrosian

[1] [2] [3]
Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions qui appartiennent à L_2, de transformées de Fourier $F(\mu)$ et $G(\mu)$ respectivement telles que :

$$\begin{array}{rll} F(\mu) & \text{est nulle pour} & |\mu| > B \\ \text{et } G(\mu) & \text{est nulle pour} & |\mu| < B \end{array}$$

Alors $H_i[f.g] = f.H_i[g]$ $\quad H_i$ = Transformée de Hilbert
On rappelle que pour $f \in L_p$ $\quad (1 < p < \infty)$ $\quad$ [4]

$$H_i[f] = \left[VP\frac{1}{\pi u} * f\right](t) = VP\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u)}{t-u}du$$

converge pour presque tout t.

Remarque :

Cette condition sur f s'avère suffisante mais non nécessaire et on supposera par la suite que pour les fonctions ou distributions considérées, la transformée de Hilbert existe.

Preuve :

Il nous faut démontrer que $H_i[f.g] = f.H_i[g]$ en considérant que :

$$VP\left(f * \frac{1}{\pi u}\right)(t) = TF^{-1}\{-jsign(v).F(v)\}$$

avec VP : valeur principale au sens de Cauchy.
Nous pouvons écrire :

$$TF\{H_i[f.g]\} = TF\left\{VP\left[f.g * \frac{1}{\pi u}\right](t)\right\}$$

Comme $TF\{VP\frac{1}{\pi u}\} = -j\ sign(\mu)$ il vient :

$$TF\{H_i[f.g]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v)G(\mu - v)(-jsign(\mu))dv \quad (1)$$

Etant donnés les supports de F et G, le domaine d'intégration devient :
$[-B + B]\cap] - \infty, \mu - B] \cup [-B, +B] \cap [B + \mu, +\infty[$
Si $\mu > 0$, alors le domaine devient :

$$[-B, \mu - B] \quad \text{et} \quad sign(\mu) = +1$$

(1) devient :

$$-j\int_{-B}^{\mu-B} F(v)G(\mu - v)dv \quad (2)$$

Si $\mu < 0$, le domaine devient :

$$[B + \mu, B] \quad \text{et} \quad sign(\mu) = -1$$

(1) devient :

$$j\int_{B+\mu}^{B} F(v)G(\mu - v)dv \quad (3)$$

Le deuxième membre de l'égalité de Bedrosian peut s'écrire, en prenant la transformée de Fourier :

$$TF\{f.H_i[g]\} = TF\{f.VP\left[g * \frac{1}{\pi u}\right](t)\}$$

qui peut encore s'écrire :

$$TF\{f.H_i[g]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v)G(\mu-v)(-j)sign(\mu-v)dv \quad (4)$$

Comme précédemment :
si $\mu > 0$, le domaine d'intégration devient :

$$[-B, \mu - B]$$

et sign $(\mu - v) = +1$ dans le domaine considéré
(4) devient :

$$-j\int_{-B}^{\mu-B} F(v)G(\mu - v)dv \quad (5)$$

Si $\mu < 0$ le domaine devient :

$$[B + \mu, B] \quad \text{et} \quad sign(\mu - v) = -1$$

(4) devient :

$$j\int_{B+\mu}^{B} F(v)G(\mu - v)dv \quad (6)$$

Nous remarquons que (2) = (5) et (3) = (6).
Ainsi le théorème de Bedrosian est démontré.
Remarque : Si $G(\mu)$ est nulle pour $|\mu| < B$ alors le signal analytique $\varphi(t)$ associé à $g(t)$ soit :

$$\varphi(t) = g(t) + jH_i[g(t)]$$

est tel que : $TF\{\varphi(t)\} = \phi(\mu) = 0$ si $\mu < B$
La réciproque est fausse.

Notation :
F et G représentent respectivement les transformées de Fourier de f et g.
$H_i[f]$ représente la transformée de Hilbert de f.

Théorème proposé

On considère deux fonctions $f(t)$ et φ telles que :
φ est une fonction rationnelle complexe pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad d^0 q \geq d^0 p + 1$$

q possèdant que des racines à partie imaginaire strictement négative.
f est une fonction rationnelle réelle dont les pôles complexes à partie imaginaire positive ou nulle sont égaux à des zéros de φ.

1. Alors φ représente un signal analytique.
   Si, écrivant $f\varphi$ sous la forme :
   $$\frac{p_1}{q_1} \text{ on a } d^0q_1 \geq d^0p_1 + 1$$
   alors $f\varphi$ représente également un signal analytique et notant g la partie réelle de φ.

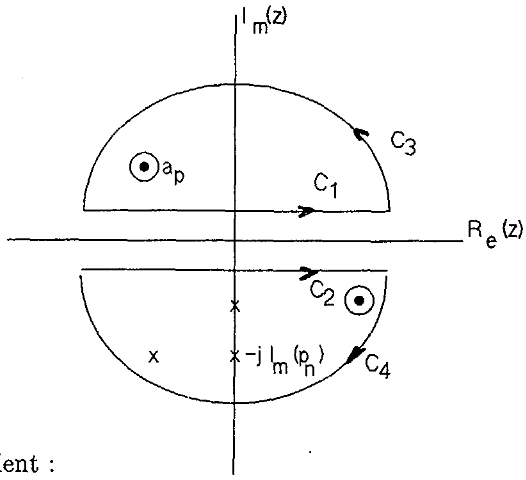
2. $$H_i[f.g] = f.H_i[g]$$
   note : Par rapport au résultat donné par le théorème de Bédrosian [*], nous nous sommes affranchis des hypothèses sur les supports de F et G.

   [*] E. BEDROSIAN, "A product theorem for Hilbert Transforms" Proc. IEEE, vol.51, pp. 868-869, may 1963.

Preuve de 1

$$\varphi(t) = \frac{\Pi_{l=1}^{n}(t+a_l)}{\Pi_{k=1}^{m}(t+p_k)} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{rcl} m & \geq & n+1 \\ Im(p_k) & \in & \mathcal{R}^{+*} \\ a_l & \in & \mathcal{C} \end{array} \right. \tag{7}$$

Calculons $\phi(\mu)$ la transformée de Fourier de $\varphi(t)$.



Il vient :
$$\phi(\mu) = \int_{\mathcal{R}} \varphi(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$
Dans le plan complexe $t \to z$.
$\int_{C1} + \int_{C3} = 0$ d'après le thérorème de Cauchy.
Nous appellerons B_i l'intégrale sur le contour C_i.
Ainsi :
$$B_1 + B_3 = 0 \tag{8}$$
Calculons la limite de B_3 quand $|z| \to \infty$.
Sur C_3,
$$\begin{array}{rcl} \text{posons } z & = & Re^{j\theta} \\ \text{et } M(R) & = & \sup |\varphi(Re^{j\theta})| \qquad \theta \in [O, \pi] \\ B_3 & = & \int_0^\pi \varphi(Re^{j\theta}) e^{-j2\pi\mu R(\cos\theta + j\sin\theta)} jRe^{j\theta} d\theta \end{array}$$

Dans le demi-plan supérieur, $\sin\theta \geq 0$ donc :
$$|B_3| \leq \int_0^\pi M(R) e^{2\pi\mu R\sin\theta} R d\theta$$
Par hypothèse $d^0[\varphi(z)] \leq -1$, ce qui nous permet d'écrire :
$$\lim_{R\to\infty} M(R) \quad . \quad R \leq cte$$
Si $\mu < 0$, l'intégrale converge vers zéro donc $\lim_{R\to\infty} |B_3| = 0$
(On peut appliquer le critère de la convergence dominée de Lebesgue).
Par (8), nous en déduisons que :
$$\phi(\mu) = B_1(z \in \mathcal{R}) = 0 \text{ si } \mu < 0 \tag{9}$$
Par ailleurs :
$$\int_{C_2} + \int_{C_4} = -2j\pi \sum_k Res.[\varphi(z)e^{-2\pi\mu zj}, p_k]$$
Il est évident que :
$$\lim_{R\to\infty} |B_4| = 0 \text{ si } \mu > 0 \text{ même démonstration que pour } B_3$$
Posons :
$$B_2 + B_4 = \beta \tag{10}$$
Nous en déduisons que :
$$\phi(\mu) = B_2(z \in \mathcal{R}) = \beta \text{ si } \geq 0 \tag{11}$$

Preuve de 2

$f.\varphi$ peut s'écrire :
$$f.\varphi = \frac{\Pi_{l=1}^{n_1}(t+a_l)}{\Pi_{k=1}^{m_1}(t+p_k)} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{rcl} m_1 & \geq & n_1 + 1 \\ n_1 < n & \text{et } m_1 > m & \\ Im(p_k) & \in & \mathcal{R}^{+*} \\ a_l & \in & \mathcal{C} \end{array} \right.$$
Nous nous retrouvons donc dans le cas 1 (démonstration précédente) et $f.\varphi$ représente un signal analytique.
Comme $\varphi(t)$ est analytique, elle peut s'écrire :
$$\varphi(t) = g(t) + jH_i[g(t)]$$
soit, en multiplant par $f(t)$
$$f\varphi = f.g + jfH_i[g] \tag{12}$$
Mais $f\varphi$ est aussi analytique par construction
$$f\varphi = \mathcal{R}_e(f\varphi) + jH_i[\mathcal{R}_e(f\varphi)]$$
Mais f est réelle et $\mathcal{R}_e(\varphi) = g$
$$\Rightarrow f.\varphi = f.g + jH_i[f.g] \tag{13}$$

En identifiant (12) et (13)

$$H_i[f.g] = fH_i[g] \qquad (14)$$

Nous avons établi ce résultat sans que $F(\mu)$ soit à support borné et que $\phi(\mu)$ (qui peut aussi s'écrire $-jsign(\mu)G(\mu)$) ait son support sur $[B, +\infty[$.
Remarque : [5]
Pour démontrer que $\begin{matrix} lim|B_3| \\ R \to \infty \end{matrix} = 0$, nous aurions pu écrire :

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) \text{ et } \sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \text{ pour } \theta \in \left[O, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi $|B_3| \leq 2R.M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4\theta R\mu} d\theta = \frac{M(R)}{2|\mu|}\left(e^{2\pi R\mu} - 1\right)$
Soit : $\begin{matrix} lim|B_3| \\ R \to \infty \end{matrix} = 0$ si $\mu < 0$

Résumé :

Par (8) et (9) il vient :

$$\phi(\mu) = -B_3 = 0 \text{ si } \mu < 0$$

Par (10) et (11) il vient :

$$\phi(\mu) = \beta - B_4 = 0 \text{ si } \mu \geq 0$$

Ceci nous montre que $\varphi(t)$ est un signal analytique (signal analytique associé à $g(t)$).
Par ailleurs, les hypothèses du théorème proposé nous amène à (14).
Remarque :
En décomposant $\varphi(t)$ en éléments simples :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{t + p_k}$$

On pourra écrire, si $\mu \geq 0$

$$\phi(\mu) = -2\pi j \sum_{k=1}^{m} A_k e^{-j2\pi\mu p_k} (= \beta)$$

exemple : [6]
Soit $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$ $\quad \varphi(t) = \frac{t-ja}{(t+jb_1)(t+jb_2)} a, b_1$ et $b_2 > 0$
On trouve : $\forall\mu \quad F(\mu) \neq 0$

$$\phi(\mu) = 0 \text{ si } \mu < 0 \quad \text{sans condition sur } \; G(\mu)$$

Conclusion :
Il apparaît donc que les fonctions φ et $f\varphi$ représentent des signaux analytiques (quand elles remplissent certaines conditions).
Ceci nous permet donc d'écrire :

$$H_i[f.g] = fH_i[g]$$

sans pour autant que les transformées de Fourier $F(\mu)$ et $G(\mu)$ remplissent les conditions du théorème de Bedrosian.

Bibliographie

[1] E. BEDROSIAN - Product theorem for Hilbert Transforms Proc. IEEE, USA (51, May 1963), pp 868-869

[2] A.W.RIMACZEK, E. BEDROSIAN - Hilbert Transforms and the complex transformation of real signals Proc. IEEE, USA (54, March 1966), pp 434-435

[3] H. STARK - An extension of the Hilbert Transforms product theorem Proc. IEEE, USA (59, Septembre 1971), pp 1359-1360

[4] L. SCHWARTZ - Theorie des distributions Hermann Press, 1973, Chap. 7, p 259

[5] M. MESSERI - Fonctions analytiques Polycopié ESIEE

[6] B. PICINBONO, W. MARTIN - Annales des Télécom. 38 1983, $N^0$5-6, pp 179-190

Remerciements :
Je tiens à remercier Monsieur Maurice MESSERI, professeur de Mathématiques et Directeur des Etudes à l'ESIEE pour les conseils judicieux qu'il m'a donnés et de l'intérêt qu'il a porté à ce travail, ainsi que Messieurs J.C. BERTEIN, J.P. RIGAUD et A. HAMAM, professeurs à l'ESIEE d'avoir bien voulu m'apportér leurs critiques constructives pour la rédaction de cet article.
J'exprime également mes remerciements à Monsieur B. PICINBONO Professeur à l'Université de Paris-Sud pour avoir accepter de superviser ce travail.