ÉLIMINATION DES SINGULARITÉS DANS LE TEST DE SCHUR-COHN

M. BENIDIR et B. PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes ESE, Plateau de Moulon, 91192, Gif-sur-Yvette-Cedex, France

RÉSUMÉ

L'algorithme de Schur-Cohn permet de déterminer, pour un polynôme P, le nombre $n_e(P)$ de zéros situés à l'extérieur du cercle unité. Le principe de cet algorithme est de calculer, à partir de P supposé de degré n, un ensemble de n coefficients $\rho_n, \rho_{n-1}, \ldots, \rho_1$. Mais il existe des polynômes, dits *singuliers*, pour lesquels le calcul des ρ_i ne peut se faire jusqu'au dernier coefficient ρ_1.

Dans cet article nous donnons une nouvelle version de l'algorithme de Schur-Cohn. Cette version permet d'associer à tout polynôme P, même s'il est singulier, un ensemble de n coefficients k_i. Nous démontrons que le nombre $n_e(P)$ est égal au nombre de coefficients k_i de module supérieur à un. Cette nouvelle version de l'algorithme est présentée et illustrée sur quelques polynômes particuliers puis transposée pour l'étude de la position des racines par rapport à l'axe imaginaire.

SUMMARY

The Schur-Cohn algorithm allows us to determine the number $n_e(P)$ of zeros appearing outside the unit circle for a polynomial P. This algorithm is based on the computation of a set of n coefficients $\rho_n, \rho_{n-1}, \ldots, \rho_1$ from P assumed of degree n. But there are polynomials P, referred to as *singular*, for which the computation of the ρ_is cannot be carried out until the last coefficients ρ_1.

In this paper, we give a new version of the Schur-Cohn algorithm. This version allows us to compute from any polynomial P, even if it is singular, a set of n coefficients k_i. It is shown that the number $n_e(P)$ equals the number of the k_is with modulus greater than one. The new version of the algorithm is presented and illustrated on some particular polynomials and transposed for studying the zero location with respect to the imaginary axis.

1. INTRODUCTION

La stabilité d'un système linéaire à temps discret se déduit de l'étude de la position par rapport au cercle unité (CU) des racines du polynôme P apparaissant au dénominateur de la fonction de transfert. Le problème de la détermination du nombre $n_e(P)$ des zéros de P situés à l'extérieur du CU a été traité initialement par Schur [1] et Cohn [2]. Il a été aussi étudié d'une manière extensive par Marden, Jury et beaucoup d'autres auteurs [3]-[9].

Le test de Schur-Cohn est fondé sur un algorithme qui permet de calculer à partir d'un polynôme P de degré n à coefficients réels ou complexes, un ensemble de n coefficients complexes ρ_i, $1 \leq i \leq n$, dénommés "*coefficients de réflexion*". Le nombre $n_e(P)$ s'exprime en fonction des rangs i des coefficients ρ_i de module supérieur à 1. Récemment, de nouvaux algorithmes permettant de déterminer $n_e(P)$ ont été proposés [5]-[7]. Mais, comme pour l'algorithme de Schur-Cohn, ces algorithmes introduisent des polynômes dits "*singuliers*", tels que ceux ayant des racines sur le CU, pour lesquels ces algorithmes ne sont pas adaptés. Différentes méthodes ont été alors proposées pour traiter ces singularités et deux cas sont à considérer :

1. On doit tester la condition $n_e(P) = 0$ et ce problème est complètement résolu dans [8] et [9].
2. On doit déterminer le nombre $n_e(P)$ et ce problème est traité soit dans un contexte purement mathématique [3], soit de manière peu satisfaisante.

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à la détermination du nombre $n_e(P)$ à l'aide de l'algorithme de Schur-Cohn et nous en avons donné une nouvelle version qui permet d'obtenir $n_e(P)$ pour *tout* polynôme. Nous montrons que l'algorithme ainsi obtenu, qui est en fait une extension de celui de Schur-Cohn, permet d'associer à *tout* polynôme P une suite de n coefficients complexes k_i, $1 \leq i \leq n$, et que le nombre $n_e(P)$ est égal au nombre des k_i de module supérieur à 1. L'algorithme obtenu est ensuite transposé à l'étude de la position des racines d'un polynôme par rapport à l'axe imaginaire.

2. RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Si un polynôme P de degré n et à coefficients complexes c_i est mis sous la forme

$$P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n , \tag{2-1}$$

son polynôme réciproque est défini par

$$\tilde{P}(z) = z^n \bar{P}(z^{-1}) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 z^1 + \ldots + \bar{c}_n z^n , \tag{2-2}$$

où $\bar{c}_j$ dénote le complexe conjugué de c_j. A tout polynôme P on peut également associer le nombre

$$k = -P(0)/\tilde{P}(0) = -c_n/\bar{c}_0 \qquad (2\text{-}3)$$

et le polynôme *unique* Q défini par

$$z^d Q = P + k\tilde{P}, \quad d \geq 1, \quad Q(0) \neq 0 \text{ ou } Q = 0. \qquad (2\text{-}4)$$

Dans la suite, on désigne le degré d'un polynôme R par d°(R) et on pose, par convention, d°(0) = $-\infty$. Il est alors facile de vérifier les équivalences suivantes :

$$\mathrm{d}°(P) = \mathrm{d}°(\tilde{P}) \quad \textbf{ssi} \quad P(0) \neq 0 \quad \textbf{ssi} \quad k \neq 0\,; \qquad (2\text{-}5)$$

$$\mathrm{d}°(Q) = \mathrm{d}°(P) - 1 \quad \textbf{ssi} \quad |P(0)| \neq |\tilde{P}(0)| \quad \textbf{ssi} \quad |k| \neq 1. \qquad (2\text{-}6)$$

Définition Le polynôme P est dit *singulier* si $|k| = 1$ et *régulier* sinon ; un polynôme P tel que $Q = 0$ est un polynôme singulier particulier appelé polynôme *auto-réciproque* (a.r).

Dans cette section nous allons établir deux propriétés fondamentales qui relient la position des racines par rapport au CU du polynôme P à celle des racines de Q par l'intermédiaire du coefficient k apparaissant dans (2-4). La Propriété 1 est relative aux polynômes réguliers et la Propriété 2 aux polynômes singuliers. Pour ce faire, nous désignons par $n_e(R)$, $n_i(R)$ et $n_c(R)$ les nombres de racines de R, tenant compte des multiplicités, apparaissant respectivement à l'extérieur, à l'intérieur et sur le CU.

Propriété 1 *(Polynôme* ***régulier****)* Si Q et d sont définis par (2-4) à partir d'un polynôme *régulier* P, alors d°(Q) = d°(P) − 1, d = 1 et l'on a

$$n_c(P) = n_c(Q) \qquad (2\text{-}7)$$
$$n_e(P) = n_e(Q) \quad \text{si} \quad |k| < 1 \qquad (2\text{-}8)$$
$$n_e(P) = n_e(\tilde{Q}) + 1 \quad \text{si} \quad |k| > 1. \qquad (2\text{-}9)$$

Preuve. Comme P est régulier, on a $|k| \neq 1$ et (2-6) donne d°(Q) = d°(P)- 1 et d = 1. Pour établir (2-7), désignons par α une racine de P appartenant au CU et ayant une multiplicité m, ce que l'on désigne par racine(m). Tenant compte de (2-2), $\tilde{P}$ admet $1/\bar{\alpha}$ comme racine(m). Or $1/\bar{\alpha} = \alpha$ et donc α est aussi racine(m) de $\tilde{P}$. Par suite, α est racine(m) de P et $\tilde{P}$ et donc racine(m') de Q avec $m' \geq m$. Soit U le facteur de P ayant pour racines toutes celles de P appartenant au CU. Il est clair que U est un polynôme a.r, qu'il est facteur commun à P, $\tilde{P}$ et Q et qu'il vérifie $n_c(U) = n_c(P)$. Comme d = 1, la relation (2-4) peut alors se mettre sous la forme

$$z\,Q = U\,z\,Q_0 = U\,(P_0 + k_0\tilde{P}_0) \qquad (2\text{-}10)$$

où $|k_0| = |k|$. Le polynôme Q_0 n'admet aucune racine sur le CU car pour une telle racine α on aurait $|P_0(\alpha)| = |k_0|\,|\tilde{P}_0(\alpha)|$ et ceci est impossible puisque $|k_0| \neq 1$ et $|P_0(\alpha)| = |\tilde{P}_0(\alpha)| \neq 0$. D'où $n_c(Q_0) = 0$. La définition de U donne donc $n_c(Q) = n_c(U) = n_c(P)$, i.e. (2-7).

<u>$|k| < 1$</u> Pour établir (2-8), nous distinguons les deux cas $n_c(P) = 0$ et $n_c(P) \neq 0$.

1. $n_c(P) = 0$. D'après la définition (2-2), on a

$$|P(z)| = |\tilde{P}(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = 1 \qquad (2\text{-}11)$$

et

$$|zQ(z) - P(z)| = |k|\,|P(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = 1 \qquad (2\text{-}12)$$

d'après (2-4). Comme le second membre de (2-12) reste non nul sur le CU et que $|k| < 1$, on obtient

$$0 < |zQ(z) - P(z)| < |P(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = 1. \qquad (2\text{-}13)$$

Le théorème de Rouché donne $n_i(zQ) = n_i(P)$ et, tenant compte des relations d°P = d°Q + 1 et (2-7), on obtient (2-8).

2. $n_c(P) \neq 0$. On peut factoriser P comme indiqué dans (2-10) et la simplification par le facteur U nous ramène au cas $n_c(P_0) = 0$ étudié ci-dessus.

<u>$|k| > 1$</u>. D'après (2-6), on a d = 1, d°Q = n − 1, $Q(0) \neq 0$ et la relation (2-4) peut donc s'écrire sous la forme

$$\tilde{Q}(z) = z^{n-1}\bar{Q}(z^{-1}) = \tilde{P}(z) + \bar{k}P(z) \qquad (2\text{-}14)$$

ou bien

$$h\,\tilde{Q}(z) = P(z) + h\,\tilde{P}(z). \qquad (2\text{-}15)$$

avec $|h| = |\bar{k}^{-1}| = |k|^{-1} < 1$. Le même raisonnement que ci-dessus nous conduit à $n_i(h\tilde{Q}) = n_i(\tilde{Q}) = n_i(P)$. On obtient finalement(2-9) à partir des relations d°P = d°Q + 1 et $n_c(\tilde{Q}) = n_c(P)$.

Propriété 2 *(Polynôme* ***singulier****)* Soit P un polynôme singulier et Q le polynôme défini par (2-4). Alors

$$n_e(P) = n_e(P') \quad \text{si} \quad Q = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

et

$$n_e(P) = n_e(\hat{P}) \quad \text{si} \quad Q \neq 0 \qquad (2\text{-}17)$$

où

$$\hat{P} = Q + (P/c + k\,c\,\tilde{P}), \quad c^2 < 1, \qquad (2\text{-}18)$$

est un polynôme *régulier* de même degré que P et P' la dérivée de P.

Preuve. Dans le cas (2-16), P est un polynôme a.r et on a donc {[3] Ch.10} $n_e(P) = n_e(P')$. Dans le cas (2-17), P est singulier, $Q = z^{-d}(P + k\tilde{P})$, $Q(0) \neq 0$ et il est toujours possible de choisir une constante réelle c telle que $\hat{P}(0) = Q(0) + (1/c - c)P(0) \neq 0$. Tenant compte de ces hypothèses, un calcul simple des coefficients extrêmes de $\hat{P}$ montre que ce dernier est régulier et que son polynôme réciproque est de degré n et peut se mettre sous la forme

$$\tilde{\hat{P}} = z^d(\tilde{P} + \bar{k}P) + (\tilde{P}/c + c\,\bar{k}P) = R + h\tilde{R} \qquad (2\text{-}19)$$

avec

$$R(z) = (z^d + 1/c)\,\tilde{P} \quad ; \quad h = c\,\bar{k}. \qquad (2\text{-}20)$$

Comme $|h| = |c\bar{k}| = |c| < 1$, le théorème de Rouché donne

$$n_i(\tilde{\hat{P}}) = n_i(R) = n_i\{(z^d + 1/c)\,\tilde{P}\} = n_i(\tilde{P}). \qquad (2\text{-}21)$$

Finalement, les conditions $P(0) \neq 0$ et $\hat{P}(0) \neq 0$ entraînent $n_i(\tilde{\hat{P}}) = n_e(\hat{P})$ et $n_i(\tilde{P}) = n_e(P)$ et donc (2-21) donne (2-17).

Remarque 1 Le polynôme $\hat{P}$ est la somme du polynôme Q de degré $n - 2d$ et du polynôme singulier$P/c + k c\tilde{P}$ de degré n. Comme pour tout α de module 1, on a

$$\hat{P}(\alpha) = (\alpha^{-d} + 1/c)P(\alpha) + k(\alpha^{-d} + c)\alpha^n \bar{P}(\bar{\alpha}). \quad (2\text{-}22)$$

il vient

$$n_c(P) = n_c(\hat{P}) \quad \text{pour} \quad |c| \neq 1 \quad (2\text{-}23)$$

Exemple 1 Soit

$$P(z) = z^2 + 2z - 1\ ;\ \tilde{P}(z) = 1 + 2z - z^2\ ;\ k = 1. \quad (2\text{-}24)$$

$$z^d Q = P(z) + k\tilde{P}(z) = 4z\,. \quad (2\text{-}25)$$

Donc $Q = 4$ et pour $c = 1/2$, le polynôme

$$\hat{P} = Q + (P/c + kc\tilde{P}) = 4 + 3/2z^2 + 5z - 3/2 \quad (2\text{-}26)$$

est régulier et vérifie

$$n_e(P) = n_e(\hat{P}) = 1 \quad \text{et} \quad n_c(P) = n_c(\hat{P}) = 0. \quad (2\text{-}27)$$

3. ALGORITHME DE SCHUR-COHN ÉTENDU

L'algorithme classique de Schur-Cohn [10] permet d'associer à un polynôme P une suite de coefficients ρ_j et une suite de polynômes S_j, $j = n, n-1, \ldots, 1$, construits à partir de $S_n = P$, à l'aide des récurrences

$$\rho_j = -S_j(0)/\tilde{S}_j(0)\ ;\ z\,S_{j-1}(z) = S_j(z) + \rho_j\tilde{S}_j(z). \quad (3\text{-}1)$$

Cet algorithme est valable pour les polynômes P tels que le polynôme S_{j-1} calculé à chaque étape est régulier. Pour de tels polynômes, le nombre $n_e(P)$ peut s'exprimer en fonction des rangs j des coefficients ρ_j tels que $|\rho_j| > 1$. Les polynômes pour lesquels la relation (3-1) ne permet pas de construire une suite complète de coefficients ρ_j sont traités par des méthodes qui ne sont pas toujours satisfaisantes [1]-[7].

Dans cette section, nous partons des méthodes proposées par Schur-Cohn [1]-[3] et nous introduisons des modifications qui conduisent à des résultats plus "simples" qui sont valables pour un polynôme donné *quelconque*. Nous obtenons alors l'algorithme suivant, dénommé algorithme de "Schur discret" (SD), qui permet d'associer à *tout* polynôme P de degré n, une suite de n coefficients k_j, $j = n, n-1, \ldots, 1$.

Algorithm SD

1. Condition initiale : $P_n = P$;
2. pour $j = n, n-1, \ldots$

$$k_j = -P_j(0)/\tilde{P}_j(0),\ z^dQ(z) = P_j(z) + k_j\tilde{P}_j(z),\ Q(0) \neq 0 \quad (3\text{-}2)$$

$$P_{j-1} = Q \quad \text{si } |k_j| < 1 \quad (3\text{-}3)$$

$$P_{j-1} = \tilde{Q} \quad \text{si } |k_j| > 1 \quad (3\text{-}4)$$

$$P_{j-1} = P_j' \quad \text{si } Q = 0 \quad (3\text{-}5)$$

$$P_j = \hat{P}_j \quad \text{si } |k_j| = 1 \text{ et } Q \neq 0. \quad (3\text{-}6)$$

L'algorithme SD permet donc d'associer à tout polynôme P un vecteur unique

$$\underline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T \quad (3\text{-}7)$$

dont la composante k_j est calculée à partir du polynôme P_j si ce dernier est régulier ou a.r et à partir de $\hat{P}_j$ sinon. Le nombre $n_e(P)$ est alors donné en fonction des composantes du vecteur $\underline{k}$ comme le précisent les deux propositions suivantes.

Remarque 2 Si tous les k_j sont de module inférieur à 1, on a $k_j = \rho_j$, l'algorithme SC se confond avec celui de Schur-Cohn et les k_j sont donc les coefficients de réflexion. Comme pour l'algorithme classique de Schur-Cohn [9], il est possible de donner une version de SD qui est plus adaptée au cas des polynômes à coefficients réels

Propriété 3 Si P_{j-1} se déduit de P_j à l'aide de l'algorithme SD, alors

$$n_e(P_j) = n_e(P_{j-1}) \quad \text{si} \quad |k_j| \leq 1 \quad (3\text{-}8)$$

et

$$n_e(P_j) = n_e(P_{j-1}) + 1 \quad \text{si} \quad |k_j| > 1. \quad (3\text{-}9)$$

Preuve. Envisageons les quatre cas qui apparaissent dans la construction de P_{j-1} à partir de P_j..

1. Dans le cas (3-6), on remplace P_j par le polynôme $\hat{P}$ défini par (2-18) et l'on a $n_e(P_j) = n_e(\hat{P})$ d'après (2-17).

2. Dans le cas (3-5), P_j vérifie $P_j + k_j\tilde{P}_j = 0$, i.e. $Q_j = 0$ et la relation (2-16) donne (3-8) puisque $P_{j-1} = P_j'$.

3. Dans les cas (3-3, 4), $P_{j-1} = Q$ si $|k_j| < 1$ et $P_{j-1} = \tilde{Q}$ si $|k_j| > 1$, où Q vérifie

$$z\,Q(z) = P_j(z) + k_j\tilde{P}_j(z). \quad (3\text{-}10)$$

L'application de la Propriété 1 donne immédiatement les résultats (3-8, 9).

Propriété 4 Pour tout polynôme P de degré n, on a

$$n_e(P) = c_e(\underline{k}) \quad (3\text{-}11)$$

Où $c_e(\underline{k})$ dénote le nombre de composantes de $\underline{k}$ de module supérieur à l'unité.

Preuve. Conséquence immédiate de la Propriété 3.

Exemple 2 Soit le polynôme singulier

$$\begin{aligned} P(z) &= (2z+1)(3z+1)(z+1) \\ &= 6z^3 + 41z^2 + 31z + 1,\ k = -1. \end{aligned} \quad (3\text{-}12)$$

On a

$$z^dQ = P(z) + k\tilde{P}(z) = 10z\,(z-1). \quad (3\text{-}13)$$

Donc $Q = 10(z-1)$ et pour c = 1/2 on obtient

$$\begin{aligned} \hat{P} &= Q + (P/c + k\,c\,\tilde{P}) \\ &= 9z^3 + 133/2z^2 + 103/2z - 1. \end{aligned} \quad (3\text{-}14)$$

On obtient en calculant les polynômes à un facteur scalaire près :

$k_3 = 1/9\ ,\ z^d Q = \hat{P}\,(z) + k_3\,\tilde{\hat{P}}(z) = 162z^3 + 1300z^3 + 1060z,$

$P_2\ = 162z^2 + 1300z + 1060\ ;$

$k_2 = -\ 530/81,\ \ z^d Q\ = P_2(z)\ + k_2 \tilde{P}_2(z)\ = z(611z + 650)\ ;$

$P_1\ = \tilde{Q}\ = 611 +\ 650z\ ,\ \ k_1 = -\ \ 611/650.$

La relation (3-11) donne $n_e(P) = c_e(1/9, -530/81, -611/650) = 1$, résultat que l'on peut vérifier directement sur la forme factorisée du polynôme (3-12).

4. TRANSPOSITION AU CAS CONTINU

A tout polynôme $p(s)$ de degré n et à coefficients complexes on peut associer le polynôme défini par

$$P(z) \triangleq \left(\frac{z-1}{2}\right)^n p\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \tag{4-1}$$

Un simple calcul montre que si $p(1) \neq 0$ les polynômes p et P sont de même degré et que

$$p(s) = (s-1)^n P\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \mathfrak{B}(P) \tag{4-2}$$

où $\mathfrak{B}$ est, par définition, la transformation homographique polynomiale. On peut vérifier que les polynômes construits à partir de P à l'aide de l'algorithme SD donné dans la Section 3 se transforment dans $\mathfrak{B}$ de la façon suivante :

$$p_j(s) \quad = \quad \mathfrak{B}[P_j], j = n, n-1, \ldots, 1, \tag{4-3}$$

$$\mathfrak{B}[\tilde{P}_j] \quad = \quad (-1)^j\,\bar{p}_j(-s) \tag{4-4}$$

$$\mathfrak{B}[P_j'] \quad = \quad jp_j + (1-s)p_j' \tag{4-5}$$

et

$$\mathfrak{B}(\hat{P}_j) \triangleq \overset{o}{p}_j = \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{-p} \{p_j(s) + k_j\,(-1)^j\,\bar{p}_j(-s)\} +$$

$$\{p_j\ /\ c\ + k_j\,c\,(-1)^j\,\bar{p}_j(-s)\}. \tag{4-6}$$

L'algorithme SD peut alors se transposer au cas continu et conduit à l'algorithme suivant, dénommé algorithme de Schur continu (SC), qui permet d'associer à tout polynôme $p(s)$ tel que $p(1) \neq 0$ une suite de coefficients k_j à partir desquels on peut déduire la position des racines de $p(s)$ par rapport à l'axe imaginaire.

Algorithm SC

1. Condition initiale : $p_n = p$.
2. Pour $j = n, n-1, \ldots$

$$k_j\ = (-1)^{j+1}\,p_j(-1)\,/\,\bar{p}_j(1)$$

$$q(s) = \Big(p_j(s) + k_j\,(-1)^j\,\bar{p}_j(-s)\Big)\,/\,(s-1)^d \tag{4-7}$$

$$p_{j-1}\ = q \qquad \text{si } |k_j| < 1 \tag{4-8}$$

$$p_{j-1}\ = \tilde{q} \qquad \text{si } |k_j| > 1 \tag{4-9}$$

$$p_{j-1}\ = jp_j + (1-s)p_j' \qquad \text{si } q = 0 \tag{4-10}$$

$$p_j\ = \overset{o}{p}_j \qquad \text{si } |k_j| = 1 \text{ et } q \neq 0. \tag{4-11}$$

Les propriétés de la transformation homographique définie par

$$s \to z = (s+1)\,/\,(s-1)\ ;\ z \to s = (z+1)\,/\,(z-1) \tag{4-12}$$

donnent immédiatement

$$n^-(p) = n_i(P),\ \ n^0(p) = n_c(P),\ \ n^+(p) = n_e(P) \tag{4-13}$$

où $n^-(p)$, $n^0(p)$ et $n^+(p)$ désignent respectivement les nombres de racines de p à parties réelles négative, nulle et positive.

Les résultats de la Section 3 se transposent au cas continu et l'on obtient, en particulier, la proposition suivante.

Propriété 5 L'algorithme SC permet d'associer à tout polynôme $p(s)$ de degré n à coefficients complexes et tel que $p(1) \neq 0$, un vecteur unique $\underline{k}$ et l'on a

$$n^+(p) = c_e(\underline{k}). \tag{4-14}$$

Remarque 3 L'algorithme SC peut être adapté au cas particulier important des polynômes à coefficients réels et conduit à un algorithme du type Routh-Hurwitz.

5. CONCLUSION

Une nouvelle version du test de Schur-Cohn a été présentée puis transposée au cas continu. Cette version tient compte de toutes les singularités apparaissant dans le test classique et conduit à une expression simplifiée du nombre de racines située à l'extérieur du cercle unité pour un polynôme donné *quelconque*.

RÉFÉRENCES

[1] J. Schur : "Über Potenzrichen, die im innern des Einsheitskreise beschraükt sind" (On series which are bounded in the unit circle), J. für die reine und angewandte Math, vol 147, n° 4, pp. 205-232, 1917

[2] A. Cohn , "Über die Anzahl der Wurzeln algebraischen Gleichung in einem Kreise", Math.2, pp. 110-148, 1922.

[3] M. Marden, "The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable", Amer. Math. Soc., New York, NY, 1949.

[4] E.I. Jury, "Theory and application of inners", Proc. IEEE, 63, pp. 1044-1069, 1975.

[5] P. Delsarte, Y.V. Genin, and Y. Kamp, " Pseudo-lossless functions whith application to the problem of locating the zeros of a polynomial", IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. CAS-32, pp. 373-381, April 1985.

[6] Y. Bistritz, "A circular stability test for general polynomials", Systems & Control Letters 7 (1986) 89-97.

[7] P.P. Vaidyanathan and S. K. Mitra, "A unified structural interpretation of some well-known stability-test procedures for linear systems" Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 4, pp. 478-497, April 1987.

[8] M. Benidir, B. Picinbono, "Extensions of the stability criterion for ARMA filters", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, pp. 425-431, April 1987.

[9] M. Benidir, B. Picinbono, "Comparison between some stability criteria for discrete-time filters", IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 36, No. 7, pp. 993-1001, July 1988.