



Un Algorithme d'élimination des termes d'interférences de la transformation de Wigner-Ville discrète

F. Auger - C. Doncarli

Laboratoire d'Automatique de Nantes. (ENSM / CNRS) 1, Rue de la Noë - 44072 Nantes Cedex 03
membres du GRECO CNRS traitement du signal et des images

RÉSUMÉ

Les qualités de l'analyse des signaux par transformation de Wigner-Ville (TWV) sont aujourd'hui bien reconnues. Cependant, malgré sa compatibilité avec les opérateurs classiques du traitement du signal, on rappelle qu'elle présente le grave inconvénient de n'être pas compatible avec la somme de signaux. On présente d'abord les méthodes classiques d'élimination des artéfacts apparaissant dans la TWV d'une somme, puis on en présente une nouvelle, inspirée des méthodes de traitement d'image. Deux exemples d'applications sont alors proposés.

SUMMARY

The qualities of signal analysis by the Wigner-Ville transform are nowadays well recognized. Meanwhile, we recall his incompatibility with the sum of signals, and where does the cross-terms come from. The classical methods of elimination of the cross terms are shown, and we propose then a new one, based on image processing.

1) Introduction

Parmi les différentes méthodes de représentation temps-fréquence des signaux, la transformée de Wigner-Ville (TWV) apparaît comme l'une des plus intéressantes pour caractériser un signal non stationnaire. Elle associe à ce dernier une fonction réelle des deux variables t et ω qui vérifie la majorité des conditions souhaitables pour le traitement du signal [1] :

$$W(f, f; t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

où $*$ représente le complexe conjugué, et $f(t)$ le signal étudié, ou son signal analytique, ce dernier étant nettement préférable.

Cependant, outre le fait qu'elle n'est pas partout positive, la TWV présente le grave inconvénient de n'être pas compatible avec la somme des signaux, et de présenter alors des termes supplémentaires dits termes d'interférences, dus à la nature même de représentation bilinéaire quadratique de la TWV. C'est d'ailleurs pour cela qu'on préfère traiter les signaux analytiques, car on supprime ainsi les interférences dues aux symétries par rapport à l'axe $\omega = 0$.

$$\text{Si } f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t),$$

$$\text{alors } W(f, f; t, \omega) = \sum_{i=1}^n W(f_i, f_i; t, \omega) + \sum_{\substack{(i,j)=1 \\ j \neq i}}^n W(f_i, f_j; t, \omega)$$

$$\text{avec } W(f_i, f_j; t, \omega) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f_j^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \text{ le terme}$$

d'interférences dû aux composantes i et j du signal, localisé aux points équidistants des zones d'informations de chaque composante, comme le montre l'expression suivante [2] :

$$\|W(f_i, f_j; t, \omega)\|^2 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W\left(f_i, f_i; t + \frac{\tau}{2}, \omega + \frac{\Omega}{2}\right) W^*\left(f_j, f_j; t - \frac{\tau}{2}, \omega - \frac{\Omega}{2}\right) d\tau \frac{d\Omega}{2\pi}$$

Pour réduire leur influence, on peut construire une représentation modifiée sous la forme d'une double convolution en temps et en fréquence de la TWV et d'un noyau de lissage. On obtient alors la formulation la plus générale de la classe des représentations bilinéaires de Cohen [3] :



$$T(f, f; t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u-t, \Omega-\omega) \cdot W(f, f; u, \Omega) du \frac{d\Omega}{2\pi}$$

On présente tout d'abord une revue des noyaux de lissage classiques (§2), puis on propose un nouvel algorithme utilisant une approche du type traitement d'image (§3). Les résultats obtenus par cette méthode sur des signaux tests sont ensuite exposés (§4) et on livre enfin quelques conclusions.

2) Lissage de la TWV

Le choix du noyau de lissage $\Phi(t, \omega)$ conduit à envisager différentes méthodes [4] que l'on rappelle rapidement :

Lissage à un degré de liberté :

Le noyau est issu d'une seule fonction $h(t)$, qui lie alors les résolutions temporelles et spectrales de manière intrinsèque.

C'est le cas du spectrogramme :

$$S(f; t, \omega) = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot h^*(u-t) \cdot e^{-j\omega u} du \right\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(h, h; u-t, \Omega-\omega) \cdot W(f, f; u, \Omega) du \frac{d\Omega}{2\pi}$$

La TWV de la fenêtre joue dans ce cas le rôle du noyau de lissage.

Lissage à deux degrés de liberté, à noyau séparable :

Ce choix revient à opérer deux lissages successifs parallèles aux axes, ce qui n'est pas optimal lorsque les directions d'interférences sont quelconques. C'est le cas de la distribution pseudo Wigner-Ville :

PWV(f, f; t, \omega)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot h\left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-t) \cdot W(h, h; 0, \omega - \Omega) \cdot W(f, f; u, \Omega) du \frac{d\Omega}{2\pi}$$

Et de manière générale de toutes les représentations du type:

$$T(f, f; t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u-t) \cdot H(\Omega - \omega) \cdot W(f, f; u, \Omega) du \frac{d\Omega}{2\pi}$$

Les propriétés de ces représentations pseudo Wigner-Ville lissées, dont les résolutions temporelles et spectrales sont indépendantes, sont étudiés dans [5].

Lissage à deux degrés de liberté, à noyau non séparable :

Ceci correspond à la forme la plus générale du noyau bidimensionnel dont l'utilisateur fixera la structure et les paramètres.

Citons par exemple la double gaussienne étudiée dans [6], dont les paramètres (σ, b) sont ajustés pour obtenir des courbes de niveau elliptiques de directions optimales.

$$\Phi(t, \omega) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_t \cdot \sigma_\omega} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{\sigma_t^2} + \frac{(\omega - b \cdot t)^2}{\sigma_\omega^2} \right]}$$

$$\text{avec } \sigma_t \cdot \sigma_\omega = \frac{1}{2}$$

Le choix d'un noyau, et donc d'une transformation dans le groupe de Cohen, est généralement effectué en fonction du résultat sur un signal donné, ou pour un type de non-stationnarité fixé. De plus, la plupart des noyaux induisent un biais sur la pulsation instantanée et ne garantissent pas la positivité.

3) Algorithme proposé

Pour des applications expérimentales plus générales, on souhaite disposer d'un opérateur de lissage assurant la positivité tout en ne privilégiant aucune direction particulière du plan, et permettant une lecture aisée du relief. L'existence d'un tel opérateur permettrait alors d'envisager l'utilisation de la TWV dans des procédés ne faisant pas intervenir la perception visuelle de l'utilisateur.

On propose pour cela un opérateur de lissage n'ayant pas la structure de double convolution, et opérant directement sur la transformée de Wigner-Ville discrète [7]. Le principe de construction est le suivant :

$$\text{A partir de la matrice } W(k, m) = W(f, f; kT_e, \frac{2\pi m}{NT_e}),$$

on construit une représentation plane binarisée *ie* une image en noir et blanc, où les points noirs représentent les valeurs positives de la matrice. Dans cette image, on détecte les taches (les zones noires entièrement entourées de blanc). Puis on calcule leur surface, en nombre de pixels, et on fait un tri des taches dans l'ordre des surfaces décroissantes. On reconstruit alors une nouvelle image en ne conservant que les taches de surface supérieure à un seuil relatif. On obtient enfin un nouveau relief lissé, en supprimant du relief d'origine les termes d'interférences détectés par la méthode ainsi que les parties négatives.

Cette méthode s'appuie sur l'observation des images obtenues par la transformée de Wigner-Ville discrète. On constate en effet que les termes d'interférences sont de nature très oscillante (comme on peut le voir en prenant la TWV discrète de la somme de deux sinusoides) alors que les zones d'informations (de localisation de la fréquence instantanée d'une composante du signal) restent assez régulières et positives. Les interférences sont donc représentés sur l'image par des petites taches séparées les unes des autres par des zones blanches qui correspondent aux parties négatives des oscillations. En prenant les taches noires de plus grande surface, on peut espérer que la méthode supprime celles dues aux interférences.

En outre, une étude sur une large classe de signaux de type de non stationnarité différents fait apparaître que l'on peut conserver la même valeur du seuil relatif dans la plupart des cas. Etant donné la méthode, il est prévisible que les cas d'échecs se produisent lorsqu'une zone est à la fois une zone d'information et une zone d'interférences. Enfin, le caractère heuristique de la méthode ne permettant évidemment pas d'en étudier les performances de manière théorique, on propose maintenant deux exemples permettant d'apprécier les résultats.

4) Résultats expérimentaux.

On a appliqué cette méthode sur un signal identique à celui présenté dans [8]. On rappelle que la structure du signal comporte deux composantes symétriques de pulsation instantanée

$$\phi(t) = 2\pi \left[\frac{1}{4T_e} \pm \alpha \frac{t}{T_e} \sqrt{1 - \frac{t}{NT_e}} \right]$$

avec $\alpha \approx \frac{3\sqrt{3}}{8} T_e$, T_e la période d'échantillonnage et $N=128$ le nombre de points du signal. On trouvera figure 1 de haut en bas la partie réelle et imaginaire du signal, la partie réelle et imaginaire de sa transformée de Fourier, le module de la transformée de Fourier $\|F(\omega)\|$, l'enveloppe du signal

$v(t) = \|f(t)\|$ et sa phase non déroulée $\varphi(t) = \arctg(f(t))$. La

figure 2 est l'image en noir et blanc de la TWV non lissée, et la figure 3 le résultat de l'opérateur de lissage proposé. L'image obtenue après application de l'algorithme ne contient plus que les zones d'informations, en conservant le seuil relatif choisi lors de l'étude précédente, et sans disposer de connaissances a priori sur le signal. Le relief lissé est présenté fig 4.

La deuxième application consiste à détecter des diracs s'ajoutant à un chirp de pente faible. La structure du signal est de la forme :

$$f(t) = v(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha t^2) + \sum_{k=1}^m A \cdot \delta(t - t_k)$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{8\pi}{NT_e}, \quad \alpha = \frac{14}{N^2 \cdot T_e^2}, \quad v(t) = \frac{1}{2} + \frac{|NT_e - 2t|}{NT_e},$$

$$A = 3.0, \quad m = 3$$

Le système étant non stationnaire, les diracs ne sont pas aisément localisables. Les figures 5,6,7 sont identiques aux précédentes pour ce second signal. On constate que le résultat obtenu après lissage offre plus de fiabilité que par simple seuillage de l'enveloppe du signal.

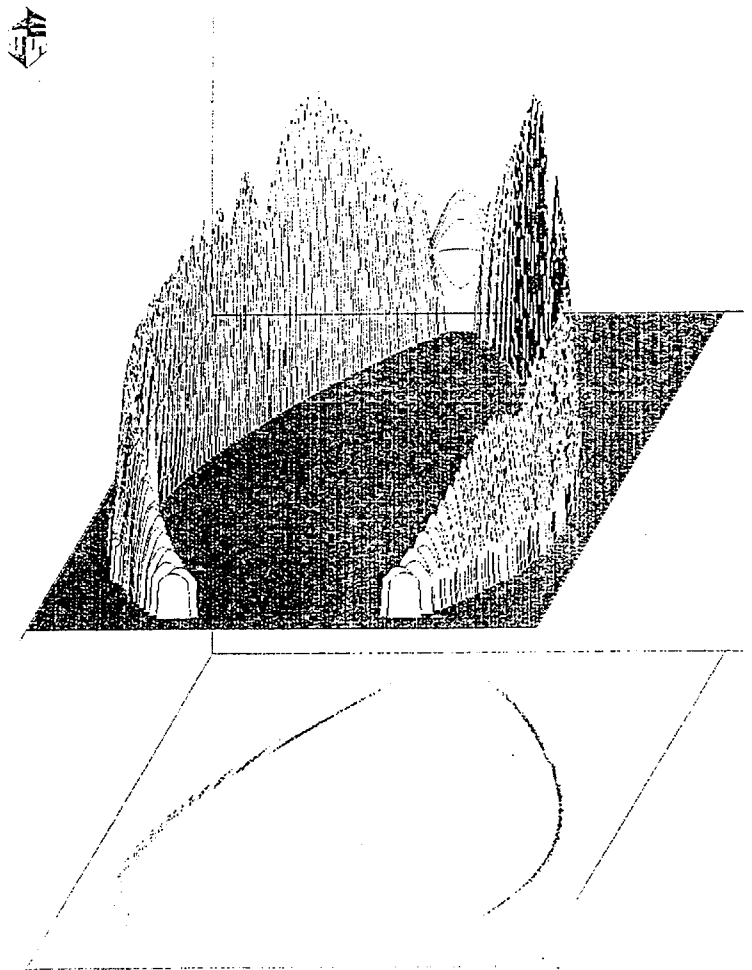
Sans dissimuler le caractère heuristique de la méthode proposée, issue du traitement d'image, force est de constater malgré tout sa rapidité d'exécution et sa généralité par rapport aux techniques de double convolution. L'ordre de l'algorithme est en effet proportionnel à $2 \cdot N^2$ au lieu de N^4 pour une convolution 2D discrète, N étant le nombre de points du signal. Toutefois on rappelle que les cas de superposition d'une zone d'information avec un motif d'interférences constituent des cas d'échec pour la méthode proposée. Enfin, une extension de cette méthode à la transformée pseudo Wigner-Ville discrète est envisagée.

Références :

- [1] : T.A.C.M Claasen & W.F.G Mecklenbrauker : The Wigner distribution: A tool for time-frequency signal analysis.
Part 1 : continuous time signals . Philips Journal of research, Vol 35, No 3, 1980, p 217-250.
Part 2 : Discrete time signals. Philips Journal of research, Vol 35, No 4-5, 1980, p 276-300.
Part 3 : Relations with other time frequency signal analysis. Philips Journal of research, Vol 35, No 6, 1980, p 372-389.
- [2] : P. Flandrin : Représentation temps-fréquence des signaux non-stationnaires. Thèse de doctorat d'état, INPG, Grenoble, 1987.
- [3] : L. Cohen : Distributions in signal theory. IEEE - ICASSP 1984, 41.B.1.1-4.
- [4] : P. Flandrin & B. Escudé : Principe et mise en oeuvre de l'analyse temps fréquence par transformation de Wigner-ville. Traitement du signal, Vol 2, No 2, 1985, p 143-151.
- [5] : B. Vidalié & P. Flandrin : Comparaison théorique de deux méthodes temps-fréquence et temps-échelle obtenues par lissage de la distribution de Wigner-Ville. Rapport ICPI TS 88-10, Décembre 1988.
- [6] : Jc. Andrieux, M.R. Feix et al : Optimum smoothing of the Wigner Distribution. IEEE-ASSP, Vol 35, No 6, June 1987, p 764-769.
- [7] : F Peyrin & R. Prost : A unified definition of the discrete time, discrete frequency, discrete time-frequency

Wigner distribution. IEEE-ASSP, Vol 34, No 4, August 1986, p 858-867.
[8] : P. Flandrin : Some features of time-frequency representations of multi components signals. IEEE-ICASSP 1984, 41.B.4.1-4.

Figure 4 :



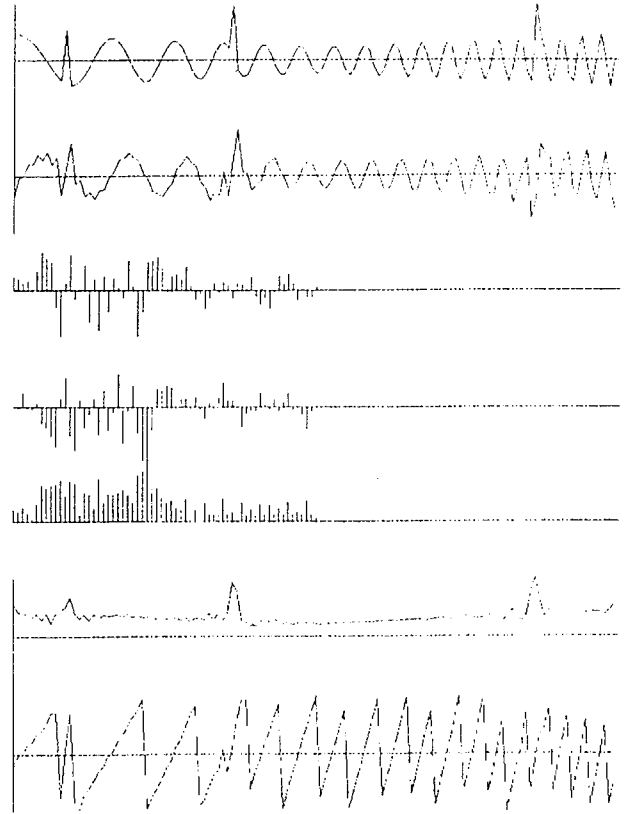
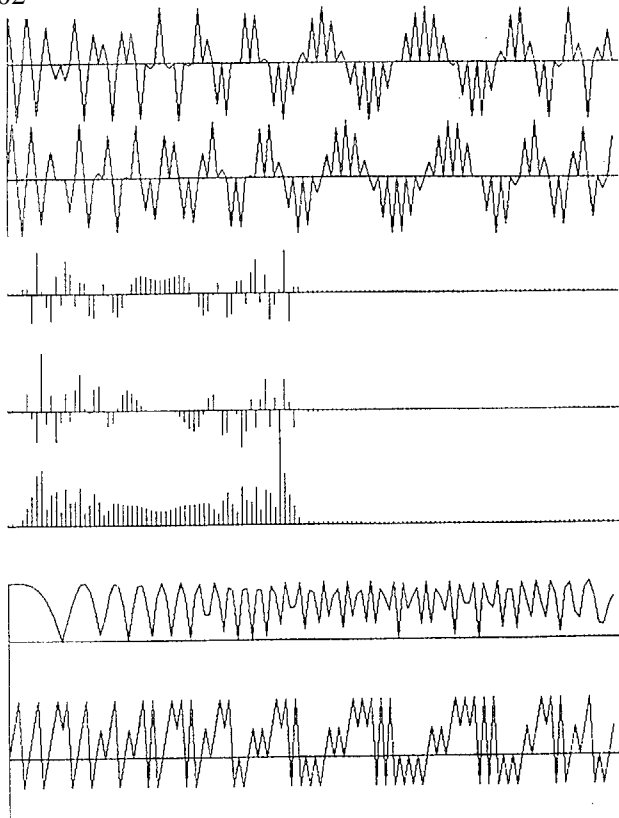


Figure 2 :

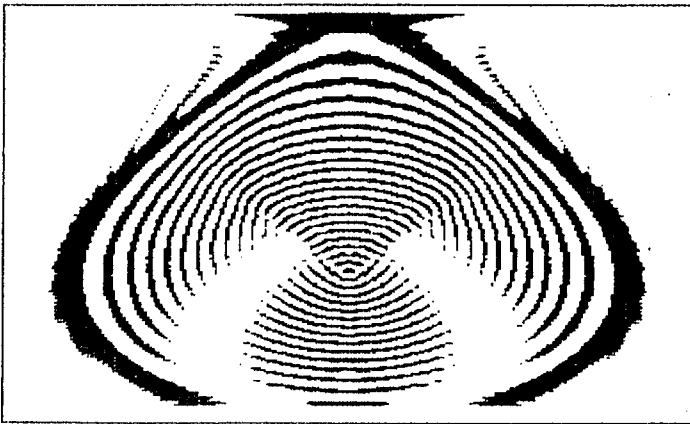


Figure 6 :

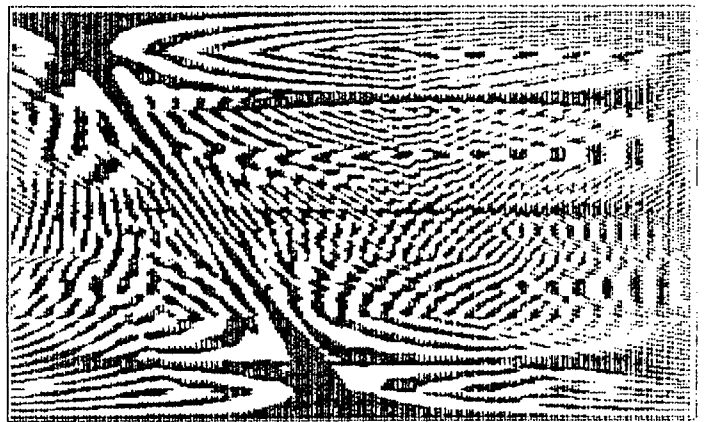


Figure 3 :

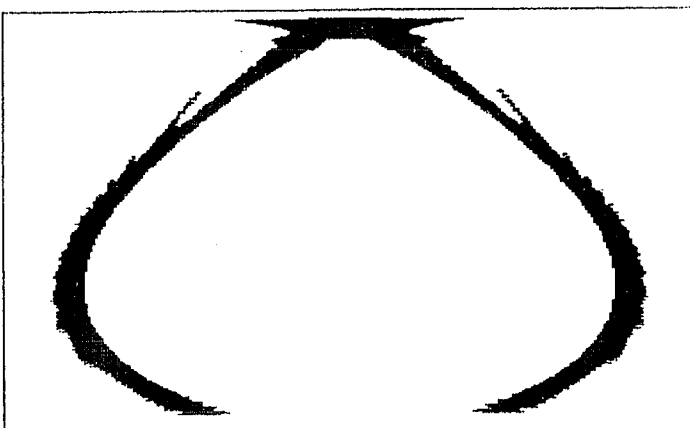


Figure 7 :

