ESTIMATION NON LINÉAIRE DE L'AMPLITUDE D'UN SIGNAL

Bernard PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes

École Supérieure d'Électricité
Plateau du Moulon
91190 Gif sur Yvette

RÉSUMÉ

Le problème de l'estimation de l'amplitude d'un signal apparaît dans de nombreuses questions de traitement du signal comme, par exemple, la modulation d'amplitude en communications. Le calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui est en général une fonction non linéaire de l'observation, est souvent impossible par manque de connaissance de la densité de probabilité du bruit. On se contente alors souvent d'un estimateur linéaire à biais nul et variance minimum dont le calcul ne nécessite que la connaissance de la matrice de covariance du bruit. Le but de cet article consiste à montrer que la recherche d'estimateurs non linéaires à biais nul et variance minimum peut également se faire quand on connaît des moments d'ordre supérieur du bruit. Mettant l'estimateur optimal sous forme de filtre de Volterra d'ordre ν, on établit les équations permettant de déterminer le filtre. Ces équations sont résolues dans quelques cas particuliers montrant l'intérêt de la méthode.

ABSTRACT

The problem of estimating the amplitude of a signal appears in many aspects of signal processing such as, for example, amplitude modulation in communication theory. The calculation of the maximum likelihood estimator is often impossible because of lack of knowledge concerning the probability distribution of the noise. It is sometimes sufficient to use a linear estimator without bias and with minimum variance. Its calculation needs only knowledge of the correlation matrix of the noise. In this paper we want to show that it is possible to use a non linear estimator without bias and with minimum variance as soon as some higher order moments of the noise are known. Using the structure of a Volterra filter we give the equations allowing the determination of the optimum filter. These equations are solved in some particular cases in order to show the interest of the method.

1. INTRODUCTION

Depuis de nombreuses années on a ressenti le besoin de s'affranchir des méthodes linéaires et des modèles gaussiens pour aborder les problèmes de traitement du signal. Plus récemment on s'est beaucoup intéressé à l'usage des moments d'ordre supérieur à deux et de nombreux articles, qu'il serait fastidieux de citer, ont abordé des problèmes classiques à l'aide de ces moments. Ceci s'est manifesté par exemple en analyse spectrale, où le concept de bispectre commence à devenir populaire, mais aussi dans des problèmes d'identification ou de déconvolution. Enfin l'usage de système linéaires-quadratiques, ou même d'ordre plus élevé, commence à être entrevu dans des problèmes de détection, d'estimation ou de traitement spatial du signal. Le but de cette communication consiste à indiquer l'intérêt de telles méthodes dans le problème plus particulier de l'estimation de l'amplitude d'un signal. Celui-ci se rencontre dans de nombreuses applications telles par exemple que les communications avec modulation d'amplitude. Nous commencerons par rappeler les solutions classiques [1] avant d'aborder la présentation d'une méthode fondée sur l'usage de moments d'ordre supérieur.

2. ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Considérons le modèle de base décrit par l'équation

$$\boldsymbol{x} = a\,\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} \qquad (2.1)$$

où a est l'amplitude inconnue d'un signal déterministe $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{b}$ un bruit perturbateur. Le problème consiste à déterminer l'amplitude inconnue a à partir de l'observation $\boldsymbol{x}$. Dans toute la suite $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et de plus $\boldsymbol{b}$ est aléatoire et centré. Il en résulte que $\boldsymbol{x}$ est aléatoire et de moyenne inconnue $a\,\boldsymbol{s}$.

Lorsque les propriétés statistiques de $\boldsymbol{b}$ sont entièrement connues, on peut appliquer la méthode du *maximum de vraisemblance*. On obtient ainsi un estimateur $a_{\text{mv}}(\boldsymbol{x})$ qui est en général une fonction non linéaire de l'observation. Ainsi, bien que le modèle posé au départ soit linéaire, il n'y a aucune raison pour que les estimateurs de a à partir de l'observation $\boldsymbol{x}$ soient aussi linéaires.

Lorsque seuls les moments du second ordre sont connus on peut supposer une structure linéaire à l'estimateur, soit

$$a_{\text{L}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}^{\text{T}}\boldsymbol{x} \qquad (2.2)$$

et déterminer le vecteur $\boldsymbol{h}$ donnant un estimateur sans biais et à variance minimale. La solution trouvée s'écrit alors

$$a_L(x) = (s^T R^{-1} s)^{-1}\, s^T R^{-1} x \qquad (2.3)$$

où R est la matrice de covariance du bruit, soit $R = \mathrm{E}\,[\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T]$. Le dernier terme de (2.3) a la forme du filtre adapté, bien connu en détection[2].

Comme l'estimateur optimal, par exemple sans biais et à variance minimale, n'a aucune raison d'être linéaire en $\boldsymbol{x}$, on peut compliquer la forme (2.2) en y ajoutant un terme quadratique. Plus précisément la forme générale de l'estimateur linéaire-quadratique (LQ) s'écrit

$$a_{LQ}(\boldsymbol{x}) = c + \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{x} \qquad (2.4)$$

où c, $\boldsymbol{h}$ et M sont respectivement une constante, un vecteur de $\mathbb{R}^N$ et une matrice carrée symétrique $N \times N$. Le problème consiste à déterminer ces trois quantités de sorte que $a_{LQ}(\boldsymbol{x})$ soit un estimateur sans biais et à variance minimum. On voit aisément qu'en raison du terme quadratique le calcul de la variance requiert la connaissance des moments du quatrième ordre de $\boldsymbol{x}$.

Il est clair que (2.4) apparaît comme le début d'un développement qui peut être poursuivi. Ce développement introduit en fait une structure de type Volterra, et si on le poursuit jusqu'à l'ordre ν on obtient un filtre de Volterra d'ordre ν. L'écriture explicite d'un tel développement sous la forme (2.4) est assez complexe, mais peut se simplifier en notant que $a_{LQ}(\boldsymbol{x})$ est une fonction non linéaire de l'observation mais linéaire par rapport aux paramètres c, $\boldsymbol{h}$ et M. Cette remarque s'étend à l'ordre ν et l'estimateur correspondant peut être écrit sous la forme

$$a_\nu(\boldsymbol{x}) = c + \langle h \mid X \rangle \qquad (2.5)$$

où le vecteur généralisé $|h\rangle$ contient tous les paramètres du filtre alors que le vecteur $|X\rangle$ contient des termes faisant intervenir des produits de composantes de $\boldsymbol{x}$, ces produits ne pouvant dépasser ν termes. Ainsi dans (2.4) les termes de degré le plus élevé sont du type $x_i x_j$. Il en résulte que la variance de $a_\nu(\boldsymbol{x})$ s'exprime à l'aide de moments jusqu'à l'ordre 2ν des composantes du vecteur observation.

3. SOLUTION DU PROBLÈME

La sortie d'un filtre de Volterra d'ordre ν dont l'entrée est le vecteur $\boldsymbol{x}$ peut être écrite $y(\boldsymbol{x}) = c + \langle h \mid X \rangle$, comme en (2.5). Pour $\nu = 2$ on obtient une forme telle que (2.4) qui est une somme de 3 termes. En général la sortie se présente comme une somme de $\nu + 1$ termes. Le terme non constant d'ordre q ($1 \le q \le \nu$) est lui aussi une somme de termes du type

$$t[i_1, i_2, \ldots, i_q] = h[i_1, i_2, \ldots, i_q]\, x[i_1]\, x[i_2] \ldots x[i_q] \qquad (3.1)$$

où les indices i_j sont des entiers compris entre 1 et N. Pour $q = 2$, on retrouve le terme général du développement de $\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{x}$. L'espace contenant tous les vecteurs $|h\rangle$ est dénommé $\mathbb{R}^N(\nu)$, et il est clair que $\mathbb{R}^N(1) = \mathbb{R}^N$.

On peut appliquer aux vecteurs $|X\rangle$ toutes les méthodes applicables aux vecteurs ordinaires de $\mathbb{R}^N$. En particulier un opérateur linéaire K transforme un vecteur $|h\rangle$ en un autre $|g\rangle$. De même le concept d'opérateur inverse, symétrique, défini non négatif s'étend sans peine. Enfin, le produit scalaire $\langle f \mid g \rangle$ de deux vecteurs se définit sans difficulté par une extension directe de ce qui se passe dans $\mathbb{R}^N$. Ainsi dans le cas linéaire-quadratique le produit scalaire de $|\boldsymbol{h}, M\rangle$ par $|\boldsymbol{h}', M'\rangle$ s'écrit

$$\langle \boldsymbol{h}, M \mid \boldsymbol{h}', M' \rangle = \sum h_i h'_i + \sum M_{ij} M'_{ij} \qquad (3.2)$$

Ce produit scalaire permet de définir des opérateurs de rang 1, ou dyadiques, du type $K = |h\rangle\langle h|$, qui sont évidemment symétriques et définis non négatifs.

De même on peut appliquer au vecteur $|X\rangle$ toutes les méthodes valables pour les *vecteurs aléatoires* de $\mathbb{R}^N$. Lorsque $\boldsymbol{x}$ est aléatoire, le vecteur $|X\rangle$ l'est aussi et il contient des termes du type $x[i_1]x[i_2]\ldots x[i_q]$. On peut alors définir sa moyenne et son opérateur de covariance par

$$|m\rangle = \mathrm{E}[|X\rangle] \; ; \; K = \mathrm{E}[|X\rangle\langle X|] - |m\rangle\langle m| \qquad (3.3)$$

L'opérateur K est symétrique et défini non négatif. Nous admettrons dans toute la suite qu'il n'a aucune valeur propre nulle, c'est à dire qu'il est défini positif. Il convient de rappeler que la connaissance de K nécessite celle des moments du vecteur $\boldsymbol{x}$ jusqu'à l'ordre 2ν.

Pour déterminer l'estimateur optimal $a_\nu(\boldsymbol{x})$ il faut calculer la moyenne et la variance de la sortie d'un filtre de Volterra d'ordre ν écrite sous la forme $y(\boldsymbol{x}) = c + \langle h \mid X \rangle$. La moyenne s'écrit

$$\mathrm{E}(y) = c + \langle h | m \rangle \qquad (3.4)$$

où $|m\rangle$ est le vecteur $\mathrm{E}\,[|X\rangle]$. Partant de la structure apparaissant dans (2.1), la moyenne $|m\rangle$ peut se mettre sous la forme

$$|m\rangle = |m_0\rangle + a|m_1\rangle + a^2|m_2\rangle + \ldots + a^\nu|m_\nu\rangle \qquad (3.5)$$

Le vecteur $|m_0\rangle$ ne dépend que des moments jusqu'à l'ordre ν de $\boldsymbol{b}$, comme on le voit en faisant $a = 0$. Par contre, les autres vecteurs $|m_i\rangle$ dépendent en général du signal et du bruit, à cause des termes d'interférences non linéaires. Pour fixer les idées examinons le cas particulier où $\nu = 2$, qui correspond aux systèmes linéaires-quadratiques du type (2.4). Comme le vecteur $|X\rangle$ peut s'écrire $|x_i, x_i x_j\rangle$, on déduit de (2.1) que

$$|m_0\rangle = |0, \gamma_{ij}\rangle \; ; \; |m_1\rangle = |s_i, 0\rangle \; ; \; |m_2\rangle = |0, s_i s_j\rangle \qquad (3.6)$$

où $\gamma_{ij} = \mathrm{E}\,(b_i b_j)$. Le vecteur $|m_1\rangle$ ne dépend pas du bruit parce que la moyenne des termes du type $s_i b_j$ est nulle, le bruit étant centré.

Un estimateur est *sans biais* si $\mathrm{E}(y) = a$, quelle que soit la valeur de a. Ceci impose au vecteur $|h\rangle$ de satisfaire les conditions

$$\langle h | m_1 \rangle = 1 \qquad (3.7)$$

$$<h|m_i> = 0,\ 2 \le i \le \nu \qquad (3.8)$$

et la constante c doit être telle que

$$c = -<h|m_0> \qquad (3.9)$$

Les relations (3.8) signifient que $|h>$ appartient au sous-espace S orthogonal aux vecteurs $|m_i>$, $2 \le i \le \nu$. En conséquence il faut chercher le vecteur de S satisfaisant (3.7) et rendant minimum la variance de y.

En raison des termes d'interférence, cette variance dépend de a que l'on cherche à estimer. On calculera donc cette variance pour $a = 0$, c'est à dire en absence de signal. Cette méthode est exactement celle utilisée en détection lorsqu'on introduit le critère de déflexion [3]. Il est clair que cette situation est une conséquence du caractère non linéaire de l'estimateur car pour $\nu = 1$, c'est-à-dire pour (2.2), la variance est indépendante du signal. Dans ces conditions, la variance de y peut s'écrire

$$V(y) = <h|\,K\,|\,h> \qquad (3.10)$$

où K est l'opérateur covariance défini par (3.3) dans lequel $|m>$ est remplacée par $|m_0>$, moyenne de $|X>$ quand $a = 0$.

En conclusion l'estimateur sans biais et à variance minimale recherché est caractérisé par le vecteur $|h>$ élément de S, satisfaisant (3.7) et rendant minimum (3.10).

4. CALCUL DE L'ESTIMATEUR OPTIMAL

Nous allons donner le principe du calcul de la solution, le calcul détaillé devant paraître sous une autre forme [4]. Il s'agit donc de trouver le vecteur $|h>$ élément de S, tel que $<h\,|m_1> = 1$ et rendant minimum $<h|K|h>$, où K est un opérateur symétrique défini positif. L'espace $\mathbb{R}^N(\nu)$ des vecteurs $|h>$ a été muni du produit scalaire standard, extension de (3.2) valable pour $\nu = 2$. Mais comme K est symétrique et défini positif, on peut introduire un autre produit scalaire de vecteurs de $\mathbb{R}^N(\nu)$ défini par

$$<u|\,v>_K = <u|\,K\,|\,v> \qquad (4.1)$$

Le sous-espace S défini par les équations (3.8) est maintenant défini par

$$<h|KK^{-1}|m_i> = <h|\,K\,|\,\mu_i> = 0 \qquad (4.2)$$

où $K|\mu_i> = m_i$. C'est donc le sous-espace K-orthogonal aux vecteurs $|\mu_i>$, $2 \le i \le \nu$. Appelons P_{SK} le projecteur K-orthogonal sur ce sous-espace. Il permet d'associer à tout vecteur $|a>$ de $\mathbb{R}^N(\nu)$ sa projection $P_{SK}|a> = |a_S>$ définie par le principe d'orthogonalité

$$|a> - |a_S> \perp S \qquad (4.3)$$

l'orthogonalité étant liée au produit scalaire (4.1). Par ailleurs la contrainte (3.7) peut s'écrire

$$<h|K\,K^{-1}|m_1> = 1 \qquad (4.4)$$

soit

$$<h|\,\mu_1>_K = 1 \ ,\quad |\mu_1> = K^{-1}|m_1>. \qquad (4.5)$$

Appliquant le théorème de projection au vecteur $|\mu_1>$, nous pouvons écrire

$$|\mu_1> = |\mu_{1S}> + |\,\mu_{1\perp S}> \qquad (4.6)$$

où $|\mu_{1S}>$ et $|\,\mu_{1\perp S}>$ sont orthogonaux et $|\mu_{1S}>$ est défini par (4.3). Comme le vecteur $|h>$ appartient à S, il satisfait

$$|h> = P_{SK}|h> \qquad (4.7)$$

et il résulte de (4.5) et (4.6) que la contrainte (3.7) devient

$$<h|\mu_{1S}>_K = 1 \qquad (4.8)$$

On peut alors appliquer l'inégalité de Schwarz qui donne

$$1 = |<h|\mu_{1S}>_K|^2 \le <h|h>_K\ <\mu_{1S}\,|\mu_{1S}>_K \qquad (4.9)$$

l'égalité étant atteinte pour $|h> = |\mu_{1S}>$.

Reprenant alors la définition de $<h|h>_K$ par (4.1) nous déduisons que

$$<h|K|h> \ge <\mu_{1S}|K|\,\mu_{1S}>^{-1}. \qquad (4.10)$$

Appliquant maintenant la condition (3.7), nous déduisons que le vecteur cherché peut s'écrire

$$|h_0> = <\mu_{1S}\,|K|\,\mu_{1S}>^{-1}\ |\mu_{1S}> \qquad (4.11)$$

et la valeur minimum de la variance de $<h|X>$ vaut

$$V_0 = <\mu_{1S}\,|K|\,\mu_{1S}>^{-1} \qquad (4.12)$$

En conclusion l'estimateur sans biais quel que soit a et à variance minimale pour $a = 0$ s'écrit

$$a_\nu(\boldsymbol{x}) = c + <\mu_{1S}\,|K|\,\mu_{1S}>^{-1}\ <\mu_{1S}\,|X> \qquad (4.13)$$

avec

$$|\mu_{1S}> = P_{SK}|\,\mu_1> \qquad (4.14)$$

$$|\,\mu_1> = K^{-1}\,|\,m_1> \qquad (4.15)$$

$$c = -<\mu_{1S}\,|K|\,\mu_{1S}>^{-1}\ <\mu_{1S}\,|m_0> \qquad (4.16)$$

5. EXEMPLES D'APPLICATION

5.1 Cas linéaire

Ceci correspond au filtrage de Volterra d'ordre 1, ou au filtrage linéaire. Comme $\mathbb{R}^N(1) = \mathbb{R}^N(\nu)$, les vecteurs $|h>$ peuvent être notés comme ceux de $\mathbb{R}^N$, soit $\boldsymbol{h}$. Par ailleurs on a

$$\boldsymbol{m} = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}) = a\boldsymbol{s} \qquad (5.1)$$

et les vecteurs $\boldsymbol{m}_0$ et $\boldsymbol{m}_1$ valent

$$\boldsymbol{m}_0 = \boldsymbol{0}\ ;\ \boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{s} \qquad (5.2)$$

Ce sont le seuls vecteurs à considérer dans le développement (3.5), puisque $\nu = 1$. On a donc d'après (4.5)

$$\mu_1 = R^{-1} s \qquad (5.3)$$

où R est la matrice de covariance apparaissant dans (2.3). Enfin, on note que d'après (4.16), $c = 0$ puisque que $\boldsymbol{m}_0 = 0$. Enfin comme tous les vecteurs $\boldsymbol{m}_i$ apparaissant dans (3.8) sont nuls, il en est de même pour les vecteurs μ_i de (4.2), et il en résulte que le sous-espace S est confondu avec $\mathbb{R}^N$. Combinant tout ceci on voit que pour $\nu = 1$, $a_\nu(x)$ donné par (4.13) est égal à l'estimateur linéaire $a_L(\boldsymbol{x})$ donné par (2.3).

5.2 Cas linéaire-quadratique

Ceci correspond à $\nu = 2$ et le développement (3.5) introduit maintenant 3 vecteurs $|m_0>$, $|m_1>$ et $|m_2>$. Ces vecteurs de $\mathbb{R}^N(2)$ peuvent être écrits comme dans (3.2) et se composent donc d'un vecteur de $\mathbb{R}^N$ et d'une matrice carrée symétrique N x N. Comme le vecteur $|X>$ s'écrit $|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T>$, on obtient immédiatement à partir de (3.5)

$$|m_0> = |0, R> \; ; \; |m_1> = |s, 0> \; ; \; |m_2> = |0, ss^T> \quad (5.4)$$

Il s'agit maintenant de déterminer le vecteur $|\mu_{1S}>$ définissant $|h_O>$ par (4.11). Comme le sous-espace S est simplement le sous-espace orthogonal à $|\mu_1>$, on peut appliquer le théorème de projection à $|\mu_1>$ sous la forme

$$|\mu_1> = \alpha\, |\mu_2> + \; |\mu_{1S}> \qquad (5.5)$$

où $|\mu_2>$ et $|\mu_{1S}>$ sont orthogonaux. Ceci détermine α par

$$\alpha = <\mu_1\, |K|\mu_2>/<\mu_2\, |K|\mu_2> \qquad (5.6)$$

En raison de la définition des $|\mu_i>$ à partir des $|m_i>$, ceci donne

$$\alpha = <m_1|\mu_2>/<m_2|\mu_2> \qquad (5.7)$$

La connaissance de α détermine donc $|\mu_{1S}>$ en fonction de $|\mu_1>$ et $|\mu_2>$. Le coefficient apparaissant dans (4.11) s'en déduit aisément et peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} d^2 &= <\mu_{1S}|K|\mu_{1S}> \\ &= <m_1|\mu_1> - <m_1|\mu_2>^2/<m_2|\mu_2> \end{aligned} \quad (5.8)$$

Enfin le coefficient c donné par (4.16) peut s'écrire

$$c = -\, d^2 <m_0\, |\, \mu_1> \qquad (5.9)$$

A l'aide de ces quantités l'estimateur optimal linéaire-quadratique prend la forme

$$a_{LQ}\,(\boldsymbol{x}) = d^{-2}\,[-\, <m_0\, |\mu_1> + <\mu_1|X> - \alpha <\mu_2|X>] \quad (5.10)$$

où d^2 est donné par (5.8) et a par (5.7). Enfin sa variance, minimum de (3.10), vaut

$$V_o = d^{-2} \qquad (5.11)$$

Les vecteurs $|\mu_i>$ correspondants dépendent de la structure de l'opérateur K défini par (3.3). Nous allons donc examiner quelques cas de tels opérateurs permettant d'achever le calcul.

a. Cas gaussien

Il est bien connu que les moments d'ordre quatre d'un vecteur aléatoire gaussien peuvent s'exprimer en fonction de ceux d'ordre deux. En particulier lorsque le vecteur est centré, tous les moments d'ordre impair sont nuls. Dans notre cas particulier se limitant à l'ordre 3 ceci entraîne que les équations déterminant le vecteur et la matrice de $|\mu_1>$ et $|\mu_2>$ sont découplés [5]. Utilisant alors (5.4) et la méthode détaillée dans [5] on obtient

$$|\mu_1> = |R^{-1}\boldsymbol{s}, 0> \qquad (5.12)$$

$$|\mu_2> = |0, (1/2)\, R^{-1}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T R^{-1}> \qquad (5.13)$$

On voit donc que $<m_1|\mu_2> = 0$, et donc il résulte de (5.7) que $\alpha = 0$. Ceci signifie que le vecteur $|h_o>$ est proportionnel $|\mu_1>$ et donc que l'estimateur $a_{LQ}(x)$ correspondant est simplement linéaire. On retrouve ainsi un fait bien connu, que dans le cas gaussien l'estimateur optimal est linéaire.

b. Bruit à moment d'ordre 3 nul

Si les moments du type $E(b_i\, b_j\, b_k)$ sont nuls, les équations déterminant les éléments de $|\mu_i>$ se découplent, et on a donc d'après (5.4)

$$|\mu_1> = |R^{-1}\boldsymbol{s}, 0> \; ; \; |\mu_2> = |0, M> \qquad (5.14)$$

où M dépend des moments du quatrième ordre de $\boldsymbol{b}$. Ceci entraîne qu'on a toujours $\alpha = 0$, et l'estimateur optimal est linéaire. On voit ainsi qu'une non linéarité dans un estimateur linéaire-quadratique ne peut apparaître que si les moments du troisième ordre ne sont pas nuls. Ceci est à rapprocher d'un résultat similaire obtenu dans [6].

c. Bruit blanc d'ordre 4

Ce modèle de bruit a été introduit en [5] et ne dépend que de 3 paramètres m_2, m_3 et m_4, moments d'ordre deux à quatre des composantes de $\boldsymbol{x}$. Le calcul détaillé dépasse le cadre réduit de cet exposé, mais met bien en évidence le rôle du moment m_3 dans la structure et les performances de l'estimateur optimal.

RÉFÉRENCES

[1] H.L. VAN TREES, Detection, estimation and modulation theory, New-York, Wiley, 1968.

[2] B. PICINBONO, Éléments de théorie du signal, Paris, Dunod, 1977.

[3] B. PICINBONO and P. DUVAUT, "Detection and contrast" in Stochastic processes in underwater acoustics, ed. by C. Baker, Lecture notes in control and information sciences, Springer Verlag, 1986.

[4] P.Y. ARQUES et B. PICINBONO, Filtrage adapté généralisé, Rapport interne.

[5] B. PICINBONO and P. DUVAUT, Optimal linear-quadratic systems for detection and estimation, IEEE Trans. Inf. Theory, 34, pp 304-311, 1988.

[6] P. DUVAUT, Linear-quadratic prediction, en cours de publication.