IDENTIFICATION DES CHAINES DE MARKOV CACHEES: APPLICATIONS AUX CANAUX NON-LINEAIRES

H.KOREZLIOGLU et R.VALLET

TELECOM PARIS 46 rue Barrault 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME:

Cet article vise à appliquer l'algorithme de BAUM et WELCH à l'identification d'un canal de communications non linéaire à bruit blanc additif. A partir de ces algorithmes itératifs, on dérive des algorithmes récursifs pour l'estimation des caractéristiques du canal de transmission et pour l'estimation de la loi de la source.

SUMMARY

The aim of this paper, is the application of the BAUM and WELCH algorithm to the identification of a non linear channel with additive white noise. From these algorithms, we derive recursive algorithms for the estimation of the parameters of the transmission channel and for the estimation of the probability law of the source.

Définitions des chaînes de Markov:

Un système, qui génère un signal, peut être représenté par une chaîne de Markov si les conditions suivantes sont réalisées.

1) Il existe une représentation d'états finie. L'espace d'états est de cardinal fini M. Pour un état donné, le signal observé possède certaines propriétés particulières.

2) A chaque instant n, un nouvel état est atteint en fonction de l'état précédent et d'une matrice de probabilités de transitions.

3) Après chaque transition, une observation est produite en accord avec une loi de probabilité paramétrée par la valeur de l'état courant (Machine de MOORE) ou par celles des états: courant et suivant (Machine de MEALY)

Si un processus peut être représenté comme le processus d'observation d'un tel système, on dit qu'il possède une représentation markovienne finie.

Soit E un espace dénombrable dont les points sont les états de la chaîne. Soit $\Omega = E^N$ l'espace des suites infinies $x = (x_n; n \in N)$ d'éléments de E qui seront appelés les trajectoires de la chaîne et soit $x \rightarrow x_n$ les coordonnées de l'espace Ω.

La donnée d'une loi de probabilité P_0 sur E et d'une matrice markovienne $A=\{a_{i,j}\}$ ($a_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j \in E} a_{i,j} = 1 \quad \forall i \in E$) suffit à définir une chaîne de Markov homogène sur Ω, telle que si P désigne la loi de cette chaîne on ait:

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots\ldots, X_N=x_N)$$
$$= P_0(x_0).a_{x_0,x_1} \ldots\ldots a_{x_{N-1},x_N}$$

Dans ce qui suit, nous désignerons $P(X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots\ldots, X_N=x_N)$ par $P(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_N)$ et $P(X_{n+1}=x_{n+1} | X_n=x_n)$ par $P(x_{n+1} | x_n)$.

La chaîne de Markov X est dite irréductible si A ne contient aucune sous matrice markovienne. Elle est stationnaire et ergodique si, de plus, la loi $x_1 \rightarrow \sum_{x_0 \in E} P(x_0).\, P(x_1|x_0)$ coincide avec P_0, auquel cas $P(x_0) > 0 \ \forall\, x_0$.

Equation d'états:

Toute chaîne de Markov X admet la représentation:

$$X_{n+1} = f_n(X_n, W_n)$$

où $\{X_0, w_0, w_1, \ldots\}$ forme une suite indépendante. Si la suite $\{w_n, n \in N\}$ est équidistribuée et si f_n et indépendante de n, alors X est homogène. Nous ne nous intéresserons qu'aux chaînes de Markov homogènes.

Nous représenterons une chaîne de Markov cachée par le couple (X,Y) de processus d'état X (chaîne de Markov) et de processus d'observation Y définis par le couple d'équations récursives:

$$X_{n+1} = f(X_n, W_n)$$
$$y_n = h(X_n, B_n)$$

où la suite $\{ (W_n, B_n), n \in N\}$ est une suite indépendante, équidistribuée et indépendante de X_0. Remarquons que le processus { (X_{n+1}, Y_n), $n \in N$} est une chaîne de Markov. Nous supposerons que X est stationnaire et ergodique.

Nous n'avons pas spécifié ici, les espaces de valeurs de W, B et Y qui seront définis selon le contexte.

Remarque: Il existe beaucoup de processus Y qui peuvent se mettre sous la forme (3) avec un processus d'états markovien X défini par (2) sans que E soit un espace dénombrable. Dans ce cas, il faudrait définir la loi de X par des noyaux de transition, ce qui aurait pour effet de compliquer les notations. Dans le but de rattacher notre présentation au langage des automates finis, nous considerons ici un espace E fini. Notre écriture sous entend que l'espace des valeurs de W, B, Y sont aussi des espaces discrets. Dans le cas contraire, B et Y peuvent être à valeurs continues, alors les probabilités sont à remplacer par des densité. Conformément aux notations ci-dessus, $P(x_{n+1}, y_n|x_n)$ représente la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1}=x_{n+1}, Y_n=y_n|X_n=x_n)$

Machine de MEALY:

Cette loi se décompose suivant la relation suivante:

$$P(x_{n+1}, y_n | x_n) = P(x_{n+1} | x_n) . P(y_n | x_{n+1}, x_n) \quad (6)$$

La valeur y_n du processus Y à l'instant n dépend des valeurs (x_{n+1}, x_n) du processus d'états X aux instants n et n+1. L'automate qui génère le processus Y est une machine de MEALY.

La loi de la suite est le produit des lois conditionnelles soit:

$$P(x_o,(x_1,y_0),(x_2,y_1),(x_2,y_1)\ldots\ldots,(x_{n+1},y_n)) = P(x_0^{N+1}, y_0^N) =$$

$$= P(x_0) . \prod_{k=0}^{n} P(x_{k+1}, y_k | x_k) \quad (7)$$

Machine de MOORE:

Si les processus W et B sont indépendants au même instant, la loi conditionnelle qui caractérise la suite Markovienne (x_{n+1}, y_n) est:

$$P(x_{n+1}, y_n | x_n) = P(x_{n+1} | x_n) . P(y_n | x_n) \quad (8)$$

La valeur y_n du processus Y à l'instant n dépend de la valeur x_n du processus d'états X à l'instants n. L'automate qui génère le processus Y est une machine de MOORE.

La loi jointe est alors:

$$P(x_0^{N+1}, y_0^N) = P(x_0) . \prod_{k=0}^{n} P(x_{k+1} | x_k) . P(y_k | x_k) \quad (9)$$

Beaucoup de processus peuvent être représentés, avec un certain degré d'approximation, par un modèle de Markov caché. Pour la réalisation du modèle correspondant, on doit apporter des solutions aux problèmes suivants:

Problème 1)

Connaissant l'observation $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$, comment choisir la suite des états $X = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N)$ qui soit optimale pour un certain critère. En particulier un critère de Maximum de Probabilité a posteriori ou de Maximum de Vraisemblance.

Problème 2)

Supposons que la probabilité de transition $P(x_{n+1}, y_n|x_n)$ et que la loi $p(x_0)$ dépendent d'un paramètre Λ prenant ses valeurs dans un espace E_Λ. Dans ce cas, on peut ajuster la valeur de Λ, qui maximise un critère, par exemple la loi "conditionnelle" $P(Y_1^N | \Lambda)$ par rapport à Λ. Pour simplifier les notations, la dépendance de P(.) relativement à Λ sera notée par $P_\Lambda(Y_1^N)$.

Un algorithme de lissage non-linéaire [1] permet de calculer la probabilité de l'état du système, à l'instant n, conditionnellement à l'observation du signal y_1^N pour $1 \le n \le N$. Cet algorithme fournit une solution du problème 1) et sera la base d'une solution du problème 2). Un algorithme récursif (algorithme de VITERBI) [2] permet de déterminer la suite X_1^N d'états de probabilité a posteriori maximale.

La solution du problème 2) peut être obtenue sur une suite d'observations finie, par un algorithme itératif (BAUM et WELCH) [1] ou algorithme E.M. (Expectation, Maximisation). Sur une suite de longueur "infinie", par un algorithme récursif dans le temps lorsque le système est non stationnaire et lentement variable au cours du temps [3].

ALGORITHME DE BAUM OU E.M.:

L'algorithme E.M. est défini à partir des fonctions de vraisemblance directe et retour.

$$\sigma_\Lambda(x_n=j|y_0^{n-1}) = \sum_{i=1}^{M} P_\Lambda(x_n=j, y_{n-1}|x_{n-1}=i) . \sigma_\Lambda(x_{n-1}=i|y_0^{n-2}) \quad (10)$$

$$\beta_\Lambda(x_n=j|y_n^N) = \sum_{i=1}^{M} P_\Lambda(x_{n+1}=i, y_n|x_n) . \beta_\Lambda(x_{n+1}=i|y_{n+1}^N) \quad (11)$$

La probabilité a posteriori que l'état x_n, à l'instant n, prenne la valeur $x_n=j$, est définie par:

$$L_\Lambda(x_n=j|y_0^N) = \sigma_\Lambda(x_n=j|y_0^{n-1})\, \beta_\Lambda(x_n=j|y_n^N) / Norm \quad (12)$$

où $Norm = \sum_{j=1}^{M} L_\Lambda(x_n=j|y_0^N)$ est un facteur de normalisation.

Λ représente l'ensemble des paramètres du modèle pour lesquels sont calculées les fonctions directe et retour donc le lisseur non-linéaire $L_\Lambda(x_n=j|y_0^N)$.

L'estimation des paramètres du modèle par un algorithme E.M. est réalisée dans l'étape suivante:

On recherche le vecteur paramètres Λ', qui maximise l'expression:

$$Q(\Lambda,\Lambda') = E\{\log(P_{\Lambda'}(X_0^N, Y_0^N))\} =$$

$$\sum_{X_0^N} P_\Lambda(X_0^N, Y_0^N) \log(P_{\Lambda'}(X_0^N, Y_0^N)) \quad (13)$$

où X_0^N représente une suite { $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_N$} d'état occupés par le système. E{.} est l'espérance mathématique. Dans [4] Liporace démontre que le point fixe de la fonction de réestimation est unique et qu'il est tel que la vraisemblance de l'observation soit maximale.

Nous allons indiquer sans démonstration les principales fonctions de réestimation ainsi obtenues:

L'estimation des coefficients de la matrice de transition s'effectue par la relation:

$$P_{\Lambda'}(x_{k+1}=j|x_k=i) = \quad (14)$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\sigma_\Lambda(x_n=i|y_0^{n-1}) * P_\Lambda(x_{n+1}=j, y_n|x_n=i)\beta_\Lambda(x_{n+1}=j|y_{n+1}^{N})}{\sum_{n=1}^{N}\sigma_\Lambda(x_n=i|y_0^{n-1})\ \beta_\Lambda(x_{n+1}=i|y_{n+1}^{N})}$$

On vérifie aisément la condition de normalisation des lignes de la matrice des probabilités de transitions:

$$\sum_{j=1}^{M} P_{\Lambda'}(x_{k+1}=j|x_k=i) = 1$$

Si le bruit d'observation est additif, et indépendant de l'état, la matrice de covariance R_b du bruit, est estimée par la relation:

$$R_b = \frac{\sum_{n=0}^{N} L_\Lambda(x_n=j|y_0^N)\ (y_n-h(x_n=j))^T\ (y_n-h(x_n=j))}{\sum_{n=0}^{N} L_\Lambda(x_n=j|y_0^N)} \quad (15)$$

où $h(x_n)$ est la contribution de l'état $x_n=j$ à l'observation y_n. Ce paramètre est estimé par la relation:

$$h(x_n=j) = \frac{\sum_{n=0}^{N} L_\Lambda(x_n=j|y_0^N)\ y_n}{\sum_{n=0}^{N} L_\Lambda(x_n=j|y_0^N)} \quad (16)$$

L'ensemble des paramètres du modèle est réestimé par des moyennes au sens de CESARO. Il faut réaliser plusieurs fois l'ensemble des opérations de lissage non-linéaire et de réestimation des paramètres avant d'obtenir une distance entre les modèles Λ et Λ' suffisamment petite.

Nous proposons un algorithme récursif d'estimation des paramètre d'une chaîne de Markov, en remplaçant dans l'algorithme itératif les probabilités conditionnelles à toute l'observation y_1^N par celles conditionnelles au passé y_1^n.

ALGORITHME RECURSIF:

On se place dans le cas de la machine de MOORE. La probabilité a posteriori de l'état x_n à l'instant n, conditionnellement à l'observation y_0^n est définie par la fonction directe ou filtre $\sigma_{\Lambda n}(x_n=j|y_0^n)$ à partir du filtre calculé à l'instant précédent et de la loi conditionnelle du couple (x_n, y_n) calculée pour les paramètres estimés du modèle à l'instant n:

$$\sigma_{\Lambda n-1}(x_n=j|y_0^n) \quad (17)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} P_{\Lambda n-1}(x_n=j|x_{n-1}=i).P_{\Lambda n-1}(y_n|x_n)\ \sigma_{\Lambda n-2}(x_{n-1}=i|y_0^{n-1})\ /\text{norm}$$

norm est un facteur de normalisation tel que:

$$\sum_{j=1}^{M} \sigma_{\Lambda n-1}(x_n=j|y_0^n) = 1$$

$\sigma_{\Lambda n}(x_n=j|y_0^n)$ est une probabilité, ceci simplifie l'écriture des formules d'estimation qui vont suivre.

Estimation de la contribution de l'état:

Si le bruit est additif, centré, l'observation est déterminée par:

$$y_n = h(x_n) + b_n \quad (19)$$

$\Lambda(j)$ représente le paramètre $h(x_n=j)$ que l'on cherche à estimer. L'algorithme récursif, pour Λ_j est le suivant:

$$\Lambda_n(j) = \Lambda_{n-1}(j) + \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma_{\Lambda n-1}(x_n=j|Y_0^n)}{P(j)}\ y_n - \Lambda_{n-1}(j)\right) \quad (20)$$

pour j=1,....,M où $p(j) = P(x_n=j)$.

Le système considéré est à dynamique markovienne, contrôlé par un vecteur de paramètres Λ_n ([5] et [6]).

L'équation différentielle moyenne O.D.E.. associée est définie par:

$$\Lambda(j) = E\{\ \frac{\sigma_\Lambda(x_n=j|Y_0^n)\ .y_n}{p(j)}\ \} - \Lambda(j) \quad (21)$$

où l'espérence mathématique est prise par rapport à la loi asymptotique du vecteur ($x_{n+1}, \sigma_\Lambda(x_n=j|Y_0^n)\ , y_n$).

La limite de l'E.D.M. permet de déterminer le point de convergence $\Lambda^*(j)$ de l'algorithme.

soit:

$$\Lambda^*(j) = \frac{\lim_{n\to\infty} E\{\ \sigma_{\Lambda^*}(x_n=j|Y_0^n).y_n\ \}}{P(j)} \quad (22)$$

Si $\Lambda^*(j) = h(j)$; on peut exprimer l'espérance mathématique:

$$\lim_{n\to\infty} E\{\ \sigma_{\Lambda^*}(x_n=j|Y_0^n).y_n\ \} \quad (23)$$

On a: $\sigma_{\Lambda^*}(x_n=j|Y_0^n) .= P(x_n=j|y_0^n) = E\{1_{xn=j}|y_0^n\}$

où $1_{xn=j}$ est la fonction indicatrice de l'événement $\{x_n=j\}$.

or,

$$E\{P(x_n=j|y_0^n)\ y_n\} = E\{\ E\{1_{xn=j}|y_0^n\}\ y_n\}$$

$$= E\{\ 1_{xn=j}\ .y_n\} = E\{\ E\{\ y_n\ |x_n=j\}\ .1_{xn=j}\ \}\}$$

$$= E\{\ h(x_n=j)\ .\ 1_{xn=j}\ \} = h(x_n=j)\ .\ P(x_n=j)$$

$$\text{soit } \Lambda^*(j) = h(j) \quad (24)$$

Le point h(j) est bien la solution asymptotique de l'équation différentielle moyenne. Si l'algorithme converge, alors il converge vers la vraie valeur du paramètre.

Estimation des probabilités conjointes:

L'estimation récursive des probabilités conjointes est réalisée par la relation:

$$\Lambda_n(i,j) = \quad (25)$$

$$\Lambda_{n-1}(i,j) + \frac{1}{n}\ (\ \sigma_{\Lambda n-1}(x_{n-1}=i, x_n=j|y_0^n)\ - \Lambda_{n-1}(i,j)\ )$$

où $\Lambda_n(i,j)$ = représente la valeur estimée à l'instant n de la probabilité conjointe et p(i,j) la vraie valeur du paramètre.

$$\sigma_{\Lambda n-1}(x_{n-1}=i, x_n=j|y_0^n) = \quad (26)$$

$$\sigma_{\Lambda n-2}(x_{n-1}=i|y_0^n).P_{\Lambda n-1}(x_n=j|x_n=i).P_{\Lambda n-1}(y_n|x_n=j)/\text{Norm}$$

où norme est un facteur de normalisation tel que:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \sigma_{\Lambda n-1}(x_{n-1}=i, x_n=j|y_0^n) = 1$$

Les paramètres h(i) et P(i,j) sont des solutions asymptotiques de l'équation différentielle moyenne associée aux estimateurs récursifs. Si ces estimateurs convergent, alors ils convergent vers les vraies valeurs des paramètres. Il reste bien évidement à démontrer que l'O.D.E. est asymptotiquement stable.

Nous allons montrer sur un exemple simple que l'algorithme proposé converge. Il est plus performant qu'un algorithme à retour de décision pour de faibles rapport signal à bruit

EXAMPLE:

Nous considérons un système de transmission binaire. Soit $\{a_n, n\in[1,N]\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées à valeurs dans l'ensemble $\{A,B\}$ de valeurs inconnues avec A>B et équidistribuées, transmise sur un canal à bruit additif blanc gaussien.de variance σ^2 connue.

L'équation d'observation est:

$$y_n = a_n + b_n \tag{27}$$

l'équation d'état est:

$$x_{n+1} = a_n$$

La matrice des probabilités de transition est: $P = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

L'estimation de la probabilité a posteriori de l'état x_n à l'instant n est donné par:

$$P_{An}(x_n=A_n|y_1^n) = \frac{P(y_n|x_n=A_n)}{P(y_n|x_n=A_n)+P(y_n|x_n=B_n)} \tag{28}$$

soit:

$$P_{An}(x_n=A_n|y_1^n) = \frac{\exp(-\frac{(y_n-A_n)^2}{2\sigma^2})}{\exp(-\frac{(y_n-A_n)^2}{2\sigma^2}) + \exp(-\frac{(y_n-B_n)^2}{2\sigma^2})} \tag{29}$$

Les équations d'estimation récursives des amplitudes $A_n$et B_n sont:

$$A_n = A_{n-1} + \gamma_n \,(\, 2.P_{An}(x_n=A_{n-1}|y_1^n) \,.\, y_n - A_{n-1}) \tag{30}$$

$$B_n = B_{n-1} + \gamma_n \,(\, 2.P_{Bn}(x_n=B_{n-1}|y_1^n) \,.\, y_n - B_{n-1})$$

γ_n est une suite de termes décroissants en 1/n ou de constantes petites et $1/P(x_n=A) = 1/P(x_n=B) = 2$

La figure (1) permet de comparer la moyenne de l'estimation du paramètre A, pour des valeurs réelles $A_0= - B_0=1$, des valeurs intitiales $A_i=-B_i= 2$ et 0.5 pour une variance de bruit additf $\sigma^2=1$ connue.

L'algorithme proposé est comparé à l'algorithme à retour de décision décision qui s'exprime par:

$$\text{Si } y_n > \frac{A_{n-1}+B_{n-1}}{2} \text{ alors } A_n = A_{n-1} + \gamma_n \,.\, (y_n - A_{n-1}) \tag{31}$$

$$\text{Si } y_n < \frac{A_{n-1}+B_{n-1}}{2} \text{ alors } B_n = B_{n-1} + \gamma_n \,.\, (y_n - B_{n-1})$$

L'algorithme proposé est sans biais et converge un peu plus rapidement que l'algorithme à décision dans la boucle. Pour un bon rapport signal sur bruit, les deux algorithmes sont équivalents.

CONCLUSION:

L'algorithme itératif E.M., nous a permit de construire un algorithme récursif d'identification d'une équation d'observation non-linéaire et d'une matrice de probabilité conjointe, qui utilise les lois conditionnelles de l'état du modèle estimées jusqu'à l'instant n.

REFERENCES:

[1] L.E.BAUM. "An Inequality and Associated Maximisation Technique in Statistical Estimation for Probabilistic Functions of Markov Processes".INEQUALITIES, VOL. III Academic press New York 1972

[2] L.R.RABINER and B.H.JUANG. " An Introduction to Hidden Markov Models". IEEE ASSP Magazine, JANUARY 1986.

[3] R.VALLET,H.KOREZLIOGLU. "Application des algorithmes d'identification des chaines de MARKOV cachées en communications numériques dans un canal à phase aléatoire". 11-eme Colloque GRETSI,Nice,JUIN 1987.

[4] L.A.LIPORACE."Maximum-Likelihood Estimation for Multivariate Observations of Markov Sources."IEEE Transactions on Information Theory,VOL.IT-28,No.5,September 1982.

[5] L.LJUNG and T.SÖDERSTRÖM. "Theory and Practise of Recursive Estimation". M.I.T. press 1983.

[6] M.BENVENISTE, M.METIVIER et P.PRIOURET. " Algoritmes adaptatifs et approximations stochastiques. Masson 1987.

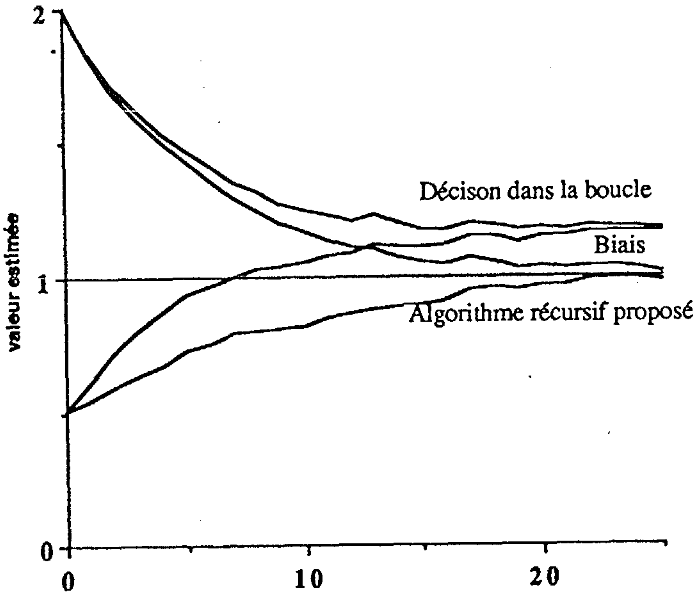

figure 1: estimation de la valeur A