IDENTIFICATION DE MODELES ARMA

G. FAVIER * - J.-Ph. PUY ** - G. MAYNARD***

* CNRS/LASSY - 41 Bd. Napoléon III, F - 06041 Nice Cedex
** NEREIDE SUD/CAPCA - Les Oursinières, F - 83220 Le Pradet
*** DCAN/CAPCA - Les Oursinières, F - 83220 Le Pradet

RESUME

Après un bref historique du problème et une revue des principales méthodes d'identification de modèles ARMA, de nouveaux algorithmes sont présentés. Puis les liens qui existent entre ces nouveaux algorithmes et des méthodes déjà existantes sont discutés. Enfin, les performances de diverses méthodes sont comparées à travers une analyse de type Monte Carlo sur des exemples simulés.

SUMMARY

After a brief review of the main identification methods of ARMA models, some new algorithms are presented. Then the links which exist between these new algorithms and other already existing methods are discussed. Finally the performance of various methods of ARMA parameters estimation is compared through a Monte Carlo analysis realized form simulated examples.

1 - INTRODUCTION

Les modèles Auto Régressifs à Moyenne Ajustée (ARMA) sont très utilisés en Traitement du Signal et en Automatique, avec comme applications privilégiées la représentation paramétrique des signaux et des systèmes, et l'estimation spectrale.

Un modèle ARMA vectoriel d'ordre (p, q) est représenté par l'équation récurrente :

$$x(t) = -\sum_{i=1}^{p} A_i\, x(t-i) + \sum_{i=0}^{q} C_i\, e(t-i) \qquad (1)$$

$$\text{avec : } \dim x(t) = \dim e(t) = p \times 1 \qquad (2)$$

$\{x(t)\}$ est le processus ARMA mesuré et $\{e(t)\}$ est une séquence de bruit blanc non mesurable, de moyenne nulle et de covariance Σ. Les coefficients A_i et C_i sont appelés paramètres AR et MA du modèle ARMA respectivement. La fonction de transfert associée au modèle ARMA est supposée stable et à inverse stable.

Durant la dernière décade de nombreuses méthodes ont été proposées pour l'identification des modèles ARMA. Bien que la tâche soit relativement difficile, étant donnée la place dont nous disposons et le nombre impressionnant d'articles (plusieurs centaines) écrits sur le sujet, nous allons essayer d'effectuer un classement de ces méthodes et de faire un bref historique afin de mieux situer la contribution du présent article. Cette revue des méthodes constitue un complément à l'article de synthèse de [MORF et al - 1977].

Ces méthodes peuvent être classées de différentes manières :

* C1 - suivant la procédure d'estimation utilisée :
  - C11 - Méthodes basées sur une procédure en une étape, avec estimation simultanée des paramètres AR et MA.
  - C12 - Méthodes basées sur une procédure en deux étapes, avec estimation séparée des paramètres AR puis des paramètres MA.

  A noter que pour certaines applications (commande adaptative de processus, estimation spectrale, ...) l'estimation de la partie MA peut ne pas être nécessaire ou être remplacée par l'estimation d'autres paramètres comme par exemple les coefficients du numérateur spectral [MOSES, BEEX - 1986]

* C2 - suivant le type d'information utilisée et de traitement des données effectué :
  - C21 - Méthodes basées sur un traitement séquentiel des mesures (méthodes récursives).
  - C22 - Méthodes basées sur un traitement par bloc des mesures (méthodes non récursives), avec possibilité de faire appel à des fonctions de corrélation estimées.

Il est à noter que dans le but d'améliorer l'efficacité numérique des algorithmes (en termes de temps de calcul), la plupart des méthodes récentes fait appel à des techniques d'algorithmes rapides (filtres en treillis, équations de Chandrasekhar). Pour une présentation synthétique de ces algorithmes voir les articles de [FRIEDLANDER - 1982 a et b].

Parmi les méthodes de la classe C11 on trouve :

- La méthode du maximum de vraisemblance qui nécessite de résoudre un système d'équations non linéaires ([NEWBOLD - 1974], [ANDERSON - 1977], [DUGRE et al. - 1986]), et ses nombreuses approximations parmi lesquelles on peut citer les méthodes RML1, RML2 et RML2 modifié ([PANUSKA - 1968, [YOUNG - 1968], [SODERSTROM - 1973], [FRIEDLANDER - 1982c]).

- Des méthodes basées sur l'ajustement du spectre. [FRIEDLANDER, PORAT - 1984] proposent de minimiser un critère d'écart quadratique entre le spectre estimé de façon non paramétrique à l'aide de la fonction d'autocorrélation du processus et le spectre estimé de façon paramétrique à l'aide du modèle ARMA. La méthode qui en résulte fait appel à des procédures d'optimisation non linéaire, et peut être vue comme une forme approchée de la méthode du maximum de vraisemblance.

- Des formes en treillis moindres-carrés obtenues à partir de la décomposition du modèle ARMA en un modèle AR à deux dimensions et basées sur l'algorithme des moindres-carrés étendus. Ces algorithmes ont été proposés par [MORF, LEE - 1979] et, sous forme normalisée par [LEE et al. - 1980] dans le cas d'un modèle ARMA (p, p), puis par [BENVENISTE, CHAURE - 1981] et [FRIEDLANDER - 1983b] dans le cas d'un modèle ARMA (p, q).

Nous allons maintenant considérer les méthodes de la classe C12, en envisageant tout d'abord celles qui permettent d'estimer la partie AR à l'aide de fonctions de corrélation (classe C22) :

- Méthodes basées sur la résolution d'un système d'équations linéaires algébriques dites de type Yule-Walker étendues (ou modifiées). Dans [GERSCH - 1970] ces équations, en nombre minimal (q), sont écrites à l'aide de la fonction d'autocorrélation du processus ARMA. Dans [CHOW - 1972] il est suggéré d'utiliser un nombre d'équations supérieur à q afin d'améliorer la qualité de l'estimation. Cette idée a été utilisée par [CADZOW, MOSES - 1981] pour résoudre le problème d'estimation spectrale à l'aide d'un modèle ARMA (voir aussi [CADZOW - 1982]). On parle alors de systèmes d'équations de Yule-Walker modifiées surdimensionné. Une autre manière d'améliorer cette méthode consiste à la combiner avec un approche de type maximum de vraisemblance [STOICA et al. - 1987a].
  Dans [FAVIER - 1977 a et b] les équations de Yule-Walker étendus sont exprimées en termes de la fonction d'autocorrélation d'un pseudo-processus d'innovation ou de la fonction d'intercorrélation entre le processus ARMA et un pseudo-processus d'innovation.
  Il est à noter que les équations de Yule-Walker étendues sont étroitement liées à la méthode de la Variable Instrumentale [FRIEDLANDER - 1983a]. Une analyse asymptotique de ce type de méthode est effectuée dans [STOICA et al. - 1985, 1987 b et c]. Finalement ces équations peuvent être résolues de manière récursive (classe C21) en faisant appel à une technique de filtrage en treillis. Ainsi [CADZOW, MOSES - 1981] proposent d'utiliser un algorithme en treillis de type fenêtre avant (voir aussi [MOSES et al. - 1985] et [SAMSON - 1982]).

En ce qui concerne les méthodes d'estimation de la partie MA, appelées aussi méthodes de factorisation spectrale, deux types d'approches faisant appel à des fonctions de corrélation estimées sont possibles (classe C22) :

- Méthodes utilisant une procédure de factorisation de Cholesky ([MORF - 1974], [WILSON - 1969, 1972]), avec possibilité de faire appel à un algorithme en treillis [FRIEDLANDER - 1983c] pour effectuer les calculs.

- Algorithmes de réalisation stochastique nécessitant la résolution d'une équation de type Riccati ou Chandrasekhar ([DICKINSON et al. - 1974], [FAVIER - 1977, 1979, 1982b], [FAVIER, ALENGRIN - 1979], [FAVIER, SALUT - 1979]).

- Méthode basée sur une procédure itérative et approchée faisant appel à l'algorithme des moindres carrés ordinaires et fournissant des estimés consistants pour les paramètres AR [TSAY, TIAO - 1984]. Une version récursive de cet algorithme, utilisant un filtre de blanchiment en treillis / moindres carrés d'ordre (p+q) et nécessitant la résolution d'un système de q équations linéaires algébriques, a été proposée par [LI, DICKINSON - 1986]. Les paramètres MA peuvent également être obtenus en utilisant cette approche à travers une simple procédure de normalisation des variables intermédiaires solutions du système d'équations algébriques précédent [LI, DICKINSON - 1988].

Enfin pour terminer la présentation des méthodes de la classe C12, nous citerons les méthodes permettant d'estimer, en deux étapes, aussi bien les paramètres AR que MA :

- Méthodes basées sur l'identification de modèles AR longs ([DURBIN - 1959, 1960], [GRAUPE et al. - 1975]) ou MA longs [FAVIER - 1982 a et b]. Dans ces deux dernières références la dualité des deux approches (AR long et MA long) est clairement mise en évidence.

Après ce bref historique des méthodes d'identification de modèles ARMA, nous allons rappeler dans le § 2 les principales définitions et propriétés qui seront utilisées dans le § 3 pour développer de nouveaux algorithmes d'estimation duaux de modèles ARMA multivariables. Finalement quelques résultats de simulation seront présentés dans le § 4 pour comparer les performances de différentes méthodes d'estimation.

2. DEFINITIONS ET PROPRIETES

Comme il est facile de le vérifier, les paramètres AR du modèle ARMA (1) vérifient les équations de Yule-Walker modifiées (YWM) :

$$\sum_{i=0}^{p} A_i\, r_{l-i} = 0 \qquad (A_0 = I_p) \qquad \forall\ l > q \tag{3}$$

où

$$r_{l-i} = E\left[x(t-i)\ x^T(t-l)\right] \tag{4}$$

Etant donné le processus x(t), le prédicteur linéaire direct d'ordre N de x (t) est défini comme :

$$\hat{x}_N(t) = -\sum_{i=1}^{N} A_{N,i}\ x(t-i) \tag{5}$$

où les paramètres $A_{N,i}$ sont appelés coefficients du prédicteur direct d'ordre N. L'erreur de prédiction directe d'ordre N est donnée par :

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t) = \sum_{i=0}^{N} A_{N,i}\ x(t-i)\ \text{, avec } A_{N,0} = I_p \tag{6}$$

Les coefficients du prédicteur direct optimal au sens de la minimisation du critère des moindres carrés moyens vérifient les équations de Yule-Walker (YW) :

$$\sum_{i=0}^{N} A_{N,i}\ r_{l-i} = 0 \qquad \forall\ l \in [1, N] \tag{7}$$

ce qui traduit la condition d'orthogonalité de ε_N (t) avec x(t-1), ..., x(t-N), c'est-à-dire :

$$E\left[\varepsilon_N(t)\ x^T(t-l)\right] = 0 \qquad \forall\ l \in [1, N] \tag{8}$$

Comme il est bien connu, l'algorithme de LEVINSON-WIGGINS-ROBINSON permet de résoudre les équations YW de manière récursive par rapport à l'ordre N. Cet algorithme peut être associé à une structure de filtre en treillis dont chaque cellule est caractérisée par deux coefficients matriciels, appelés coefficients PARCOR directs et rétrogrades, qui interviennent dans le calcul des coefficients des prédicteurs. Dans le cas où l'on veut estimer ces coefficients de manière récursive vis-à-vis du temps, il est possible d'utiliser un filtre en treillis / moindres carrés pour calculer les coefficients PARCOR.

Les filtres en treillis possèdent de nombreuses propriétés dont celle de réaliser une double orthogonalisation de la série temporelle { x(t-N), ..., x(t) }, correspondant à une factorisation U-D (inférieure et supérieure) de R_N, matrice d'autocorrélation d'ordre N du processus x(t). Nous avons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_N(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_1(t-N+1) \\ \varepsilon_0(t-N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & A_{N,1} & \cdots & A_{N,N} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_p & A_{1,1} \\ 0 & & & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \vdots \\ \\ x(t-N) \end{bmatrix} \tag{9}$$

où { ε_0(t-N), ..., ε_N(t) } constitue une base orthogonale de l'espace engendré par { x(t-N), ..., x(t) }.

3 - ALGORITHMES D'ESTIMATION DUAUX DE MODELES ARMA

Comme dans [LI, DICKINSON-1986], nous approximons le modèle ARMA (1) en remplaçant la séquence de bruit blanc { e(t-q), ..., e(t) } par la séquence orthogonale des erreurs de prédiction directe { ε_{N-q}(t-q), ..., ε_N(t) }, délivrée par un filtre en treillis d'ordre $N \geq q$. Le modèle (1) s'écrit alors :

$$x(t) = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\ x(t-i) + \sum_{i=0}^{q} \beta_i\ \varepsilon_{N-i}(t-i) \tag{10}$$

Nous allons montrer que les coefficients α_i vérifient les mêmes équations YWM que les paramètres A_i, et que les coefficients β_i fournissent une estimation des paramètres C_i à un rapport de covariances près. D'après (10), nous avons :

$$r_l = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\ r_{l-i} + \sum_{i=0}^{q} \beta_i\ E\left[\varepsilon_{N-i}(t-i)\ x^T(t-l)\right] \tag{11}$$

ou encore en utilisant (6), avec $\alpha_0 = I_p$:

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i\ r_{l-i} = \sum_{i=0}^{q} \beta_i \sum_{j=0}^{N-i} A_{N-i,j}\ r_{l-i-j} \tag{12}$$

Compte tenu des équations YW (7) que vérifie le prédicteur direct d'ordre N-i, le second membre de (12) est nul pour $l \in [q+1, q+p']$, avec $p' \geq p$, si on choisit N = q+p'. On retrouve alors les équations YWM (3) que vérifient les paramètres AR du modèle ARMA. A noter cependant que, par construction, le modèle (10) ne satisfait pas les équations YWM pour toute valeur de $l > q$ comme c'est le cas avec le modèle ARMA (1).

Nous allons chercher maintenant à déterminer les paramètres MA en fonction des coefficients β_i du modèle (10). Pour cela, nous normalisons les erreurs de prédiction directe de telle sorte qu'elles aient toutes la même covariance R_N^{ε} que ε_N(t). Soit :

$$\bar{\varepsilon}_{N-i}(t-i) = \left(R_N^{\varepsilon}\right)^{1/2} \left(R_{N-i}^{\varepsilon}\right)^{-1/2} \varepsilon_{N-i}(t-i) \quad \forall\ i \in [0, q] \tag{13}$$

où $\left(R_{N-i}^{\varepsilon}\right)^{1/2}$ représente une racine carré de R_{N-i}^{ε} (par exemple celle correspondant à la décomposition de Cholesky de R_{N-i}^{ε}).

Le modèle (10) peut être réécrit comme :

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i\ x(t-i) = \sum_{i=0}^{q} \beta_i \left(R_{N-i}^{\varepsilon}\right)^{1/2} \left(R_N^{\varepsilon}\right)^{-1/2} \bar{\varepsilon}_{N-i}(t-i) \tag{14}$$

où $\left\{ \bar{\varepsilon}_{N-q}(t-q), \ldots, \bar{\varepsilon}_N(t) \right\}$ est une séquence de variables aléatoires orthogonales ayant toutes la même covariance R_N^{ε}. Par suite, nous pouvons considérer que cette séquence approxime la séquence de bruit blanc { e (t - q), ..., e (t) } du modèle (1), et nous déduisons comme paramètres MA estimés :

$$C_i = \beta_i \left(R_{N-i}^{\varepsilon}\right)^{1/2} \left(R_N^{\varepsilon}\right)^{-1/2} \qquad \forall\, i \in [1, q] \tag{15}$$

Il nous reste à exprimer les coefficients α_i et β_i en fonction des coefficients des prédicteurs directs. D'après (6), nous avons :

$$\varepsilon_{N-i}(t-i) = \sum_{j=0}^{N-i} A_{N-i,j}\ x(t-i-j) \qquad i \in [0, q] \tag{16}$$

et en reportant cette expression dans (10) nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i\ x(t-i) = S_1 + S_2 \tag{17}$$

$$\text{avec : } S_1 = \sum_{j=0}^{N} A_{N,j}\ x(t-j)$$

$$= \sum_{j=0}^{p} A_{N,j}\ x(t-j) + \sum_{j=1}^{N-p} A_{N,j+p}\ x(t-j-p) \tag{18}$$

$$\text{et : } S_2 = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sum_{j=0}^{N-i} A_{N-i,j}\ x(t-i-j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{q} \beta_i\ A_{N-i,j-i}\ x(t-j) \quad (\text{car } A_{N-i,l} = 0\ \ \forall\ l < 0)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{q} \beta_i A_{N-i,j-i}\, x(t-j) + \sum_{j=1}^{N-p} \sum_{i=1}^{q} \beta_i\ A_{N-i,j+p-i}\, x(t-j-p) \tag{19}$$

En regroupant les termes en x(t-j) d'une part, et x(t-j-p) d'autre part, nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{p} \left[-\alpha_j + A_{N,j} + \sum_{i=1}^{q} \beta_i\ A_{N-i,j-i} \right] x(t-j)\ +$$

$$\sum_{j=1}^{N-p}\left[A_{N,j+p}+\sum_{i=1}^{q}\beta_i\,A_{N-i,j+p-i}\right]x(t-j-p)\;=\;0 \qquad (20)$$

Cette égalité devant être vérifiée pour toute valeur de k, et compte tenu de la relation $A_{m,n} = 0\ \forall\ n < 0$, nous déduisons les deux systèmes d'équations linéaires suivants pour le calcul des paramètres α_i et β_i en fonction des coefficients des prédicteurs d'ordre N-q, ..., N.

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(q,p+j)}\beta_i\,A_{N-i,j+p-i} = -A_{N,j+p} \qquad j\in[1,N-p] \qquad (21)$$

$$\alpha_j = A_{N,j}+\sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(j,q)}\beta_i\,A_{N-i,j-i} \qquad j\in[1,p] \qquad (22)$$

En choisissant N = q+p, on obtient un système minimal d'équations (21) pour le calcul des paramètres β_i. Par contre, si on prend N = q+p', avec p' > p, on obtient un système surdimensionné.

En résumé, l'algorithme d'identification est constitué des quatre étapes suivantes :

1. Application du filtre en treillis / moindres carrés d'ordre N = q+p', avec p' ≥ p, pour l'estimation récursive des coefficients PARCOR directs et rétrogrades, ainsi que des covariances R^{ε}_{N-i} des erreurs de prédiction directe.
2. Estimation des coefficients des prédicteurs directs d'ordre N-q, ..., N à l'aide des coefficients PARCOR estimés à l'étape 1, en utilisant les relations de récurrence de LEVINSON-WIGGINS-ROBINSON.
3. Résolution des systèmes d'équations linéaires (21) et (22) pour l'estimation des paramètres α_i et β_i.
4. Détermination des coefficients du modèle ARMA :
   $A_i = \alpha_i \quad i\in[1,p]$ et $C_i \quad i\in[1,q]$ donnés par (15).

L'algorithme ainsi obtenu constitue une généralisation au cas multivariable de l'algorithme de [LI-DICKINSON-1988].

Nous allons maintenant développer une version duale de cet algorithme. En inversant le système d'équations (9) nous tirons :

$$\begin{bmatrix} x(t)\\ \vdots \\ x(t-N)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & \bar{A}_{N,1} & \cdots & \bar{A}_{N,N}\\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_N(t)\\ \vdots \\ \varepsilon_0(t-N)\end{bmatrix} \qquad (23)$$

soit pour $i\in[0,N]$:

$$x(t-i) = \sum_{j=0}^{N-i}\bar{A}_{N-i,j}\,\varepsilon_{N-i-j}(t-i-j)\,,\ \left(\bar{A}_{N-i,0} = I_p\right) \qquad (24)$$

Reportant cette expression de x(t-i) dans (10), nous obtenons,

$$\sum_{i=0}^{q}\beta_i\,\varepsilon_{N-i}(t-i) = \sum_{i=0}^{p}\alpha_i\sum_{j=0}^{N-i}\bar{A}_{N-i,j}\,\varepsilon_{N-i-j}(t-i-j) \qquad (25)$$

Par suite, en comparant (17) - (19) avec (25), il est facile de vérifier la dualité des rôles joués par p, x(t-i), α_i et β_i vis-à-vis de q, $\varepsilon_{N-i}(t-i)$, β_i et α_i respectivement, et donc de déduire les relations duales de (21) - (22) :

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(p,q+j)}\alpha_i\,\bar{A}_{N-i,j+q-i} = -\bar{A}_{N,j+q} \qquad j\in[1,N-q] \qquad (26)$$

$$\beta_j = \bar{A}_{N,j}+\sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(j,p)}\alpha_i\,\bar{A}_{N-i,j-i} \qquad j\in[1,q] \qquad (27)$$

Un algorithme dual de celui décrit précédemment peut donc être obtenu en remplaçant la résolution des systèmes d'équations (21) - (22) par celle des systèmes duaux (26) - (27). Cette solution nécessite d'avoir calculé au préalable les coefficients $\bar{A}_{m,n}$ par simple inversion de la matrice triangulaire introduite en (9).

Un troisième algorithme dual peut être déduit en combinant la résolution des systèmes d'équations (21) et (26). Cette solution correspond à l'algorithme proposé par [RIBEIRO, MOURA - 1987].

On doit remarquer que les algorithmes (21) - (22) et (26) - (27) utilisent l'information contenue dans les colonnes des matrices triangulaires définies en (9) et (23). Lorsque l'ordre n du prédicteur devient grand, nous avons :

$$A_{n,j}\rightarrow A_{\infty,j} \quad \text{et} \quad \bar{A}_{n,j}\rightarrow\bar{A}_{\infty,j} \qquad (28)$$

où les coefficients $A_{\infty,j}$ et $\bar{A}_{\infty,j}$ représentent respectivement les paramètres des modèles AR long et MA long équivalents au modèle ARMA. Par suite, en choisissant la valeur de l'ordre maximal N de telle sorte que les (q+p'), avec p' ≥ p, premiers coefficients $A_{n,j}$ et $\bar{A}_{n,j}$ ($j\in[1,q+p']$) aient convergé vers leurs limites $A_{\infty,j}$ et $\bar{A}_{\infty,j}$, et en remplaçant les coefficients $A_{n,j}$ et $\bar{A}_{n,j}$ par ces limites dans les équations (21) - (22) et (26) - (27), ces équations deviennent alors identiques aux algorithmes d'estimation proposés par [FAVIER - 1982]. Il est à noter que ces algorithmes utilisent les éléments de la première ligne des matrices triangulaires définies en (9) et (23) pour N grand (N ≥ q+p').

4 - RESULTATS DE SIMULATION

Une analyse de type Monte Carlo, avec 20 séquences de bruit différentes, a été réalisée pour comparer les performances de 5 algorithmes d'identification de modèles ARMA. Les résultats rapportés ci-après concernent l'identification d'un modèle AR(2) bruité :

$$\begin{cases} y(t) = -a_1\,y(t-1) - a_2\,y(t-2) + e(t)\\ x(t) = y(t) + v(t)\end{cases}$$

avec : $a_1 = -2\,e^{-\beta t}\cos\omega T \quad , \quad a_2 = e^{-2\beta T}$

T étant la période d'échantillonnage.

Nous présentons ci-dessous des résultats de simulation obtenus avec les valeurs numériques $\beta = 2.10^{-4}$, $\omega = 0{,}8$ et un rapport S/B de 200.

Les algorithmes considérés sont les suivants :

- Algorithmes permettant d'estimer les paramètres AR et MA :
  - "Algorithme 1" basé sur la résolution des équations (21) - (22) avec N = p+q.
  - "Algorithme 2" basé sur la résolution des équations (21) - (22) avec N = p+q+2.
  - "Algorithme 3" basé sur la résolution des équations (26) - (27) avec N = p+q+2.
- Algorithmes permettant d'estimer les paramètres AR seuls :
  - "Algorithme 4" basé sur la résolution des équations de Yule-Walker Modifiées, avec utilisation de l'estimateur ergodique pour l'estimation de la fonction d'autocorrélation du processus ARMA.
  - "Algorithme 5" basé sur la résolution des équations de Yule-Walker Modifiées à l'aide de la méthode de la variable instrumentale.
- Algorithmes permettant d'estimer les paramètres MA seuls :
  - "Algorithme 6" basé sur une méthode de factorisation spectrale faisant appel à la résolution d'une équation de type Riccati, avec utilisation de la fonction d'autocorrélation estimée du processus ARMA [FAVIER, SALUT - 1979].
  - "Algorithme 7" identique à "Algorithme 6", avec utilisation de la fonction d'autocorrélation estimée du processus ARMA filtré par la partie AR [FAVIER - 1979].

Le critère de comparaison est la distance euclidienne de l'erreur d'estimation, calculée séparément pour les parties AR et MA (JAR et JMA).

Algo	1	2	3	4	5	6	7
JAR	$1{,}70.10^{-3}$	$1{,}16.10^{-2}$	$4{,}64.10^{-3}$	$2{,}48.10^{-3}$	$2{,}22.10^{-3}$		
JMA	$4{,}41.10^{-2}$	$4{,}91.10^{-2}$	0,26			0,34	$8{,}99.10^{-2}$

Des simulations réalisées (8 jeux de valeurs de β, ω, S/B ont été simulés) il ressort que les meilleures performances sont obtenues avec l'algorithme 1 tant pour les paramètres AR que MA et tant du point de vue distance paramétrique (biais) que vitesse de convergence et variance des paramètres estimés. De plus, nous avons constaté que pour l'estimation des paramètres AR, l'algorithme 5 donne des résultats très voisins de ceux obtenus avec l'algorithme 1. Enfin nous devons signaler qu'étant donnée la nature très oscillatoire des signaux simulés, les algorithmes 4 et 6 qui font appel à l'estimation de la fonction d'autocorrélation du processus ARMA, conduisent à des valeurs de paramètres estimés très oscillantes. L'utilisation de la fonction d'autocorrélation du processus ARMA filtré par la partie AR ("algorithme 7") permet dans ce cas d'améliorer très sensiblement les performances de l'estimateur de la partie MA.

Une analyse expérimentale plus détaillée de ces algorithmes est fournie dans [PUY - 1989].

Les auteurs sont particulièrement reconnaissants à Mr l'ICA MOUTET et Mr l'IPA RIOT pour leur soutien dans ces travaux.

REFERENCES

ANDERSON T.W., "Estimation for autoregressive moving average models in the time and frequency domains", The Annals of Statistics, vol. 5, n° 5, pp 842-865, 1977.

BENVENISTE A., CHAURE C., "AR and ARMA identification algorithms of Levinson type : an innovations approach", IEEE Tr, vol AC-26, n° 6, pp 1243-1260, Dec. 1981.

CADZOW J.A., "Spectral estimation : an overdetermined rational model equation approach", Proc. of the IEEE, vol. 70, n° 9, pp 907-939, Sept. 1982.

CADZOW J.A., MOSES R.L., "An adaptive ARMA spectral estimator", parts 1 & 2, Proc. ASSP workshop on spectral estimation, MC Master Univ., Hamilton, Ontario, Canada, Aug. 1981.

CHOW J.C., "On the estimation of the moving-average parameters", IEEE Tr., vol. AC-15, pp 268-269, April 1972.

DICKINSON B.W., KAILATH T., MORF M., "Canonical matrix fraction and state-space descriptions for deterministic and stochastic linear systems", IEEE Tr, vol. AC-19, n° 6, pp 656-667, Dec. 1974.

DUGRE J.P., SCHARF L.L., GUEGUEN C., "Exact likelihood for stationary vector autoregressive moving-average processes", Signal Processing, vol. 11, pp 105-118, 1986.

DURBIN J., "Efficient estimation of parameters in moving-average models", Biometrika, vol. 46, pp 306-316, 1959.

DURBIN J., "The fitting of time-series models", Revue Inst. Int. de Stat., vol. 28, n° 3, pp 233-244, 1960.

FAVIER G., "Identification d'une représentation gaussienne markovienne Algorithmes de réalisation stochastique", Thèse de Doct. Ing., Univ. de Nice, Juin 1977a.

FAVIER G., "Identification d'une représentation gaussienne markovienne minimale à l'aide d'algorithmes de réalisation stochastique", revue du CETHEDEC, n° 51, pp 13-42, 1977b.

FAVIER G., "A comparison of stochastic realization algorithms for identification of ARMA models", Snd. Int. Conf. on Information Sc. and Syst., Patras, Juillet 1979.

FAVIER G., "Identification of multivariable ARMA models by use of fast algorithms", Proc. ICASSP, Paris, May 1982a.

FAVIER G. "Filtrage, modélisation et identification de systèmes linéaires stochastiques à temps discret", Ed. du CNRS, 1982b.

FAVIER G, ALENGRIN G., "Algorithmes de filtrage rapide - Application à l'identification des paramètres statistiques d'un modèle ARMA", Colloque GRETSI, Nice, Mai 1979.

FAVIER G., SALUT G., "Factorisation spectrale et équation de Riccati", Colloque GRESTI, Nice, Mai 1979.

FRIEDLANDER B., "Lattice filters for adaptive processing", Proc. of the IEEE, vol. 70, n° 8, pp 829-867, Aug. 1982a.

FRIEDLANDER B., "Lattice methods for spectral estimation", Proc. of the IEEE, vol. 70, n° 9, pp 990-1017, Sept. 1982b.

FRIEDLANDER B., "A modified prefilter for some recursive parameter estimation algorithms", IEEE Tr., vol. AC-27, n° 1, pp 232-235, Feb. 1982c.

FRIEDLANDER B., "Instrumental variable methods for ARMA spectral estimation", Proc. ICASSP, Paris, pp 248-251, May 1982, et dans IEEE Tr., vol. ASSP-31, n° 2, pp 404-415, April 1983a.

FRIEDLANDER B., "Lattice implementation of some recursive parameter estimation algorithms", Int. J. Control, Vol. 37, n° 4, pp 661-684, 1983b.

FRIEDLANDER B.,"A lattice algorithm for factoring the spectrum of a moving-average process", IEEE Tr., vol. AC-28, n° 11, pp 1051-1055, Nov. 1983c.

FRIEDLANDER B., PORAT B., "A spectral matching technique for ARMA parameter estimation", IEEE Tr., vol. ASSP-32, n° 2, pp 338-343, April 1984.

GERSCH W., "Estimation for the autoregressive parameters of a mixed autoregressive moving-average time series", IEEE Tr., vol. AC-14, pp 583-588, Oct. 1970.

GRAUPE D., KRAUSE D.J., MOORE J.B., "Identification of autoregressive moving-average parameters of time series", IEEE Tr., vol. AC-20, pp 104-110, Feb. 1975.

LEE D.T., FRIEDLANDER B., MORF M., "Recursive ladder algorithms for ARMA modeling", Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, Albuquerque, New Mexico, pp 1225-1231, Dec. 1980.

LI S., DICKINSON B.W., "An efficient method to compute consistent estimates of the AR parameters of an ARMA model", Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, Ft. Landerdale, Fl., pp 1072-1076; Dec. 1985, et aussi dans IEEE Tr., vol. AC-31, n° 3, pp 275-278, March 1986.

LI S., DICKINSON B.W., "Application of the lattice filter to robust estimation of AR and ARMA models", IEEE Tr., vol. ASSP-36, n° 4, pp 502-512, April 1988.

MORF M., "Fast algorithms for multivariable systems", Ph. D. dissertation, Stanford Univ., 1974.

MORF M., LEE D.T., NICKOLLS J.R., VIEIRA A., "A classification of algorithms for ARMA models and ladder realizations". Proc. ICASSP, Hastford, CT, pp 13-19, 1977.

MORF M., LEE D.T., "Recursive least-squares ladder forms for fast parameter tracking", Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, San Diego, pp 1362-1367, Jan. 1979.

MOSES R.L., CADZOW J.A., BEEX A.A., "A recursive procedure for ARMA modeling", IEEE Tr., vol. ASSP-33, n° 4, pp 1188-1196, Oct. 1985.

MOSES R.L., BEEX A.A., "A comparison of numerator estimators for ARMA spectra", IEEE Tr., vol. ASSP-34, n° 6, pp 1668-1671, Dec. 1986.

NEWBOLD P., "The exact likelihood function for a mixed autoregressive moving average process", Biometrika, vol. 61, n° 3, pp 423-426, 1974.

PANUSKA V., "A stochastic approximation method for identification of linear systems using adaptive filtering", In Preprints JACC, Univ. of Michigan, pp 1014-1021, 1968.

PUY J.-Ph., "Identification de modèles ARMA. Application à la prédiction des mouvements d'un navire", thèse de doctorat, Univ. de Nice, 1989.

RIBEIRO I., MOURA J.M., "Dual algorithm for ARMA spectrum estimation", Proc. ICASSP, pp 2081-2084, 1987.

SAMSON C., "A unified treatment of fast algorithms for identification", Int. J. Control, vol. 35, n° 5, pp 909-934, 1982.

SODERSTROM T., "An on-line algorithm for approximate maximum likelihood identification of linear dynamic systems", Report 7308, Dept. of Autom. Control, Lund. Inst. of Techn., Suède, 1973.

STOICA P., SODERSTROM T., FRIEDLANDER B., "Optimal instrumental variable estimates of the AR parameters of an ARMA process", IEEE Tr., vol. AC-30, n° 11, pp 1066-1074, Nov. 1985.

STOICA P., FRIEDLANDER B., SODERSTROM T., "Approximate maximum likelihood approach to ARMA spectral estimation", Int. J. Control, vol. 45, n° 4, pp 1281-1310, 1987a.

STOICA P., FRIEDLANDER B., SODERSTROM T., "Optimal instrumental variable multistep algorithms for estimation of the AR parameters of an ARMA process", Int. J. Control, vol. 45, n° 6, pp 2083-2107, 1987b.

STOICA P., FRIEDLANDER B., SODERSTROM T., "Instrumental variable methods for ARMA models", dans "Control and dynamic systems", Academic Press, 1987c.

TSAY R.S., TIAO G.C., "Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary ARMA models", J. Amer. Statist. Ass., vol. 79, n° 385, pp 84-96, March 1984.

WILSON G.T., "Factorization of the covariance generating function of a pure moving average process", SIAM J. Numer. Anal., vol. 6, n° 1, pp 1-7, March 1969.

WILSON G.T., "The factorization of matricial spectral densities", SIAM J. Appl. Math., vol. 23, n° 4, pp 420-426, Dec. 1972.

YOUNG P.C., "The use of linear regression and related procedures for the identification of dynamic processes", Proc. IEEE Symp. on Adaptive Processes, UCLA, 1968.