



**INTERPOLATION DE SIGNAUX. APPLICATION A  
L'ESTIMATION DE SIGNAUX IMPULSIONNELS  
NOYES DANS UN BRUIT ADDITIF STATIONNAIRE  
A BANDE ETROITE**

F. Qendro, B. Benoist, R. Lengellé, P. Gaillard.

Université de Technologie de Compiègne U.A 817 HEUDIASYC  
BP 649 60206 COMPIEGNE CEDEX

### RESUME

Cet article présente une méthode d'interpolation adaptative de signaux stationnaires pouvant être décrits par un modèle autorégressif. Les estimateurs des échantillons inconnus sont déterminés de manière à minimiser l'énergie de l'erreur résiduelle, qui dépend aussi des coefficients du modèle. Cette méthode est utilisée pour estimer un signal de type impulsionnel noyé dans un bruit stationnaire à bande étroite. Elle est appliquée aux signaux obtenus en contrôle non destructif par courants de Foucault.

### SUMMARY

The purpose of this paper is to present an adaptive interpolation method for stationary signals that can be modeled by an autoregressive process. Estimation of missing samples is achieved by minimizing the residual error, which depends on the model coefficients.

This method ensures good results when applied to the estimation of impulsive signals in band limited stationary additive noise. It has been applied successfully to signal to noise ratio enhancement of signals obtained during Eddy currents non destructive testing.

#### 1 ) Introduction

Le bruit de fond qui accompagne différents capteurs exerce une influence défavorable sur l'estimation du signal utile. Dans certains cas, le signal à détecter est de forme impulsionnelle et non corrélé avec le bruit qui l'accompagne. Ce bruit possède souvent les mêmes caractéristiques fréquentielles que le signal et il est difficile de l'éliminer par des méthodes classiques.

En admettant que le signal est de forme impulsionnelle, noyé dans un bruit additif, on peut alors considérer que l'observation est de la forme suivante :

$$y(t) = \begin{cases} b(t) + s(t) & \text{pour } 0 < p < t_1 < t < t_m < T \\ b(t) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où  $[0, T]$  est la durée d'observation et  $[t_1, t_m]$  la durée du signal impulsionnel  $s(t)$ . L'estimation du signal peut être obtenue après soustraction d'un estimé  $\underline{b}(t)$  de  $b(t)$  à  $y(t)$  :

$$\underline{s}(t) = s(t) + b(t) - \underline{b}(t)$$

$\underline{b}(t)$  est l'estimation du bruit dans l'intervalle  $[t_1, t_m]$ . Il est évident que l'estimation du signal  $s(t)$  dépend de l'estimation du bruit  $\underline{b}(t)$ . Le problème de l'estimation du bruit dans l'intervalle  $[t_1, t_m]$  peut être considéré comme un problème d'interpolation. En général, le problème de l'interpolation peut être résolu par l'utilisation de méthodes non adaptatives souvent polynômiales (Lagrange). Malheureusement, ces méthodes sont mal adaptées au cas où les signaux sont essentiellement composés d'éléments quasi monochromatiques. L'apparition de méthodes paramétriques coïncide avec le développement des recherches sur la modélisation et les méthodes numériques d'estimation. Certains auteurs proposent alors des méthodes de restauration d'un échantillon unique dans le cas d'un modèle autorégressif en minimisant l'erreur d'interpolation [1], d'autres proposent une technique reposant sur la minimisation de l'énergie de l'erreur en dehors de la bande de fréquence de base occupée par le signal [2]. En effet, cette dernière méthode donne de bons résultats dans le cas d'un nombre relativement petit d'échantillons à interpoler (inférieur à 5) et est très sensible à la présence de bruit.



## 2) Présentation de la méthode

Soit  $y(k)$ ,  $k \in [0, N-1]$  une réalisation d'un processus aléatoire discret qui peut être modélisé par un modèle autorégressif d'ordre  $p$ .

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_p y_{k-p} = \varepsilon_k \quad (1)$$

$\varepsilon_k$  est un bruit blanc gaussien  $(0, \sigma^2)$ .

Les échantillons sont supposés inconnus dans l'intervalle  $[k_1, k_m]$  (fig 1) avec :

$$0 < p < k_1 < k_m < N - p - 1$$

où  $N$  est le nombre total d'échantillons de la réalisation.

Nous proposons d'estimer ces échantillons.

La loi de vraisemblance de l'échantillon  $y_0 \dots y_{N-1}$  s'écrit :

$$L(y_0 \dots y_{N-1}) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sigma^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ y_k + \sum_{i=1}^p a_i y_{k-i} \right\}^2\right)$$

Comme il est de coutume d'effectuer, et compte tenu du fait qu'il a été démontré [3] que l'estimateur obtenu est asymptotiquement consistant, nous considérons les  $p$  premiers points comme des conditions initiales et écrivons :

$$L(y_p \dots y_{N-1} / y_0 \dots y_{p-1}) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{(N-p)/2} \sigma^{N-p}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=p}^{N-1} \left\{ y_k + \sum_{i=1}^p a_i y_{k-i} \right\}^2\right)$$

Il est clair toutefois que l'estimateur obtenu en maximisant cette expression n'est pas réellement maximum de vraisemblance, mais si le lecteur souhaite effectivement un tel estimateur, il pourra se référer à [4].

Le problème de l'estimation des coefficients du modèle et des échantillons manquants se résume à la minimisation de

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ y_k + \sum_{i=1}^p a_i y_{k-i} \right\}^2 \quad (2)$$

par rapport à  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , et aux échantillons manquants. On appellera  $\mathbf{x}$  le vecteur colonne formé de ces échantillons manquants et  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur colonne des paramètres

$$\mathbf{x} = [y_{k_1} \dots y_{k_m}]^T \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta} = [a_1 \dots a_p]^T.$$

Le problème est d'estimer conjointement  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\mathbf{x}$  en minimisant (2), expression que l'on appellera  $Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ . L'optimisation directe de  $Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$  semble difficile en raison du fait que cette expression contient des termes du 4<sup>ème</sup> ordre en les inconnues, du type :

$$a_i^2 y_{k-i}^2 \quad \text{où} \quad k-i \in [k_1, k_m]$$

Toutefois, cette forme est particulière: en effet, à  $\mathbf{x}$  connu, elle est quadratique en  $\boldsymbol{\theta}$ , et à  $\boldsymbol{\theta}$  connu, elle est quadratique en  $\mathbf{x}$ .

Nous avons retenu, une méthode d'optimisation par directions alternées dite méthode de Rosenbrock. Le principe de cette méthode est de partir d'un point initial  $\mathbf{x}_0$ , de minimiser par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$ , ce qui conduit à  $\boldsymbol{\theta}_1$ , puis de minimiser  $Q(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{x})$  par rapport à  $\mathbf{x}$ , afin d'obtenir  $\mathbf{x}_1$ , et d'itérer ainsi jusqu'à convergence de l'algorithme.

La minimisation par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  puis par rapport à  $\mathbf{x}$  conduit alors à la résolution de deux systèmes linéaires, en raison de la propriété énoncée précédemment.

## 3) Minimisation par rapport à $\boldsymbol{\theta}$

La minimisation de  $Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$  par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  est obtenue en annulant  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ . On obtient alors les équations de Yule-Walker.

Avec les notations précédemment utilisées, la condition d'optimalité s'écrit :

$$E[(y_{k-1} \dots y_{k-p})^T (y_{k-1} \dots y_{k-p})] \cdot \boldsymbol{\theta} = -E[(y_{k-1} \dots y_{k-p})^T \cdot y_k]$$

la stationnarité et l'ergodisme de  $\varepsilon_k$  nous permettent de remplacer l'opérateur espérance par une moyenne arithmétique. Les bornes de la sommation seront choisies selon la méthode utilisée pour l'estimation (de 0 à  $N+p-1$  pour la méthode de corrélation ou de  $p$  à  $N-1$  pour la méthode de covariance). Le choix de la méthode n'est pas crucial dès que  $N$  est grand, ce qui est le cas ici. En effet, Kay et Makhoul [5] ont montré que quelle que soit la méthode utilisée, la matrice de Fisher de l'estimateur des paramètres est asymptotiquement la même.

## 4) Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$

Ecrivons l'expression (1) sous la forme :

$$\sum_{i=0}^p a_i y_{k-i} = \varepsilon_k \quad \text{avec} \quad a_0 = 1$$

Il faut donc minimiser :

$$\sum_{k=p}^{N-1} \left\{ \sum_{i=0}^p a_i y_{k-i} \right\}^2 \quad (3)$$

par rapport à  $\mathbf{x} = (y_{k_1} \dots y_{k_m})$ .

(3) peut s'écrire :

$$\sum_{k=p}^{k_1-1} \left\{ \sum_{i=0}^p a_i y_{k-i} \right\}^2 + \sum_{k=k_1}^{k_m+p} \left\{ \sum_{i=0}^p a_i y_{k-i} \right\}^2$$

$$+ \sum_{k=k_m+p+1}^{N-1} \left\{ \sum_{i=0}^p a_i y_{k-i} \right\}^2$$



Il est aisé de constater que seul le deuxième terme dépend des inconnues  $y_{k_1} \dots y_{k_m}$ . Déterminons la dérivée de  $Q(\theta, \mathbf{x})$  par rapport à une inconnue particulière  $y_{k_1}$ .

$$\partial Q(\theta, \mathbf{x}) / \partial y_{k_1} = 2 \sum_{k=k_1}^{k_m+p} \left\{ \sum_{i=0}^p a_i y_{k-i} \right\} a_{k-k_1} \quad (4)$$

Il suffit alors d'annuler cette expression

$$\forall k_1 \leq k_1 \leq k_m.$$

Nous pouvons ré-écrire (4), en prenant en compte le fait que  $a_k \neq 0$  seulement si  $0 \leq k \leq p$

$$\partial Q(\theta, \mathbf{x}) / \partial y_{k_1} = 2 \sum_{k=k_1}^{k_1+p} \left\{ \sum_{i=0}^p a_i y_{k-i} \right\} a_{k-k_1} = 0 \quad (5)$$

et après le changement d'indice  $j = k - k_1$

$$\partial Q(\theta, \mathbf{x}) / \partial y_{k_1} = 2 \sum_{i=0}^p \left\{ \sum_{j=0}^p a_i a_j y_{k_1+j-i} \right\} = 0 \quad (6)$$

$$\forall k_1 \in [k_1, k_m]$$

Il s'agit d'un système linéaire de  $k$  équations à  $k$  inconnues, que l'on peut mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = -\mathbf{B} \quad (7)$$

en effet, dans (6) apparaissent  $y_{k_1} \dots y_{k_m}$ , mais aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= [y_{k_1-p} \dots y_{k_1-1}]^T \\ \text{ainsi que} \quad \mathbf{V}_2 &= [y_{k_m+1} \dots y_{k_m+p}]^T. \end{aligned}$$

Après développement et identification, en écrivant (7) sous la forme :

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = -\mathbf{B}_1\mathbf{V}_1 - \mathbf{B}_2\mathbf{V}_2$$

(8)

nous obtenons :

$$M_{ij} = \sum_{l=0}^{p-li-jl} a_l \cdot a_{l+li-jl} \quad \text{si } li-jl \leq p$$

$$M_{ij} = 0 \quad \text{si } li-jl > p$$

$$\text{pour } i = 1 \dots m, j = i \dots m.$$

$$B_{1ij} = \sum_{l=0}^{j-i} a_l a_{l+p-j+i} \quad \text{si } j \geq i$$

$$B_{1ij} = 0 \quad \text{si } j < i$$

$$\text{pour } i = 1 \dots m, j = i \dots p.$$

$$B_{2ij} = B_{1(m+1-i, p+1-j)}$$

$$\text{pour } i = 1 \dots m, j = i \dots p.$$

-Test d'arrêt de l'algorithme : lors de la présentation de l'algorithme nous n'avons pas précisé le test d'arrêt. En effet, il serait raisonnable de comparer par exemple  $\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \| / \| \mathbf{x}_k \|$  à une valeur seuil, mais dans la pratique, on constate que l'algorithme converge en un nombre très restreint d'itérations, aussi préférons nous imposer ce nombre.

## 5 ) Résultats obtenus

La méthode d'interpolation décrite ci dessus a été appliquée sur des signaux de synthèse engendrés à partir d'un modèle autoregressif d'ordre 10. La figure 2 montre le résultat obtenu dans le cas  $N = 500$  et le nombre d'échantillons inconnus = 50.

Afin de mesurer les performances de la méthode on utilise l'erreur quadratique moyenne d'interpolation donnée par :

$$\hat{\epsilon} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=k_1}^{k_m} (y_j - \hat{y}_j)^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2}$$

Les différentes simulations que nous avons effectuées ont montré que l'erreur d'interpolation dépend beaucoup de la bande passante du signal à interpoler. Afin de le vérifier, nous avons calculé cette erreur dans le cas d'un processus AR d'ordre 2, en fonction du module  $\rho$  donnant la position du pôle dans le plan complexe, l'argument étant fixé à  $\pi/4$ . La figure 3 montre le gain en rapport signal sur bruit ( $-20\text{Log}_{10}(\hat{\epsilon})$ ) en fonction de  $\rho$ . 500 réalisations indépendantes ont été utilisées pour la statistique. Le nombre d'échantillons à interpoler est de  $m = 10$  (courbe a) et  $m = 20$  (courbe b). On remarque que lorsque  $\rho$  est voisin de 0, ce qui correspond à une bande passante plus large, le gain en rapport signal sur bruit est très faible. Ce gain croît avec  $\rho$  et on arrive à un gain de 16 db pour  $\rho = 0.96$  et  $m = 10$ . On remarque également que pour  $m = 10$  le gain en rapport signal sur bruit est plus important que pour  $m = 20$ .

La figure 4 montre l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre total d'échantillons utilisés pour l'interpolation, pour un nombre d'échantillons manquants fixé à  $m = 10$  (courbe a) et  $m = 50$  (courbe b), pour un processus AR (10). On remarque qu'il existe un nombre minimal d'échantillons  $N_{\min}$  pour obtenir des performances satisfaisantes. Une augmentation du nombre



d'échantillons par rapport à  $N_{min}$  ne diminue plus de manière significative l'erreur d'interpolation.

Cette méthode a été utilisée pour filtrer des signaux impulsionnels noyés dans un bruit additif à bande étroite, signaux obtenus lors du contrôle par courants de Foucault de tubes de générateur de vapeur de centrales PWR. Les résultats sont présentés figure 5. Le rapport signal sur bruit est sensiblement amélioré.

**6) Conclusion**

La méthode d'interpolation peut être employée avec succès aussi bien pour l'estimation de signaux impulsionnels noyés dans un bruit modélisable par un processus AR d'ordre fini, que pour l'interpolation d'échantillons manquants d'un processus AR d'ordre fini et à bande étroite.

Les résultats ont montré également que l'erreur d'interpolation est fonction de la largeur de bande du signal modélisé et du nombre total d'échantillons utilisés pour l'interpolation. L'algorithme converge en un nombre très restreint d'itérations. L'inconvénient de l'algorithme peut être sa non causalité.

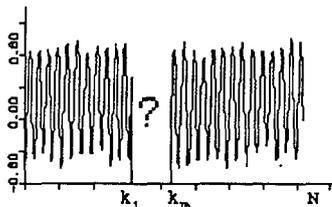


Figure 1

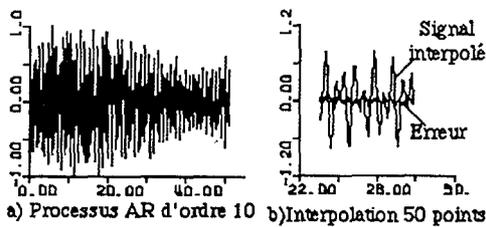


Figure 2

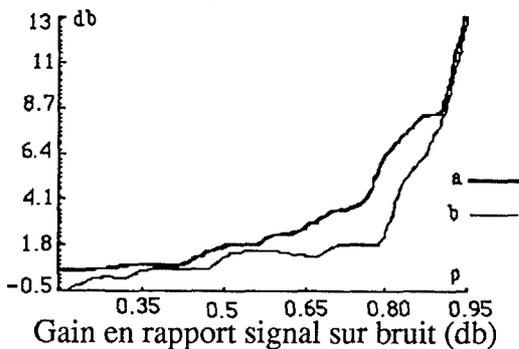


Figure 3

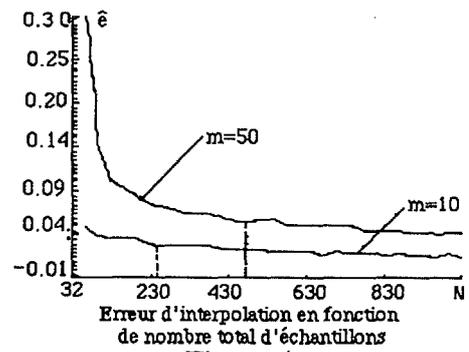
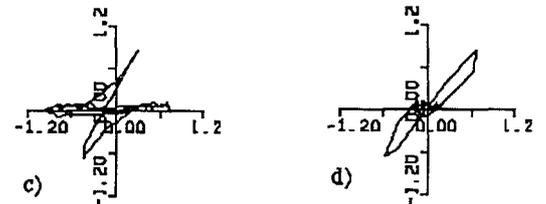
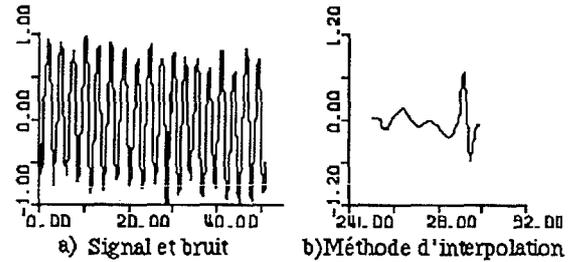


Figure 4



Signal réel et Lissajous avant / après traitement  
Figure 5

**Références :**

- [1] S. M. Kay : "Some Results in Linear Interpolation Theory", IEEE ASSP Vol 31, pp 746-749 June 1983.
- [2] A.J.E.M Janssen and L.B. Vries "Interpolation of Band-limited Discrete Time Signals by Minimizing Out-of-band Energy", Proc ICASSP' 84 , San Diego.
- [3] G. Goodwin, R. Payne "Dynamic System Identification and Experiment Design Analysis" , N.Y. :Academic, 1977.
- [4] B. Cernuschi, J.D. Rogers "On the Exact Maximum Likelihood Estimation of Gaussian A.R. Processes", IEEE ASSP Vol 36, pp 922-924, June 1988.
- [5] S.M. Kay, J. Makhoul "On the Statistics of the Estimated Reflection Coefficients of an A.R. Process", IEEE ASSP Vol 31, pp 1447-1455, Dec. 1983.