INTERET DE LA DECOMPOSITION EN VALEUR SINGULIERE (SVD) EN TRAITEMENT DU SIGNAL SONAR

R. FOKA

THOMSON-SINTRA A.S.M. 1, AV. ARISTIDE BRIAND
94117 ARCUEIL CEDEX FRANCE

RESUME

Cet article présente une méthode de goniométrie bande étroite, appliquée à une antenne linéaire équirépartie et basée sur l'exploitation directe de la matrice rectangulaire des données (DDA). Le modèle d'espace d'état et les propriétés de la Décomposition en Valeur Singulière (SVD) basés sur des algorithmes de réalisation font de la nouvelle méthode (la méthode DDA) une approche très prometteuse. Des simulations sur les algorithmes DDA démontrent sa robustesse par rapport aux méthodes basées sur l'exploitation de la matrice de covariance.

ABSTRACT

In this paper,the Direct Data Approximation (DDA) of stochastic system identification is applied to the linear equal spaced array narrowband source direction finding problem. The power of state space parametrization and the numerical properties of the Singular Value Decomposition (SVD) based on realization algorithms together make the new method (the DDA method) very exciting. Simulations performed on the DDA algorithm demonstrate its numerical robustness compared to existing methods based on the covariance matrix analysis.

INTRODUCTION

La Décomposition en Valeur Singulière (SVD), un des outils de base et sans aucun doute le plus important en algèbre linéaire numérique, trouve des applications en nombre croissant dans le domaine du traitement du signal pour les problèmes de Communication, Radar, Sonar, Parole et Image.

Dans cet article,c'est l'utilité de la SVD dans le traitement du signal moderne sonar qui va retenir notre attention. En effet dans ce domaine les données à traiter peuvent être représentées par des vecteurs et le traitement linéaire de ces données est équivalent aux opérations matricielles .D'un point de vue pratique la SVD est utile pour :

- résoudre un système linéaire dans lequel le nombre de données est supérieur au nombre d'inconnues (Trajectographie passive)
- évaluer approximativement le rang d'une matrice, calculer ses éléments propres et sa pseudo-inverse (Goniomètrie, TAM, Traitement Adaptatif).

Le traitement du signal moderne sonar est généralement fondé sur une exploitation des informations contenues:

- soit dans la matrice de covariance des capteurs(algorithmes de Goniomètrie [1], TAM [2]---)
- soit dans la matrice rectangulaire des données.

Dans le cas de la matrice de covariance ,on est souvent confronté à un problème de conditionnement (situation dans laquelle le rapport de la plus grande valeur propre à la plus petite est très grand). En outre le mauvais conditionnement amplifie les erreurs d'estimation de la matrice ainsi que les autres erreurs du système.

La décomposition en valeur singulère (SVD) est par contre un outil bien adapté aux matrices rectangulaires des données, et elle généralise la méthode de décomposition en valeur propre.

Nous analyserons dans cet article les conditions

d'utilisation de la SVD dans les méthodes Haute Résolution, en exploitant directement la matrice rectangulaire des données; en outre nous utiliserons le modèle d'espace d'état pour une approximation directe des données.
L'avantage principal d'une telle approche est d'éviter d'avoir à estimer la matrice de covariance des capteurs, ce qui réprésente un gain de calcul non négligeable.
L'approche SVD des problèmes sonar est très intéressante et on propose en conclusion des extensions possibles à d'autres applications Sonar.

DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES (SVD)

Il est bien connu dans la littérature d'analyse numérique [3-4] que la méthode de décomposition en valeur singulière de toute matrice , comparée aux autres algorithmes numériques, a de meilleures propriétés mathématiques et spécialement dans des applications pratiques où on est souvent confronté à un problème de conditionnement.

Toute matrice A mxn avec m>n peut être décomposée de la façon suivante :

$$A = U\ \Sigma\ V^+$$

où Σ est une matrice diagonale dont les éléments sont positifs; ils sont appelés valeurs singulières de A. U et V sont des matrices dont les vecteurs colonnes sont soit orthonormaux soit nuls. Ils sont appelés vecteurs singuliers à gauche et à droite de A. Le symbole + représente la transconjugaison.

Les valeurs singulières de A sont les racines carrées positives des valeurs propres de A^+A et les vecteurs singuliers de A sont les vecteurs propres orthonormaux de A^+A.

Posons $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n)$
et supposons $\sigma 1 > \sigma 2 > \ldots > \sigma n > 0$
Si le rang de A est p alors $\sigma p{+}1 = \sigma p{+}2 = \sigma n = 0$

Quelques propriétés

$$\text{si } A = U\ \Sigma\ V^+ = [U_1 \ ! \ U_2]\ [\Sigma 1 \ ! \ 0] \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix}$$

$$\text{alors } A = U_1\ \Sigma_1\ V_1^+$$

$$A = \Sigma_{i=1}^{n}\ \sigma_i\ u_i\ v_i$$

La pseudo-inverse de A s'écrit

$$A^{\#} = V_1\ \Sigma_1^{-1}\ U_1^+$$

Grâce à la SVD on introduit facilement la notion d'Analyse en Composantes Principales (ACP) qui joue un rôle important en approximation;
$\sigma_k\ u_k\ v_k^+$ désigne la k ième composante principale.

MODELISATION DU SIGNAL

Considérons une antenne linéaire de L capteurs équirépartis. Elle reçoit p ondes planes à des angles θ_k, k=1,p . La propagation est supposée homogène et les signaux à bande étroite. Le signal reçu sur le capteur i peut s'écrire :

$$(1)\quad y^i(t) = n_i(t) + \Sigma_{k=1}^{p}\ ak(t) \times \exp-\{j(i-1)2\ pi\ (d/\lambda_0)\ \sin(\theta_k - \omega_0 t)\}$$

où d est l'espace entre capteurs, la longueur d'onde, $n_i(t)$ le bruit additif. Le bruit est un processus gaussien centré, décorrélé de capteur à capteur, indépendant du signal, et de variance σ^2. Posons :

$$Y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_L(t)\}_t$$

$$S(t) = \{a_1(t)\exp(j\omega_0 t), \ldots, a_L(t)\exp(j\omega_0 t)\}_t$$

$$D = \{D_{\theta 1}, \ldots, D_{\theta p}\}_t$$

$$D_{\theta k} = \{1, \exp(-j\tau_k), \ldots, \exp(-j(i-1)\tau_k)\}_t$$

$$\tau_k = 2\ pi\ (d/\lambda_0)\ \sin\theta_k$$

$$N(t) = \{n_1(t), \ldots, n_L(t)\}_t$$

D'après (1), on a $Y(t) = DS(t) + N(t)$.

METHODE D'APPROXIMATION DIRECTE DES DONNEES (DDA)

De nombreux chercheurs ont proposé des méthodes d'approximation [4-5] mais ils ont tous travaillé sur la matrice de covariance. La méthode (DDA) travaille directement sur la matrice rectangulaire des données en sortie des capteurs et on évite ainsi d'avoir à estimer la matrice de covariance des capteurs.

Cependant, la SVD de Y est théoriquement équivalente à la décomposition en éléments propres de YY^+. A partir du moment où on prend $R = YY_+$ comme un estimateur de la matrice de covariance des capteurs, une approximation de Y est théoriquement la même qu'une approximation de la matrice de covariance des capteurs R. Ce qui peut arriver, c'est que R ne soit pas un bon estimateur de R ou alors qu'on utilise inefficacement les données. C'est dans cette optique que ULRYCH et CLAYTON [6], TUFTS et KUMARESEN [4] ont proposé d'autres estimateurs de R.

MODELISATION DU SIGNAL BASEE SUR LA SVD

On suppose que les signaux reçus sur l'antenne à un instant t sont la sortie d'un modèle ARMA, dont les pôles sont situés sur le cercle unité. Le signal non bruité reçu sur le capteur k est un processus de Markov du $p^{ième}$ ordre, il peut être prédit par la donnée de $x_{k-1}(t),\ldots,x_{k-p}(t)$. La formulation d'espace d'état [2] s'en déduit comme :

$$z_{k+1} = F\, z_k$$
$$x_k = h\, z_k$$

où $z1 = (\, s_1(t),\ldots,s_p(t))^t$
$F = \mathrm{diag}(\, \exp(-j\tau_1),\ldots,\exp(-j\tau_p))$
$h = (1,\ldots\ldots,1)$

Il faut noter que le choix de la représentation d'état n'est pas unique, mais les valeurs propres de F seront toujours les $\exp(-j\tau_i)$, $i= 1,\ldots,p$.

Soit $X = (\, x_1,x_2,\ldots,x_L\,)^t$.
On peut l'écrire sous la forme :

$$X = (\, h,hF,\ldots,hF^{L-1}\,)^t\, z_1 = \Theta\, z_1$$

En théorie des systèmes, Θ est appelée la matrice d'observabilité, et si les z_i sont distincts, les p colonnes de Θ sont indépendantes.

LA METHODE DDA (Directe Data Approximation).

L'objectif de la méthode DDA est de travailler directement sur la matrice rectangulaire des données et d'utiliser l'Analyse en Composantes Principales (ACP) basée sur la SVD pour construire un estimateur de rang p de cette matrice Y; l'utilisation du modèle d'état permet ensuite d'identifier le signal.

ETAPE 1 DE L'ACP.

On met en oeuvre une décomposition en valeurs singulières (SVD) sur Y et on range les valeurs singulières (σ_k, $k= 1,\ldots,l$) par ordre décroissant :

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix}$$

Une approximation de rang p de Y est : $U_1\Sigma_1V_1^+$ et l'erreur d'approximation au sens de la norme spectrale est : $\|\, Y - U_1\, \Sigma_1\, V_1^+\, \|_E = \sigma_{p+1}$

ETAPE 2 DE L'ACP.

Pour des raisons de stabilité numérique, on choisit :

$$\Theta = U_1\, \Sigma_1^{1/2}\ .$$

Idéalement, la matrice d'observabilité Θ devrait avoir la structure $(\ h,\, hF,\, hF^2\ ,\ldots.)^t = \Theta^\uparrow$. Cependant $U_1\Sigma_1^{1/2}$ ne possède pas cette propriété. On a alors une approximation de la matrice de transition :

$$F \simeq \Theta\#\ \Theta^{up} \qquad \text{où } \Theta\# = (\ \Theta^t\ \Theta\ )^{-1}\ \Theta^t$$

et "up" signifie que l'on décale d'une ligne vers le haut et que l'on ajoute une dernière ligne de zéros. Cependant, on peut trouver une solution exacte en définissant les opérateurs "$\uparrow$" et "$|$" :

$$\Theta^\uparrow = (\ h,\ hF,\ldots,hF^{L-2}\ ) \qquad \Theta^| = (\ hF,\ldots,hF^{L-1}\ )$$

Ce sont des matrices de dimensions (L-1, p)

$$F = (\ \Theta^\uparrow\ )\#\ \Theta^|.$$

Les valeurs propres de F donnent les directions des sources car :

$$F = \mathrm{diag}(\ \ldots,\ e^{-j\tau i},\ldots\ )$$

$$\text{avec} \quad \tau_i = (\ 2pi/\lambda_0\ )\ d\ \sin\Theta_i$$

Or $F^{\sim} = \Theta\ F\ \Theta^{-1}$, le module de l'enveloppe peut être estimé par : $|\ a_i\ | = \|\ h^i\ \Theta\ \|^{1/2}$
où h désigne la premiere ligne de la matrice d'observabilité Θ.

RESULTATS DES SIMULATIONS.

Dans les essais effectués sur synthétiques, il apparaît que la DDA fournit d'aussi bons résultats que les méthodes basées sur l'exploitation des matrices de covariance : fig 1a et 1b. On a une antenne linéaire constituée de vingt capteurs équidistants de d = 0.52 m ; trois bruiteurs de même amplitude et d'angle d'arrivée 20°, 45°, 50°; le rapport signal sur bruit est nul et l'étude se fait sur 100 échantillons avec 100 tirages de bruit; la fréquence étudiée est 800 Hz.

Les figures 2a et 2b représentent les résultats sur signaux réels; ce sont des enregistrements provenant d'une flûte tractée composée de 16 capteurs à 0.52 m; on a 64 séquences, chacune d'une durée de 20 secondes et composée de 100 échantillons; la fréquence étudiée est 800 Hz.

CONCLUSION

Nous avons montré dans cet article comment on peut combiner la puissante notion d'espace d'état et les propriétés de l'outil SVD pour modéliser les données.

L'approche ACP développée ici utilise la SVD pour estimer les paramètres d'espace d'état dans les coordonnées "balancées". Les algorithmes DDA travaillent directement sur la matrice rectangulaire des données et ceci présente des avantages numériques. L'approche SVD développée dans cet article est une approche très riche qui a d'autres applications sonar : Trajectographie passive, Goniométrie, Traitement d'antenne adaptatif,... Pour de telles applications en temps réel, on a besoin de structures spécialisées VLSI pour l'approche SVD. Heureusement, les algorithmes composant la SVD sont basés sur des séquences des opérations CORDIC bien adaptées aux réseaux systoliques ou au calcul parallèle.

REFERENCES

[1] G.BIENVENU, L.KOPP : "Principe de la goniométrie passive adaptative", colloque GRETSI, Nice, 1979, pp.106-110.

[2] R.FOKA, S.Y.KUNG, C.K.LO : "Approximation Approach to Coherent Source Direction Finding", ICASSP 86, TOKYO, pp.193-196

[3] Klema, Virginia C. and Alan J.LAUB : "The singular value decomposition : its computation and some application", IEEE Trans. on Automatic Control, AC-25, pp.164-176, 1980

[4] TUFTS Donald W. and Ramdas Kumaresan : "Singular value decomposition and improved frequency estimation using linear prediction", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-30, pp. 671-675, 1982

[5] S.Y.KUNG and K.S.ARUN : "Approximate realization methods for ARMA spectral estimation", IEEE Int-symp Circuits Syst., Newport Beach, California, May 1983

[6] T.J.ULRYCH and R.W.CLAYTON,"Times series modeling maximum entropy", Phys. Earth Planet Interiors,12 : pp.188-200, 1976

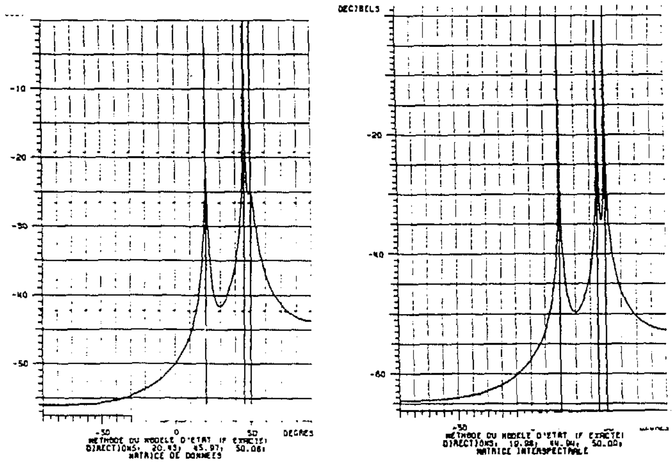

Fig. 1

Fig. 2a.

DDA

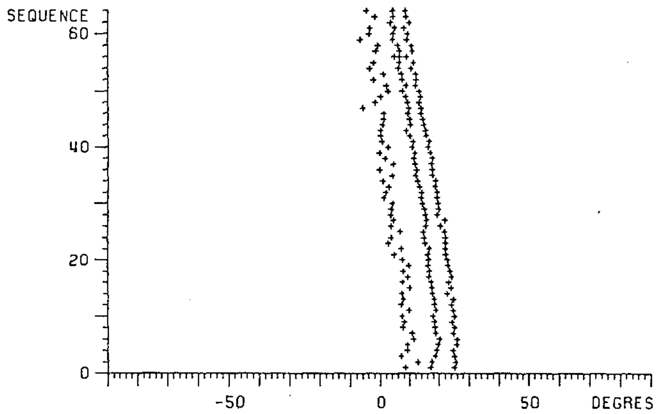

Fig.2b.

MATRICE INTERSPECTRALE