ESTIMATION SPECTRALE 2-D

Sylvie MAYRARGUE

CNET/PAB/RPE
38-40 rue du Général-Leclerc
92131 Issy-les-Moulineaux

RESUME Cet article traite du problème de l'estimation spectrale à deux dimensions, plus particulièrement dans deux cas : l'estimation des angles d'arrivée et des fréquences d'ondes planes à l'aide d'un réseau linéaire de capteurs (analyse spectrale spatio-temporelle) , et l'estimation des directions d'arrivée repérées par deux angles dans l'espace à trois dimensions, à l'aide d'un réseau matriciel de capteurs. On montre que ce problème peut être résolu en généralisant la méthode de Kung à 2-D, si les sources ne sont pas totalement corrélées . On montre de plus qu'alors il suffit de deux capteurs dans l'une des dimensions, pourvu que le nombre de capteurs dans l'autre dimension soit au moins égal au nombre de sources. Dans le cas où les sources sont totalement corrélées, nous présentons également une méthode permettant de retrouver les sources, sans effectuer de moyennage spatial.

SUMMARY This paper deals with 2-dimensional spectral estimation , especially in two cases : estimation of plane waves angles-of-arrival and frequencies using a linear array of sensors (spatio-temporal spectral analysis) and bearing estimation in the 3-D space (2 angles are needed to determine each source) using a planar rectangular array. We show that if the sources are non totally correlated this problem can be solved using a 2-D generalization of Kung's method .Moreover, we show that the method requires only 2 sensors in one dimension, provided that the number of sensors in the other dimension is at least equal to the number of sources. If the sources are totally correlated, we present a method to retrieve the sources, without spatial smoothing.

I- INTRODUCTION

Le problème de l'estimation spectrale 2-D se pose dans deux cas différents :

1) l'analyse spatio-temporelle ([1],[2]) : il s'agit de rechercher les angles d'arrivée et les fréquences d'ondes planes arrivant sur un réseau linéaire de capteurs. Chaque capteur est suivi d'une ligne à retard permettant un échantillonnage temporel. L'ensemble de mesures est donc à 2 dimensions (spatiale et temporelle) .

2) la recherche des directions d'arrivée d'ondes planes, à la même fréquence supposée connue, dans un espace à 3 dimensions. Il faut donc 2 angles pour déterminer une direction. Si le réseau de capteurs est plan, et que les capteurs forment un réseau matriciel d'antennes, le problème est une généralisation à 2 dimensions du cas classique de la détermination d'angles d'arrivée dans un seul plan par un réseau linéaire de capteurs.

Les deux modèles sont exposés en détail dans le §II, où il est montré qu'ils sont formellement équivalents.

Dans [1] , les auteurs introduisent la "matrice de corrélation spatio-temporelle" des échantillons, et montrent que pour des sources non totalement corrélées, la méthode MUSIC ([3]), appliquée aux vecteurs propres de cette matrice, se généralise naturellement au cas 2-D, et permet de retrouver directions d'arrivée et fréquences. Cependant, MUSIC-2D nécessite une minimisation non-linéaire dans un espace à 2 dimensions, ce qui demande beaucoup de temps calcul.

Nous montrons (§III) qu'en utilisant le principe de la méthode de Kung ([4],[5]), et en le combinant avec une méthode décrite par Farrier ([6]), on peut obtenir les sources directement, sans minimisation.

De plus, nous montrons qu'il suffit de 2 capteurs dans une direction pour retrouver les sources, pourvu que le nombre de capteurs dans l'autre direction soit au moins égal au nombre de sources.

Dans le cas 2) , il peut arriver que les sources soient complètement corrélées. Alors, la méthode de Kung ne peut plus s'appliquer directement. Nous présentons une méthode qui permet, sans aucune hypothèse sur la géométrie des capteurs, de retrouver les sources.

II-POSITION DU PROBLEME

Nous nous intéressons à deux problèmes d'estimation 2-D en traitement d'antennes, qui admettent, comme nous allons le voir, une formulation commune, en termes de recherche de fréquences de bi-sinusoïdes.

<u>1er cas : Analyse Spectrale Spatio-Temporelle</u> ([1],[2])

p sources à bande étroite , centrées sur les fréquences f_i ($i = 1, \dots , p$), arrivent sous des angles θ_i ($i = 1, \dots , p$) sur un réseau linéaire de M capteurs supposés identiques. Chaque capteur est muni d'une ligne à retard qui permet d'échantillonner le signal tous les T instants, et ce N fois. On suppose que toutes les fréquences f_i sont contenues dans une bande limitée, de manière à pouvoir utiliser la notion d'enveloppe complexe du signal résultant .

La sortie du m° capteur, au n° instant d'échantillonnage s'écrit:

$$x_{m,n} = X_m(t-nT) = \sum_{i=1}^{p} a_i s_i\,(t-\tau_{i,m}-nT) + n_m\,(t-nT) \qquad (1)$$

$m = 0, \dots , M-1$
$n = 0, \dots , N-1$

a_i est l'amplitude complexe de la i° source
$s_i(\ )$ le signal émis par la i° source
$\tau_{i,m}$ le temps de propagation de la i° source entre le 1er capteur et le m+1° capteur
$n_m(\ )$ le bruit additif sur le m+1° capteur.

Puisque les sources ont été supposées à bande étroite, on peut écrire :

$$x_{m,n} = \sum_{i=1}^{p} a_i s_i(t)\exp(-2\pi j f_i \tau_{i,m} - 2\pi j f_i nT) + n_m(t-nT) \qquad (2)$$

Comme $\tau_{i,m} = d_m \sin\theta_i / c$, où c est la vitesse de la lumière, et d_m la distance entre le 1er et le m+1° capteur, et que $f_i = c/\lambda_i$ où λ_i est la longueur d'onde de la i° source, on a :

$f_i\,\tau_{i,m} = d_m \sin\theta_i / \lambda_i$

$$x_{m,n} = \sum_{i=1}^{p} a_i s_i(t)\exp\left(-2\pi j \frac{d_m \sin\theta_i}{\lambda_i} - 2\pi j f_i nT\right) + n_m(t-nT) \qquad (3)$$

On suppose que les signaux reçus sont échantillonnés simultanément sur les m capteurs, à des instants $t_1, \dots , t_L$. De cette façon, on obtient L "snapshots", consistant chacun en MN échantillons.

<u>2ème cas : Estimation d'angles d'arrivée à 2 dimensions</u>

P sources à bande étroite, centrées sur une fréquence f_0 connue, arrivant sous des angles polaires (φ_i , θ_i) ($i = 1, \dots , p$) sur un réseau plan matriciel de NxM capteurs (voir Fig.1)

Le signal reçu sur le capteur situé à l'intersection de la m+1° ligne et de la n+1° colonne du réseau s'écrit

$$x_{m,n}(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i(t)\exp\left(2\pi j \frac{d_m \sin\alpha_i}{\lambda_0} + 2\pi j \frac{\Delta_n \sin\beta_i}{\lambda_0}\right) + n_{m,n}(t) \qquad (4)$$

où :
$m = 0, \dots , M-1$
$n = 0, \dots , N-1$
a_i est l'amplitude complexe de la i° source
λ_0 la longueur d'onde associée à f_0
d_m la distance entre la m° ligne et la 1ère ligne de capteurs
Δ_n la distance entre la n° colonne et la 1ère colonne de capteurs
α_i (resp. β_i) l'anle entre la direction de la i° source et celle orthogonale aux colonnes (resp. lignes) de la matrice des capteurs.
$n_{m,n}(t)$ le bruit sur le capteur (m,n) à l'instant t.

Une transformation simple permet de passer des (α, β) aux (φ , θ) :

φ = Arctg (cos β / cos α) ;

θ = Arcsin (cos ^{2} β + cos^2 α)

(Il faut supposer que les sources sont situées d'un même côté par rapport au réseau de capteurs pour éviter toute ambigüité sur le signe de sinθ).

On supposera que dans l'une au moins des deux directions, les antennes sont équiréparties, par exemple la direction des colonnes. Dans ce cas $\Delta_n = n\,\Delta$, et (4) devient :

$$x_{m,n}(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i(t)\exp\left(2\pi j\frac{d_m \sin\alpha_i}{\lambda_0} + 2\pi j\frac{n\,\Delta\sin\beta_i}{\lambda_0}\right) + n_{m,n}(t) \qquad (5)$$

Différents instants t_1, ... , t_L fournissent L "snapshots" , consistant chacun en les MN échantillons mesurés sur les MN capteurs.

On remarque que le cas 1) et le cas 2) admettent le même formalisme, i.e. des échantillons donnés par :

$$x_{m,n}(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i(t)\exp(2\pi j\, d_m \nu_i + 2\pi j n\,\psi_i) + n_{m,n}(t) \qquad (6)$$

Dans la suite , nous considèrerons les échantillons sous cette forme.

III GENERALISATION DE LA METHODE DE KUNG AU CAS 2-D :

On écrit la relation (6) sous forme vectorielle (en omettant le t pour simplifier l'écriture) :

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,M} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{2,M} \\ \vdots \\ x_{N,1} \\ \vdots \\ x_{N,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{2\pi j d_1 \nu_1} & \cdots & e^{2\pi j d_1 \nu_p} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j d_{M-1}\nu_1} & \cdots & e^{2\pi j d_{M-1}\nu_p} \\ e^{2\pi j \psi_1} & \cdots & e^{2\pi j \psi_p} \\ e^{2\pi j (d_1\nu_1 + \psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_1\nu_p + \psi_p)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_1 + \psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_p + \psi_p)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (N-1)\psi_1} & \cdots & e^{2\pi j (N-1)\psi_p} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_1 + (N-1)\psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_p + (N-1)\psi_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{1,1} \\ n_{1,2} \\ \vdots \\ n_{1,M} \\ n_{2,1} \\ n_{2,2} \\ \vdots \\ n_{2,M} \\ \vdots \\ n_{N,1} \\ \vdots \\ n_{N,M} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Dans le 1er cas, ceci est la matrice spatio-temporelle des échantillons ([1],[2]).

On note (7) :

$$X = S\,A + N \qquad (8)$$

Si l'on calcule la matrice de covariance de X :

$$R = E(XX^+) = S\,E(AA^+)\,S^+ + \sigma^2 I \qquad (9)$$

où σ^2 est la covariance du bruit, supposé identique sur tous les capteurs, indépendant sur chaque capteur, et stationnaire .

A^+ désigne la transposée-conjuguée de la matrice A .

Nous supposerons dans ce paragraphe que $E(AA^+)$ est de rang p (sources non totalement corrélées). Alors, $SE(AA^+)S^+$ est également de rang p. Donc, d'après (9), R admet NM - p valeurs propres minimales égales à σ^2. Les vecteurs propres V_i (i = 1, ... , p) associés aux <u>autres</u> valeurs propres de R engendrent le même espace que les vecteurs colonnes de S (espace "signal") . Les vecteurs propres V_i (i= p+1, ... , NM) associés à σ^2 sont orthogonaux aux précédents et engendrent l'espace "bruit". Ces considérations sont à la base des méthodes d'analyse spectrale à haute-résolution.

On note :

$$R = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \sigma^2)\, V_i V_i^+ \; + \; \sigma^2 \sum_{i=p+1}^{NM} V_i V_i^+ \qquad (10)$$

où λ_i (i = 1, ... , p) sont les valeurs propres non nulles de $S\,E(AA^+)\,S^+$.

En réalité, R, qui est une espérance mathématique, doit être estimée : on prend

$$\hat{R} = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} X(t_k)X^+(t_k)$$

puis on calcule ses vecteurs propres $\hat{V}_i$.

Dans[1], pour retrouver les (ν_i ,φ_i) , les auteurs utilisent la méthode MUSIC ([6]) généralisée à 2D. Cette méthode consiste à rechercher un vecteur W(ν ,φ) ayant la forme d'une colonne de S :

$[1, e^{2\pi j d_1 \nu}, \ldots , e^{2\pi j d_{M-1}\nu}, e^{2\pi j\psi}, e^{2\pi j(\psi + d_1\nu)}, \ldots , e^{2\pi j(\psi + d_{M-1}\nu)}, \ldots\ldots\ldots , e^{2\pi j(N-1)\psi}, e^{2\pi j((N-1)\psi + d_1\nu)}, \ldots, e^{2\pi j((N-1)\psi + d_{M-1}\nu)}]^T$

et qui soit tel que :

$$W^+(\nu, \psi) \sum_{i=p+1}^{NM} V_i V_i^+ \; W(\nu, \psi) \quad \text{soit} \quad \text{min imum} \qquad (11)$$

En l'absence de bruit, ce minimum est nul, et est atteint pour (ν ,φ) = (ν_i ,φ_i) (i = 1, ... , p). En présence de bruit, on obtient des estimations ($\hat{\nu}_i$,$\hat{\varphi}_i$) des (ν_i ,φ_i).

Cependant, pour minimiser la forme quadratique (11), il faut effectuer un balayage dans un espace à 2 dimensions, ce qui demande beaucoup de temps calcul.

Remarque : on voit qu'en théorie un nombre total de capteurs NM égal à p+1 suffit pour retrouver les sources.

On peut éviter ces calculs en adaptant la méthode de Kung à ce problème 2-D et en la combinant avec une méthode dérivée de celle de Farrier [5] dans le cas 1-D.

La méthode de Kung fait appel à des concepts de théorie des systèmes ([4], [5). Nous avons cependant montré ([7], [8]), qu'elle admettait une présentation plus simple, reposant sur une démonstration directe du résultat principal de la méthode . C'est cette présentation, qui , adaptée au cas 2-D, va permettre de retrouver les (ν_i ,φ_i).

Soit $V = [\, V_1 \mid V_2 \mid \ldots \mid V_p \,]$ la matrice formée des vecteurs propres "signal". Comme mentionné plus haut, V et S se déduisent l'un de l'autre par changement de base. On a donc la relation : V = SP , où P est une matrice pxp non singulière.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{2\pi j d_1 \nu_1} & \cdots & e^{2\pi j d_1 \nu_p} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j d_{M-1}\nu_1} & \cdots & e^{2\pi j d_{M-1}\nu_p} \\ e^{2\pi j \psi_1} & \cdots & e^{2\pi j \psi_p} \\ e^{2\pi j (d_1\nu_1 + \psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_1\nu_p + \psi_p)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_1 + \psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_p + \psi_p)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (N-2)\psi_1} & \cdots & e^{2\pi j (N-2)\psi_p} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_1 + (N-2)\psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_p + (N-2)\psi_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi j \psi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi j \psi_p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2\pi j \psi_1} & \cdots & e^{2\pi j \psi_p} \\ e^{2\pi j (d_1\nu_1 + \psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_1\nu_p + \psi_p)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_1 + \psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_p + \psi_p)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (N-1)\psi_1} & \cdots & e^{2\pi j (N-1)\psi_p} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_1 + (N-1)\psi_1)} & \cdots & e^{2\pi j (d_{M-1}\nu_p + (N-1)\psi_p)} \end{bmatrix}$$

On peut noter cette relation $S{\downarrow}\, D_\psi = S{\uparrow}$ (12)

Or, l'opération $\downarrow$ (resp. $\uparrow$) consiste à tronquer les M dernières (resp. M premières) lignes d'une matrice. Cette opération affecte les produits de matrice de la manière suivante :

$$V\downarrow = S\downarrow P \quad (13)$$
$$V\uparrow = S\uparrow P \quad (14)$$

(12),(13),(14) donnent :

$$V\downarrow \underbrace{(P D_\psi P^{-1})}_{F_\psi} = V\uparrow \quad (15)$$

Il suffit donc de résoudre le système linéaire surdéterminé multidimensionnel (15) pour obtenir une matrice F_ψ dont les valeurs propres sont les $e^{2\pi j\psi_i}$, (i=1, ... , p).Dans le cas sans bruit, la relation (15) est exacte. Dans le cas bruité, il faut résoudre aux moindres carrés la relation (15)':

$$\hat{V}\downarrow F_\psi = \hat{V}\uparrow \quad (15)'$$

d'où : $\hat{F}_\psi = (\hat{V}\downarrow)^{\#}\,\hat{V}\uparrow$, où # désigne la pseudo-inverse . Les valeurs propres de $\hat{F}_\psi$ sont des valeurs approchées des $e^{2\pi j\psi_i}$.

Toutefois, notons qu'il faut supposer p≤M, ainsi que tous les ν_i distincts pour que rang($V\downarrow$) = p, et donc que (15) ait une solution unique.

Il reste maintenant à déterminer les ν_i. Pour cela, on se sert de la relation V = SP (ou $S = VP^{-1}$) . P est la matrice des vecteurs propres de F_ψ, que l'on peut donc calculer en même temps que D_ψ. La relation $S = VP^{-1}$ permet alors de calculer S. Ce dernier point se trouve dans [5], dans le cas 1-D. Comme on connaît déjà les $e^{2\pi j\psi_i}$, la i° colonne de S , notée S_i, ne dépend que d'une seule indéterminée ν_i. Pour obtenir les ν_i à partir de S_i, on peut appliquer successivement à chaque S_i la méthode MUSIC-1D, qui prend une forme particulièrement simple pour la recherche d'une seule source, c'est-à-dire :

ν tel que $|W(\nu, \psi_i)^+ . S_i|^2$ maximum .

Si les d_i , (i = 0, ... , M-1) sont tous multiples d'une même quantité (antennes équiréparties) , on peut également utiliser d'autres méthodes d'analyse spectrale à haute-résolution (Kung[3],[4], Tufts-Kumaresan[9], etc...) .

On peut remarquer que ce qui précède est valable même pour N=2 (i.e. pour 2 antennes) , à condition que M soit supérieur ou égal au nombre de sources p.

IV-CAS OU LES SOURCES SONT TOTALEMENT CORRELEES (domaine spatial 2-D)

La méthode précédente ne s'applique plus, car les vecteurs propres "signal" de la matrice R sont maintenant en nombre strictement inférieur au nombre de sources.

Le cas des sources corrélées et d'un réseau plan d'antennes **équiréparties** a déjà été considéré par [10]. Les deux méthodes proposées dans [10] font appel à la notion de moyennage spatial (cf.[11]) généralisé à 2-D.

Nous proposons une méthode pour retrouver les sources, inspirée de [2], qui ne fait pas appel au moyennage spatial, et n'entraîne donc aucune contrainte sur la géométrie des antennes.

On suppose N≥p+1 et M≥p+1.

Soit r le rang de $E(AA^+)$ (ou, de manière équivalente, de $S\,E(AA^+)\,S^+$). r est donc supposé maintenant strictement inférieur à p. La matrice $E(AA^+)S^+S$ est également de rang r. Elle a les mêmes valeurs propres non nulles que $S\,E(AA^+)\,S^+$.

Soit Z_j un vecteur propre de $E(AA^+)S^+S$, associé à la valeur propre non nulle λ_j. Il est facile de montrer que $V_j = S Z_j$. En posant $Z_j = [z_{1,j}, ... , z_{p,j}]^T$, ceci s'écrit encore :

$$V_j = \Sigma\, z_{i,j} S_j \quad (16)$$

A chaque vecteur "signal" V_j, on associe la matrice $\underline{V}_j$ obtenue de la façon suivante .Soient $v_{i,j}$ les composantes de V_j . On note : $V_j^{(k)} = [v_{km,j}, v_{km+1,j}, ... , v_{km+m+1,j}]^T$ (k=0, ... , N-1).

Alors : $\underline{V}_j = [\,V_j^{(0)} \mid V_j^{(1)} \mid .... \mid V_j^{(N-1)}]$

Si l'on définit de manière analogue $\underline{S}_j$, et comme $V_j = \sum_{i=1}^{p} z_{i,j} S_j$, on a : $\underline{V}_j = \Sigma\, z_{i,j} \underline{S}_j$

Posons, par ailleurs :

$$s_{\nu i} = [\,1, e^{2\pi j d_1 \nu_i}, ... , e^{2\pi j d_{M-1}\nu_i}]^T$$

i = 1, ... ,p

$$s_{\psi i} = [\,1, e^{-2\pi j\psi_i}, ... , e^{-2\pi j(N-1)\psi_i}]^T$$

on a $\underline{S}_j = s_{\nu i}\, s_{\psi i}^+$ et donc $\underline{V}_j = \Sigma\, z_{i,j}\, s_{\nu i}\, s_{\psi i}^+$.

Cette matrice est de rang ≤p . Plus précisément, son rang est égal au nombre de $z_{i,j}$ non nuls (i = 1, ... ,p) et l'espace engendré par ses colonnes (resp. lignes) est celui engendré par ceux des $s_{\nu i}$ (resp. $s_{\psi i}^+$) qui correspondent à un $z_{i,j}$ non nul.

Considérons la matrice composite :

$\mathcal{V} = [\,\underline{V}_1 \mid \underline{V}_2 \mid \quad \mid \underline{V}_r]$.

On montre (Annexe) qu'elle est de rang exactement p. Par conséquent, l'espace engendré par ses colonnes est exactement celui engendré par les $s_{\nu i}$ (i=1, ... , p) .Il est alors clair que les p vecteurs singuliers à gauche associés aux valeurs singulières non nulles de cette matrice engendrent le même espace que les $s_{\nu i}$ (i=1, ... , p) (cf. [12] pour la définition de la décomposition en valeurs singulières d'une matrice). En appliquant MUSIC 1-D à ces vecteurs singuliers, (ou bien une autre méthode haute-résolution si les antennes d'indice m sont équiréparties) , on retrouvera les ν_j .

De même, la matrice composite $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \vdots \\ \underline{V}_r \end{bmatrix}$ est de rang p.

L'espace engendré par ses lignes est exactement celui engendré par les $s_{\psi i}^+$, et donc les vecteurs singuliers à droite associés à ses p valeurs singulières non nulles engendrent ce même espace. En appliquant une méthode haute-résolution à ces vecteurs singuliers, on retrouvera donc les ψ_j .

Il reste à réassocier les (ν_j , ψ_j) qui ont été retrouvés séparément.

Pour cela, on revient à la relation (16) :

$[\,V_1 , V_2, \quad V_r] = S\,[\,Z_1 , Z_2, \quad Z_r]$

Considérons les m premières lignes de cette relation :

$$[\,V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, ... , V_r^{(0)}\,] = [\,s_{\nu 1} \; ..... \; s_{\nu p}]\,[\,Z_1 , Z_2, \quad Z_r]$$

On connaît $[\,s_{\nu 1} \; ..... \; s_{\nu p}]$ qui ne dépendent pas de ψ_j. On peut donc résoudre ce système d'équations surdéterminé afin d'obtenir les Z_i . Puis, on considère les m lignes suivantes :

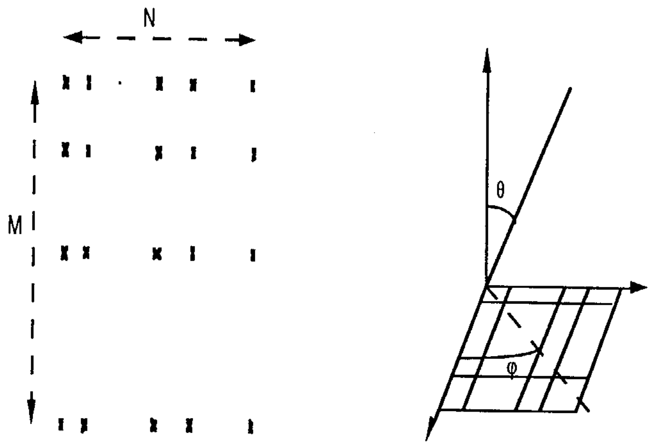
$$[\,V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, ... , V_r^{(1)}\,] = [\,s_{\nu 1} \; ..... \; s_{\nu p}]\; D_\psi\,[\,Z_1 , Z_2, \quad Z_r]$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les $D_\psi Z_i$.

La comparaison de Z_i et de $D_\psi Z_i$ permet de réassocier les ψ_j avec les ν_j . (Cette comparaison fournit d'ailleurs une autre méthode pour retrouver les ψ_j si l'on connaît déjà les ν_j.Dans ce cas, deux antennes seulement dans la direction m suffisent.)

V-CONCLUSION

Nous avons montré comment la méthode de Kung pouvait être généralisée à l'estimation spectrale 2-D, pour des sources non totalement corrélées, et que dans ce cas, deux capteurs dans une direction suffisent , à condition que le nombre de capteurs dans l'autre direction soit au moins égal au nombre de sources. Par ailleurs, nous présentons une méthode qui permet de retrouver les sources même si elles sont totalement corrélées. Un travail futur incluera des simulations de toutes ces méthodes, ainsi qu'une comparaison avec MUSIC 2-D.



a) b)

Fig.1

ANNEXE

Montrons que le rang de $\mathcal{V}$ est p (la démonstration est identique pour $\mathcal{W}$).

On a vu que les colonnes de $\underline{V}_j$ forment un espace de dimension $\leq$p engendré par ceux des s_{vi} associés à un $z_{i,j}$ non nul . Par conséquent, les colonnes de $\mathcal{V}$ formeront un espace de dimension p, si et seulement si *tous* les s_{vi} sont nécessaires pour l'engendrer, et donc si pour tout i (i=1, ... , p) , il existe au moins un j (j=1, ... r) tel que s_{vi} appartienne à l'espace des colonnes de $\underline{V}_j$, donc si pour tout i il existe au moins un j tel que $z_{i,j}$ soit non nul.
Or, on rappelle que les Z_j sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de $E(AA^+)S^+S$.
Si l'on pose $\mathcal{Z} = [\, Z_1 , Z_2 , \quad Z_p]$, on a :

$$E(AA^+)S^+S = \mathcal{Z} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_r & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathcal{Z}^{-1}$$

$$= [\, Z_1 , Z_2 , \quad Z_r] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_r & 0 \end{bmatrix} \mathcal{Z}^{-1}$$

S'il existait une valeur i telle que pour tout j = 1, ... , r , $z_{i,j} = 0$, cela voudrait dire que la matrice $[\, Z_1 , Z_2 , \quad Z_r]$ admettrait une ligne de zéros. Il en serait de même de $E(AA^+)S^+S$, mais cela signifierait que la i° ligne de $E(AA^+)$ serait orthogonale à toute les colonnes de S^+S. Or ces colonnes engendrent l'espace de dimension p. La condition d'orthogonalité ne peut donc être remplie que si la i° ligne de $E(AA^+)$ est elle-même nulle, ce qui ne peut se produire que si la i° source est d'amplitude nulle, ou encore que si le nombre de sources n'est pas p mais p-1, ce qui n'est pas réalisé par hypothèse.

REFERENCES

[1] M.WAX,T.J.SHAN,T.KAILATH Spatio-Temporal Spectral Analysis By Eigenstructure Methods IEEE -ASSP Vol.32 N°4. Aug. 1984 pp.817-827.

[2]L.H.ZOU, L.YIN Spatio-Temporal Spectral Analysis By SVD of Signal Matrix ICASSP 1987 pp.2332-2335

[3]R.O.SCHMIDT A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation Ph.D. dissertation, Stanford Univ.,Stanford,CA,Nov.1981.

[4] S.Y. KUNG, K.S. ARUN, D.V. BHASKAR RAO, State-space and singular-value decomposition-based approximation methods for the harmonic retrieval problem. Vol. 73 n°12, Dec. 83. Journal Opt. Soc. Am.

[5] S.Y. KUNG, D.V. BHASKAR RAO, K.S. ARUN. New state space and SVD based approximate modeling methods for harmonic retrieval. IEEE 2nd ASSP Workshop on spectral Estimation, Tampa, Florida, 1983.

[6]D.R.FARRIER,A.R.PRIOR-WANDESFORDE The Estimation of Exponentially Damped Sinusoids With A Modified ESPRIT Algorithm.EUSIPCO 1988 pp.511-514

[7] S.MAYRARGUE , J.P. JOUVEAU A new application of singular-value-decomposition to harmonic retrieval.pp.467-472 Proceedings of the International Workshop on SVD and Signal Processing 21-23 Sept.1987 Les Houches France Ed.E.F.Deprettere . North-Holland 1988

[8] S.MAYRARGUE, J.P. JOUVEAU On The Equivalence Between ESPRIT and TAM (Toeplitz Approximation Method) Leading to an Improved TAM EUSIPCO 1988 pp.55-58

[9] R.KUMARESAN , D.W.TUFTS Estimating the Angles of Arrival of Multiple Plane Waves. IEEE Trans. on Aerospace Vol AES-19 N° 1 Jan.83

[10] Ch.Ch.YEH, J.H.LEE,Y.M.CHEN Estimating Two-Dimensional Angles of Arrival in Coherent Source Environment. IEEE Trans. on ASSP Vol.37, N°1, Jan.1989

[11]T.J.SHAN,M.WAX,T.KAILATH,"On Spatial Smoothing for Directions-of-arrival Estimation of Coherent Signals"IEEE Trans.on ASSP Vol.33.Aug.1985

[12]G.H.GOLUB, C.F.VAN LOAN Matrix Computations, North Oxford Academic 1983