UNE METHODE D'ESTIMATION DE SPECTRES DISCRETS FONDEE SUR LE BATTEMENT DES FREQUENCES - QUELQUES PROPRIETES STATISTIQUES.

Benoît TRUONG-VAN

Laboratoire de mathématiques appliquées - CNRS -UA 1204
Université de Pau - Avenue de l'Université - 64000 PAU, FRANCE.

RESUME

Nous présentons une méthode simple et efficace pour estimer le spectre discret d'un signal en présence de bruit ARMA stationnaire. Nous donnons aussi une étude statistique des propriétés asymptotiques des estimateurs fournis par cette méthode. Ces propriétés montrent que ces estimateurs sont asymptotiquement des plus précis puisqu'ils ont la même variance asymptotique que la méthode d'estimation de spectre de Whittle.

SUMMARY

We present a computationally simple and efficient method for estimating the line spectrum of a signal corrupted by a stationary ARMA noise. Then, a statistical study of asymptotical properties of the estimators yielded by this method is given, that shows that these estimators are asymptotically among the most accurate, since they have the same asymptotic variance as those obtained with Whittle's method.

1 - Introduction

Nous considérons ici un modèle non-harmonique général de la forme

$$x_t = \Sigma_{j=1}^{m} C_j \cos(2\pi f_j+\psi_j) + z_t \qquad (1)$$

où z_t est un processus ARMA (p,q) stationnaire et réalisable, défini par l'équation

$$\Phi(B)z_t = \eta(B)\ \varepsilon_t$$

avec B dénotant l'opérateur-retard, ε_t un processus de bruit blanc de variance σ^2,

$$\Phi(B) = \Sigma_{k=0}^{p} \varphi_k B^k \quad \text{et} \quad \eta(B) = \Sigma_{k=0}^{q} \eta_k B^k .$$

Etant donné un signal régulièrement échantillonné, x_t , $t = 1,\dots,n$ généré par le modèle (1), nous nous intéressons au problème de déterminer une estimation précise des fréquences f_j , $j=1,\dots,m$ i.e. du spectre discret de x_t . Nous exposons d'abord une méthode et un algorithme simple basés sur le battement de fréquences pour estimer les f_j, $j=1,\dots,m$; puis nous montrons que les estimateurs obtenus par cette méthode sont extrêmement précis, en donnant une étude statistique des propriétés de ces estimateurs. Les résultats théoriques de cette étude sont par ailleurs confirmés par ceux que nous avons obtenus sur divers signaux simulés.

2 - Méthode d'estimation du spectre discret

Nous utilisons la même technique de battement de fréquences que dans [2] pour amplifier chaque harmonique $C_j \cos(2\pi f_j t+\varphi_j)$, plus précisément, pour chaque fréquence f_j et pour une estimation $\bar{f}_j$ de f_j, nous définissons le $\bar{f}_j$-amplifié de la j^e harmonique comme le processus $\xi_t(\bar{f}_j)$, solution de l'équation

$$\xi_t(\bar{f}_j)-2\bar{\alpha}_j\,\xi_{t-1}(\bar{f}_j)+\xi_{t-2}(\bar{f}_j)=x_t \tag{2}$$

avec $\xi_{-1}(\bar{f}_j)=\xi_0(\bar{f}_j)=0$ et où $\bar{\alpha}_j=\cos(2\pi\,\bar{f}_j)$.

Autrement dit, $\xi_t(\bar{f}_j)$ s'écrit sous la forme

$$\xi_t(\bar{f}_j)=(\sin 2\pi\bar{f}_j)^{-1}\sum_{k=0}^{t-1}\sin(2\pi k\bar{f}_j)x_{t-k}\,. \tag{3}$$

Cependant, au lieu d'estimer les fréquences f_j par la méthode de moindres carrés récursifs dans [2], nous estimons ici chaque f_j par la valeur $\hat{f}_j$ définie par $<\xi_{t-1}(\hat{f}_j),x_t> = 0$ (4)

où le symbole $<u_t,v_t>$ désigne le produit scalaire usuel $\sum_{t=1}^{n} u_t v_t$ des deux vecteurs $(u_t),(v_t)$ de $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes, la méthode d'estimation du spectre discret que nous proposons ici, consiste à déterminer les fréquences $\hat{f}_j$ telles que leur amplifié décalé $\xi_{t-1}(\hat{f}_j)$ est orthogonal au signal x_t. Nous dirons brièvement que les $\hat{f}_j$ sont les estimations de f_j par amplification orthogonale au signal (AOS).

Le résultat ci-dessous prouve l'existence des estimateurs AOS $\hat{f}_j$.

Proposition 1 (cf [4] théorème 3) Si n est suffisamment grand, alors pour chaque $j=1,\dots,m$; parmi les $\bar{f}_j$-amplifiés $\xi_t(\bar{f}_j)$ tels que $n|\bar{f}_j-f_j|<1$, il existe un seul $\hat{f}_j$-amplifié $\xi_t(\hat{f}_j)$ vérifiant la relation $<\xi_{t-1}(\hat{f}_j),x_t> = 0$ presque sûrement.

3 - Algorithmes

La méthode d'estimation par amplification orthogonale au signal conduit à des algorithmes extrêmement simples et performants. En effet, pour chaque $j=1,\dots,m$; soit $\bar{f}_j$ une estimation initiale de f_j, par un développement de Taylor de $<\xi_{t-1}(\bar{f}_j),x_t>$ au premier ordre et en utilisant la relation (4), on obtient

$$\hat{f}_j-\bar{f}_j \cong -<\xi_{t-1}(\bar{f}_j),x_t> / <\xi'_{t-1}(\bar{f}_j),x_t> \tag{5}$$

où $\xi'_t(\bar{f}_j)$ désigne la dérivée $d\xi_t(\bar{f}_j)/d\bar{f}_j$, avec $\xi_t(\bar{f}_j)$ calculé à partir de la relation (2) et $\xi'_t(\bar{f}_j)$ obtenu par la relation (6) ci-dessous.

Proposition 2 (cf [4] p.6)
Pour tout $\bar{f}_j$, le processus $\xi'_t(\bar{f}_j)$ est solution de l'équation

$$\xi'_t(\bar{f}_j)-2\bar{\alpha}_j\xi'_{t-1}(\bar{f}_j)+\xi'_{t-2}(\bar{f}_j)=-\{2\sin 2\pi\bar{f}_j\}^{-1}\xi_{t-1}(\bar{f}_j) \tag{6}$$

avec les conditions initiales $\xi'_s(\bar{f}_j)=0$ pour $s=1,0,-1,-2$.

On en déduit l'algorithme suivant pour calculer chaque $\hat{f}_j$, $j=1,\dots,m$:

étape 1 A partir d'une estimation $\bar{f}_j$ de f_j, calculer $\xi_t(\bar{f}_j)$ et $\xi'_t(\bar{f}_j)$ pour $t=1,\dots,n$ respectivement à partir de (2) et de (6).

étape 2 Calculer $\delta_j=-<\xi_{t-1}(\bar{f}_j),x_t>/<\xi'_{t-1}(\bar{f}_j),x_t>$.

Si $|\delta_j|\le\varepsilon_s$ où ε_s est une valeur du critère d'arrêt, alors $\hat{f}_j=\bar{f}_j$; sinon on réitère l'étape 1 après avoir remplacé $\bar{f}_j$ par $\bar{f}_j+\delta_j$.

Cet algorithme est très performant puisque chaque itération ne requiert que $4n$ opérations arithmétiques et que le nombre d'itérations nécessaire pour calculer chaque $\hat{f}_j$ est très faible, au maximum 5. L'étude de simulation que nous avons menée sur 20 différents modèles (1) (pour chacun de ces 20 modèles, nous avons effectué 120 simulations) montre que le nombre d'itérations nécessaire pour que l'algorithme converge varie entre 2 et 5.

Remarques

1- Pour initialiser l'algorithme précédent, il suffit par exemple de prendre pour $\bar{f}_j$, $j=1,\dots,m$; les fréquences correspondant aux maxima du périodogramme du signal x_t.

2- Comme cet algorithme s'appuie sur la procédure de Newton pour calculer les zéros d'une fonction non-linéaire, il nécessite pour converger, une estimation initiale $\bar{f}^o_j$ proche de la vraie fréquence f_j i.e telle que $|\bar{f}^o_j-f_j|<2\pi/n$. Cependant, on peut éviter cet inconvénient grâce à une légère modification de l'algorithme précédent, laquelle consiste à calculer les corrections δ_j non pas à partir de la relation (5), mais comme suit :

$$\delta_j=-<\xi_{t-1}(\bar{f}_j),x_t>\left\{\frac{1}{2}<\xi'_{t-1}(\bar{f}_j),x_t>+\frac{\sin(2\pi\bar{f}_j)}{2}<\xi_t(\bar{f}_j),\xi_t(\bar{f}_j)>\right\}^{-1} \tag{7}$$

En effet, d'après les propositions 3 et 4, quand $\bar{f}_j$ est proche de f_j, alors

$$<\xi'_{t-1}(\bar{f}_j),x_t>/\{\sin(2\pi f_j)<\xi_t(\bar{f}_j),\xi_t(\bar{f}_j)>\}$$

est proche de 1. La modification (7) permet de rendre stable le calcul des corrections δ_j, car $<\xi'_{t-1}(\bar{f}_j),x_t>$ est sensible aux variations de $\bar{f}_j$ autour de f_j tandis que $<\xi_t(\bar{f}_j),\xi_t(\bar{f}_j)>$ l'est beaucoup moins.

3- Soit $\xi_t(\bar{f}_j)$ un processus calculé à partir de la relation (2). Si $\xi_t(\bar{f}_j)$ correspond effectivement à l'amplifié d'une vraie harmonique, i.e d'une sinusoïde dont la fréquence appartient à la partie discrète du spectre de x_t, alors le graphe de $\xi_t(\bar{f}_j)$ présente une allure tout à fait caractéristique du battement de deux fréquences voisines, $\bar{f}_j$ et f_j. Cette propriété est utilisée dans [2] pour discerner le spectre discret du signal x_t de son spectre continu, qui provient de la composante ARMA z_t dans (1).

4- Propriétés statistiques

Non seulement, les estimations AOS $\hat{f}_j$ sont simples à obtenir, mais de plus possèdent des propriétés statistiques qui en font des estimateurs asymptotiquement des plus précis :

Résultat 1 Pour chaque harmonique $j = 1,\dots,m$; on a $\hat{f}_j - f_j = O(n^{-3/2}(\log n)^{1/2})$ presque sûrement, autrement dit, les $\hat{f}_j$ sont fortement consistants, avec une vitesse de convergence égale à $n^{-3/2}(\log n)^{1/2}$.

Résultat 2 Pour chaque $j=1,\dots,m$; $\hat{f}_j - f_j = O_p(n^{-3/2})$

Soit, pour $j=1,\dots,m$; $\tilde{f}_j$ l'estimation de f_j obtenue avec la méthode de Pisarenko ou avec des techniques analogues. Bien qu'actuellement il semble qu'une étude statistique des propriétés asymptotiques des $\tilde{f}_j$ reste encore à faire, néanmoins, à partir des résultats de [1], le mieux que l'on peut espérer obtenir est que $\tilde{f}_j - f_j = O_p(n^{-1})$. Ainsi, les estimateurs $\hat{f}_j$ sont plus précis que les $\tilde{f}_j$, fournis par les méthodes d'estimation de type Pisarenko.

Résultat 3 Pour chaque $j=1,\dots,m$; $\hat{f}_j - f_j$ est asymptotiquement Gaussien de moyenne nulle et de variance égale à $12\, n^{-3}(snr_j)^{-1} S(f_j)$, où $snr_j = C_j^2/2\sigma^2$ est le rapport signal-bruit pour la $j^{\text{ème}}$ harmonique et où $S(f)$ est le spectre de puissance de processus ARMA (p,q) z_t dans (1).

Par conséquent, les estimateurs $\hat{f}_j$ ont exactement la même variance asymptotique que ceux obtenus avec la méthode de Whittle (cf. e.g [5]), qui est connue comme la méthode d'estimation de fréquences, la plus précise quand les bruits sont Gaussiens.

Les études de simulation que nous avons effectuées, portant sur divers modèles (1) et sur 120 réalisations de chacun de ces modèles confirment les résultats asymptotiques précédents. Nous donnons maintenant une indication de preuve des résultats précédents, pour une démonstration détaillée, nous référons le lecteur à [4].

D'abord, d'après (3), on peut décomposer $\xi_t(\bar{f}_j)$ sous la forme

$$\xi_t(\bar{f}_j) = X_t(\bar{f}_j) + Y_t(\bar{f}_j) + Z_t(\bar{f}_j) \qquad (8)$$

où $X_t(\bar{f}_j) = X_t^o(\bar{f}_j) + X_t^1(\bar{f}_j)$

$$X_t^o(\bar{f}_j) = (2\sin\bar{\omega}_j)^{-1} C_j \,(\sin\Omega_j/2)^{-1}\sin(t\Omega_j/2)\sin\{(t+1)\delta_j/2-\psi_j\}$$

$$X_t^1(\bar{f}_j) = (2\sin\bar{\omega}_j)^{-1} C_j \,(\sin\delta_j/2)^{-1}\sin(t\delta_j/2)\sin\{(t+1)(\omega_j+\delta_j/2)+\psi_j\}$$

$$Y_t(\bar{f}_j) = (\sin\bar{\omega}_j)^{-1}\,\Sigma_{k=0}^{t-1} \sin(k+1)\bar{\omega}_j\{\,\Sigma' C_h\cos(\omega_h(t-k)+\psi_h)\}$$

$$Z_t(\bar{f}_j) = (\sin\bar{\omega}_j)^{-1}\,\Sigma_{k=0}^{t-1}(\sin(k+1)\bar{\omega}_j)z_{t-k} \qquad (9)$$

où $\omega_j=2\pi f_j$, $\bar{\omega}_j=2\pi\bar{f}_j$, $\delta_j=\bar{\omega}_j-\omega_j$, $\Omega_j=\bar{\omega}_j+\omega_j$ et où le symbole Σ' dénote la sommation sur h variant de 1 à m, avec $h \neq j$.

Nous prouvons alors les résultats intermédiaires suivants :

Lemme 1 (cf.[4] proposition 1) Pour tout $\bar{f} \in]0,1/2[$, on a

$Z_t(\bar{f}) = Z_t^H(\bar{f}) + Z_t^o(\bar{f}) + Z_t^1(\bar{f})$ avec

$$Z_t^H(\bar{f}) = \Sigma_{k=0}^{p}(\rho_k)^t\{\mathbf{A}_k(t)\cos(\theta_k t)+\mathbf{B}_k(t)\sin(\theta_k t)$$

$$Z_t^o(\bar{f}) = \Sigma_{r=0}^{t-1} u_r^o\, y_{t-r}$$

$$Z_t^1(\bar{f}) = (\sin\bar{\omega})^{-1}\{H_t^J(\bar{\omega})\,\Sigma_{k=0}^{q}\eta_k W_t^1(k) - H_t^R(\bar{\omega})\Sigma_{k=0}^{q}\eta_k\, W_t^2(k)\}$$

où $\rho_o = 1$, $\mathbf{A}_k$ et $\mathbf{B}_k$ sont des polynômes dont les coefficients sont des variables aléatoires, combinaisons linéaires des valeurs initiales de $Z_t(\bar{f})$ et de z_t, u_t^o est une solution de l'équation $\Phi(B)u_t^o = 0$, et où

$$H_t^R(\bar{\omega}) = |\Phi(e^{i\bar{\omega}})|^{-2}\, \mathrm{Re}\{\Phi(e^{i\bar{\omega}})e^{i\bar{\omega}(t+1)}\}$$

$$H_t^J(\bar{\omega}) = |\Phi(e^{i\bar{\omega}})|^{-2}\, \mathrm{Im}\{\Phi(e^{i\bar{\omega}})e^{i\bar{\omega}(t+1)}\}$$

$$W_t^1(k) = \Sigma_{r=1}^{t}\cos(\bar{\omega}r)\varepsilon_{r-k}, \quad W_t^2(k) = \Sigma_{r=1}^{t}\sin(\bar{\omega}_r)\varepsilon_{r-k}$$

$$y_t = \eta_o\varepsilon_t + \dots + \eta_q\,\varepsilon_{t-q}.$$

A partir du lemme, de la loi du logarithme itéré et des relations (9), nous déduisons :

Proposition 3 (cf [4]théorème 1) Pour tout $\beta > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, et pour chaque $j=1,\dots,m$; on a

(i) $< \xi_t(\bar{f}_j), \xi_t(\bar{f}_j) >$

$$= n^3(2\sqrt{6}\sin\omega_j)^{-2}C_j^2 + o(n^{5/2}(\log n)^{1/2+\beta}) + n^3\, O(\varepsilon^2)$$

presque sûrement si $n|\delta_j| \le \varepsilon$.

(ii) Pour tout $\bar{f} \in]0,1/2[$; $< \xi_{t-1}(\bar{f}), x_t >$

$$= o(n^{3/2}(\log n)^{1/2+\beta})$$

presque sûrement.

D'après (6) et de manière analogue à (8), on peut décomposer $\xi'_t(\bar{f}_j)$ sous la forme

$$\xi'_t(\bar{f}_j) = X'_t(\bar{f}_j) + Y'_t(\bar{f}_j) + Z'_t(\bar{f}_j) \qquad (10)$$

où les composantes du second membre de (10) sont définies de façon similaire à (9). Utilisant les mêmes techniques de démonstration que la proposition 3, nous obtenons :

Proposition 4 (cf [4] théorème 2) Pour tout $\beta > 0$ et pour chaque $j = 1,\dots,m$; $< \xi'_{t-1}(\bar{f}_j), x_t > = n^3(24\sin\omega_j)^{-1}C_j^2 + o(n^{5/2}(\log n)^{1/2+\beta}) + n^3\, O(\varepsilon^2)$ presque sûrement si $n|\delta_j| \leq \varepsilon$.

Le résultat 1 se déduit des propositions 3 et 4.

Par ailleurs, il est immédiat que pour chaque $j=1,\dots,m$

$$< \xi_{t-1}(f_j), x_t > = \;< X_{t-1}(f_j), x_t > + < Z_{t-1}(f_j), C_j(t) > + O_P(n) \quad (11)$$

où $C_j(t) = C_j \cos(2\pi f_j t + \psi_j)$.

Lemme 2 (cf [4] lemme A 12)

$$< X_{t-1}(f_j), z_t > = (2\sin 2\pi f_j)^{-1} C_j \,\Sigma_{t-1}^{n} \Gamma_t \varepsilon_t + O_P(n^{1/2})$$

où $\Gamma_t = \Sigma_{r=t}^{n} (r-1) g_{r-t} \sin(2\pi f_j r + \psi_j)$

et où les coefficients g_s sont définis par

$$\sum_{s=0}^{\infty} g_s B^s = (\Phi(B))^{-1}\, \eta(B).$$

Nous évaluons d'abord $< Z_{t-1}(f_j), C_j(t) >$ pour le cas où z_t est AR(p) :

Lemme 3 (cf [4] lemme A 13)

Si le processus z_t est AR(p) alors

$$< Z_{t-1}(f_j), C_j(t) = -\,(2\sin 2\pi f_j)^{-1} C_j \,\Sigma_{t=1}^{n} \gamma_t\, \varepsilon_t + O_P(n^{1/2})$$

où $\gamma_t = |\Phi(e^{2i\pi f_j})|^{-2}\,(n-t)\; \Sigma_{k=0}^{p} \varphi_k \sin(2\pi f_j (t-k) + \psi_j)$

Puis, pour le cas général où z_t est ARMA (p,q), nous obtenons

Lemme 4 (cf [4] p.24-25) Si le processus z_t est ARMA(p,q) alors

$$< Z_{t-1}(f_j), C_j(t) > = C_j \left\{ \Sigma_{t=1-q}^{n-1} \tilde{b}_t^1 \varepsilon_t + \Sigma_{h=0}^{q} \eta_h \;\Sigma_{t=1}^{n-1} b_t^o \varepsilon_{t-h} \right\}$$

où $\tilde{\beta}_t^1 = \eta_o\, b_t^1 + \dots + \eta_q\, b_{t+q}^1$ pour $t=1-q,\dots,n-1$

avec $\begin{cases} b_t^1 = \Sigma_{r=1}^{n-t} u_{r-1}^1 \cos\{(2\pi f_j)(r+t) + \psi_j\} & \text{si } 0 \leq t \leq n \\ b_t^1 = 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

Comme $n^3 < \xi'_{t-1}(2\pi f_j), x_t >$ converge presque sûrement vers $(24\sin 2\pi f_j)^{-1} C_j^2$ quand $n \to \infty$, le résultat 2 se déduit des lemmes 2-4 tandis que le résultat 3 se déduit de ces lemmes et du théorème central limit de Lindeberg.

Références

[1] G.C. TIAO and R.S. TSAY "Consistency properties of least squares estimates of autoregressive parameters in ARMA models". Ann. Statist. vol.11, pp.856-871, 1983.

[2] B. TRUONG-VAN "A new approach to frequency analysis with recursive least squares estimates on amplilfied harmonics". Preprint CNRS-UA 1204 n°86/001 Laboratoire de mathématiques appliquées - Université de Pau, France, 1986.

[3] B. TRUONG-VAN "Spectrum analysis with recursive least squares estimates on amplified G-harmonics". 11ème colloque GRETSI, Nice 1-5 juin 1987, France.

[4] B. TRUONG-VAN "Asymptotic properties of frequency estimates based on amplifying harmonics". Preprint CNRS-UA 1204 n°88/20 . Laboratoire de mathématiques appliquées - Université de Pau, France, 1988.

[5] A.M. WALKER "On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals". Adv. Appl. Prob. vol.5, pp.217-241, 1973.