



Analyse de champs turbulents par transformée en ondelette

Valérie PERRIER (*)
Claude BASDEVANT (**)

(*) O.N.E.R.A., BP72, 92322 Chatillon.

(**) Université Paris-Nord, Dept. de Math., GSP, av. JB Clément, 93430 Villetaneuse, et O.N.E.R.A.

RESUME

Nous présentons un algorithme d'analyse de signaux basé sur une décomposition en ondelettes périodiques. Après un rappel de la méthode, nous présentons deux exemples d'application dans le cas monodimensionnel : un cas d'école et un signal expérimental turbulent.

SUMMARY

A signal analysis algorithm using periodical wavelet decomposition is presented. After a method restatement, two examples of application in the one-dimensional case are presented: a fundamental example and a turbulent experimental signal.

Les écoulements turbulents se caractérisent par l'existence simultanée de multiples structures (tourbillons) d'échelles et de formes très différentes : ces structures interagissent fortement et non-linéairement entre elles. Un des problèmes qui se pose à l'expérimentateur est d'identifier ces structures dans des "images" (provenant d'expériences traditionnelles ou d'expériences numériques) instantanées d'un écoulement et éventuellement de suivre ces structures au cours du temps. Un autre problème est de pouvoir définir dans un champ fortement inhomogène la notion de spectre local d'énergie.

Clairement l'outil, classique en turbulence, de l'analyse de Fourier ne permet pas de répondre à ces deux problèmes. De par sa conception, la transformée en ondelette apparaît par contre bien adaptée aux besoins d'analyse et de filtrage de signaux issus d'écoulements turbulents.

La transformée en ondelette, utilisée par J.

Morlet en 1981 [1] pour analyser des signaux issus de la recherche pétrolière, se présente comme une extension de l'analyse de Gabor, l'amélioration provenant du fait que l'analyse peut se faire à toutes les échelles, aussi petites soient-elles, sans perte d'information temporelle. On définit ainsi une analyse "multi-échelles" d'un signal temporel $u(t)$, en introduisant des espaces d'approximation V_j sur lesquels on projetera le signal $u(t)$, et qui vérifient les propriétés suivantes:

(1) $V_j \subset V_{j+1}$, pour que les approximations soient de plus en plus précises.

(2) $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ dense dans L^2 , pour que la suite d'approximation converge.

(3) $V_0 = \{\text{constantes}\}$ et $(f(t) \in V_j \Rightarrow f(2t) \in V_{j+1})$, les fonctions f de V_{j+1} sont deux fois plus oscillantes que celles de V_j , et contiennent donc deux fois plus d'information fréquentielle.



Nous nous plaçons ici dans le cadre périodique qui présente de nombreux avantages d'un point de vue conceptuel et algorithmique. Dans ce cas, chaque espace V_j est de dimension finie égale à 2^j : schématiquement, cet espace ne contient pas d'échelles plus petites que 2^{-j} . Si le signal à analyser $u(t)$ est échantillonné sur 2^p points, il sera tout d'abord interpolé par une fonction de V_p .

L'algorithme de décomposition consiste à projeter le signal $u(t)$ successivement sur les espaces V_j , (depuis V_p , espace d'interpolation, jusqu'à V_0 , espace des fonctions constantes). La projection orthogonale de $u(t)$ sur V_j mesure les éléments caractéristiques de $u(t)$ jusqu'à l'échelle 2^{-j} ; on introduit alors W_j , complémentaire orthogonal (au sens L^2) de V_j dans V_{j+1} (i.e. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$), pour mesurer les détails d'échelle 2^{-j} . Cet ensemble W_j admet ([2]) une base orthonormée $(\psi_k^j)_{0 \leq k < 2^j}$ vérifiant :

$$\psi_k^j(t) = \psi_0^j(t - \frac{k}{2^j}), \quad t \geq 0$$

Ces fonctions sont nommées ondelettes car elles possèdent des propriétés de régularité, d'intégrale nulle, de localisation dans les espaces physique et fréquentiel ([2]).

Les éléments caractéristiques d'échelle 2^{-j} du signal $u(t)$ sont alors les produits scalaires L^2 :

$$\langle u / \psi_k^j \rangle_{L^2} = \int u(t) \psi_k^j(t) dt \quad \text{appelés}$$

coefficients d'ondelettes.

Le signal peut être recomposé par la formule de synthèse:

$$u(t) = \sum_{0 \leq j < 2^p} \sum_{0 \leq k < 2^j} \langle u / \psi_k^j \rangle_{L^2} \psi_k^j(t)$$

Les ondelettes possédant des propriétés d'invariance de dilatation-translation pour chaque échelle, l'algorithme de décomposition-recomposition d'un signal $u(t)$ en ondelettes se décompose en une suite de convolutions avec des filtres dont les transformées de Fourier discrètes se calculent par récurrence à partir d'une formule analytique. L'algorithme qui est décrit dans [3] utilise alors efficacement la FFT. Le coût de la décomposition (ou recomposition) en ondelette est de l'ordre de $N \log_2 N$ opérations pour un signal échantillonné sur N points.

Ces algorithmes ont été testés dans le cas où les espaces V_j sont des espaces de fonctions splines périodiques (c'est à dire des polynômes de degré m par morceaux, de classe C^{m-1} aux points de raccordements). Le degré du polynôme peut être choisi parmi tous les

entiers impairs suivant la régularité que l'on souhaite donner aux ondelettes.

Il faut distinguer en fait deux types de décomposition en ondelettes : la décomposition sur base orthonormale et la décomposition surabondante ([3]).

La décomposition sur base orthonormale, qui est sous-jacente à l'exposé précédent, se déroule à information constante ; partant d'un signal échantillonné sur N valeurs, la décomposition conduit à N coefficients d'ondelettes (2^j coefficients correspondent à l'échelle 2^{-j} , avec $1 \leq j \leq (\log_2 N) - 1$). Cette transformation est inversible, peu coûteuse, donc particulièrement bien adaptée à tous les problèmes de filtrage. Malheureusement, elle est peu "lisible".

La décomposition surabondante consiste à calculer un grand nombre de coefficients d'ondelette, qui ne sont alors plus indépendants mais qui permettent de tracer en détail un diagramme temps-fréquence du signal. Cette représentation particulièrement lisible permet la connaissance des fréquences qui composent le signal à chaque instant et la détection des changements brusques (se traduisant par une augmentation brutale des coefficients dans les hautes fréquences).

C'est le deuxième mode de représentation qui a été choisi pour illustrer deux exemples. L'ondelette ψ ou "ondelette mère" qui engendre toutes les fonctions de la base par des opérations de dilatation-translation est représentée à la figure 1, ainsi que son spectre de Fourier $\hat{\psi}$. C'est une ondelette spline cubique, soit une fonction de classe C^2 polynomiale de degré 3 par morceaux.

Cette ondelette est utilisée pour analyser deux signaux (figures 2 et 3) : le signal à analyser est tracé au dessus de sa représentation temps-fréquence en ondelettes ; en abscisse, le paramètre de position t , en ordonnée la fréquence logarithmique k . Les coefficients d'ondelettes sont représentés par leur module grâce à des lignes iso-valeurs.

La figure 2 représente un signal académique comportant deux singularités (discontinuités de la dérivée) et une fréquence pure (sinusoïde) localisée dans le temps : ces deux phénomènes sont mis en évidence par la décomposition en ondelettes du signal, les singularités par une augmentation des coefficients de haute fréquence au voisinage de la discontinuité, la fréquence pure par une bande de forts coefficients délimitée en temps par la longueur de la sinusoïde.

La figure 3 est un champ de vitesse turbulent issu d'une expérience, la vitesse comportant deux régimes



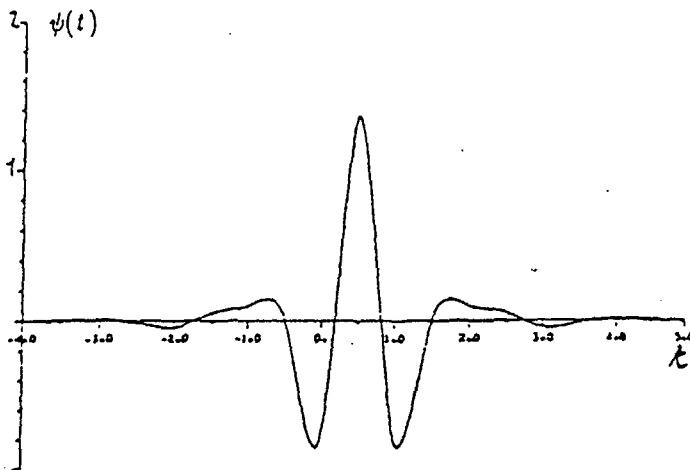
différents, l'un turbulent créant des coefficients d'ondelettes de haute fréquence, l'autre laminaire créant des coefficients basse fréquence. Le signal à analyser n'étant pas périodique, des coefficients d'ondelettes haute fréquence apparaissent au voisinage du bord, créant un cône de coefficients artificiel qui ne doit pas être pris en compte dans l'analyse.

D'autres exemples seront présentés en poster, en particulier dans le cas de la dimension deux où la décomposition en ondelettes permet de mettre en évidence certaines structures caractéristiques au sein d'un écoulement.

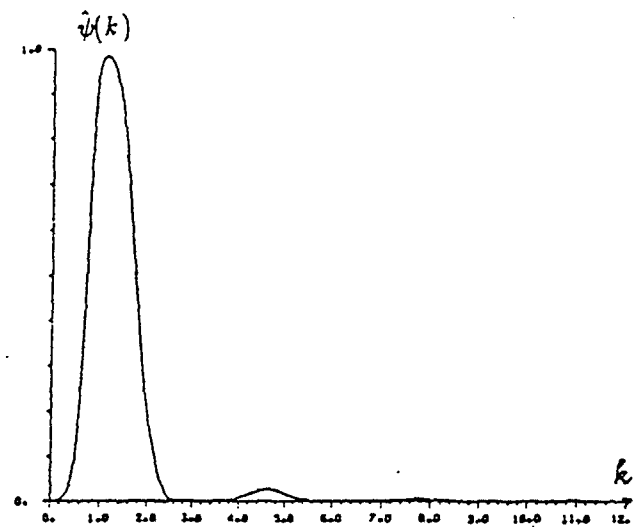
[1] J. Morlet, "Sampling theory and wave propagation", NATO ASI, vol. F1, Issues on acoustic Signal/Image Processing and Recognition, Ed. C.H. Chen, Springer-Verlag, 1988.

[2] Y. Meyer, "Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées", Rapport CEREMADE n. 8703, Université Paris Dauphine, 1987.

[3] V. Perrier, C. Basdevant, "La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes. Théorie et algorithmes.", La Recherche Aéronautique, à paraître, 1989.



(1.a) "ondelette mère"



(1.b) spectre de l'ondelette mère

Figure 1: représentation dans les espaces physique et spectral de l'ondelette génératrice des fonctions de base de la décomposition en ondelette.

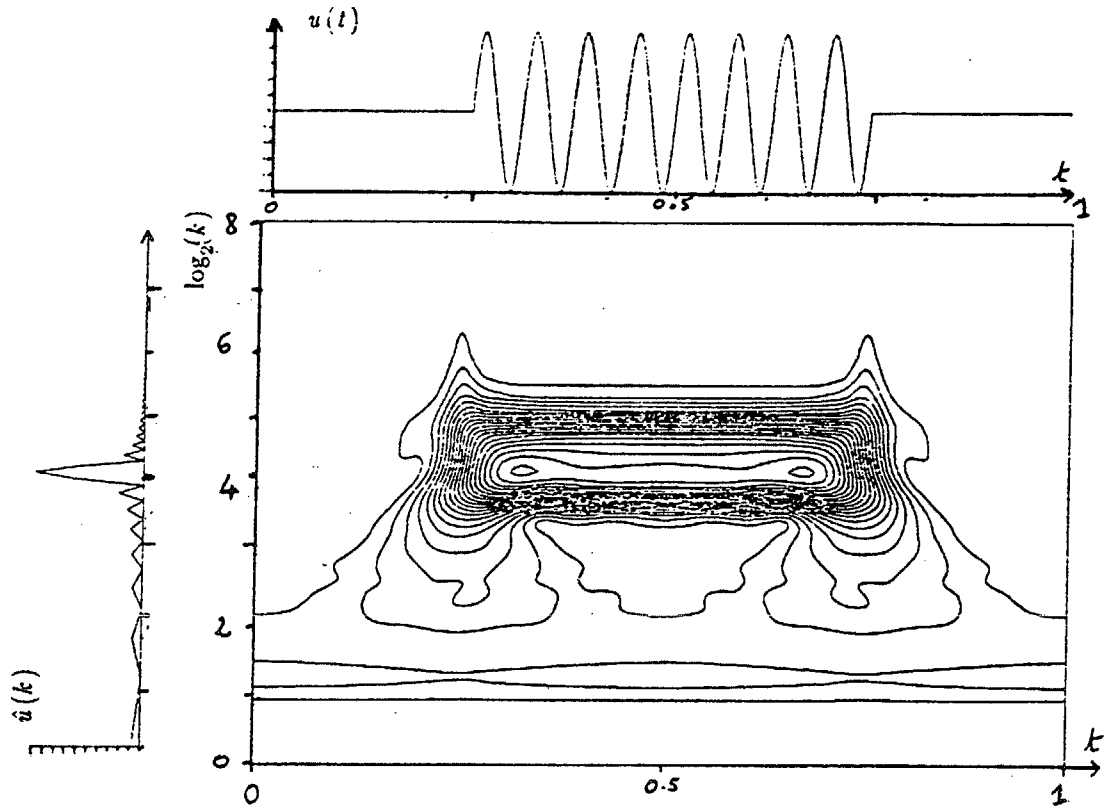


Figure 2 : analyse en ondelette d'une sinusoïde limitée dans le temps.
A gauche, spectre de Fourier.

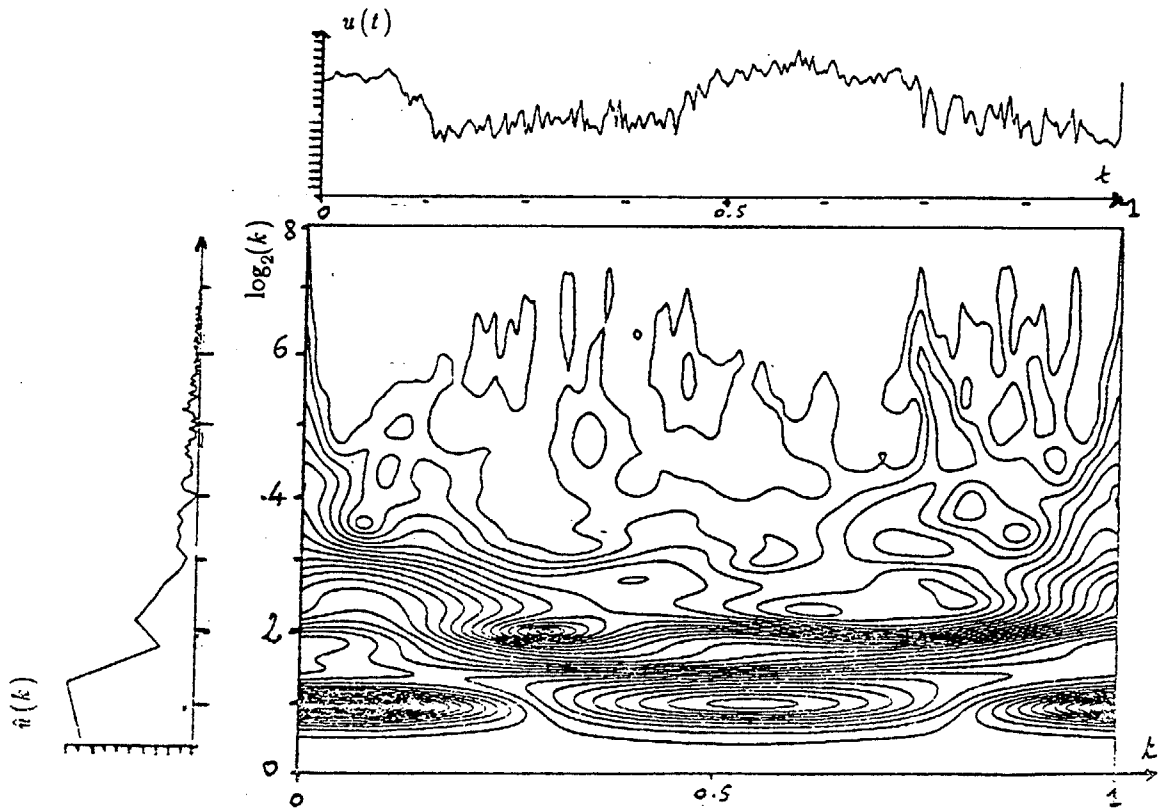


Figure 3 : analyse en ondelette d'un signal de vitesse expérimental turbulent.
A gauche, spectre de Fourier.