PERFORMANCES ET DEBIT CRITIQUE D'UN DECODEUR SEQUENTIEL ESTIMATEUR DE PHASE

Jean-Claude BELFIORE
Ghassan KAWAS KALEH

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications,
46, rue Barrault 75634 Paris CEDEX 13.

RÉSUME

Nous présentons une nouvelle méthode pour estimer la phase conjointement au décodage des symboles codés sur des canaux à phase aléatoire à l'aide d'un décodeur séquentiel à pile. Le critère retenu est celui du *Maximum à Posteriori*. Pour ce faire nous calculons la métrique de Fano appropriée, ainsi que le débit critique correspondant, ceci pour évaluer la plage de fonctionnement de l'algorithme. Des simulations montrent lès bonnes performances du système et la faible complexité moyenne.

SUMMARY

A new method is described for joint phase estimation and trellis-coded data decoding on random-phase channels by using a sequential decoding stack algorithm. It is based on the *Maximum a Posteriori* criterion. An appropriate Fano metric is derived for the decoder, and an expression for the computational cutoff rate is calculated. Simulation results show good performance and small additive complexity relative to the conventional sequential decoder.

1. Introduction

Dans les systèmes de transmission numérique, lorsque la modulation utilisée est M-aire (du type MDP ou QAM), la réception cohérente donne de bien meilleurs résultats que la réception non cohérente. De plus, les modulations codées (codes d'Ungerboeck [6]) sont très sensibles à l'erreur de phase. Ces applications nécessitent donc une bonne estimation de la phase du signal reçu. Nous nous proposons, dans cette publication, d'utiliser un décodeur séquentiel afin d'effectuer conjointement une démodulation partiellement cohérente et le décodage des symboles. Ce papier est une extension de [5].

2. Modèle utilisé et critère du Maximum A Posteriori (MAP)

Ce n'est pas la première fois que l'on cherche à estimer la phase d'un signal grâce à un algorithme de décodage. En effet, les moyens classiques d'estimation (tels que les boucles à verrouillage de phase) ont deux inconvénients:

• l'estimation réalisée n'est pas optimale et elle ne tient compte que du passé et non pas de l'avenir;

• la boucle demande un temps d'acquisition qui diminue le taux de transmission effectif (*throughput*) du système.

Ces considérations ont poussé Ungerboeck d'abord [1], puis Macchi et Scharf [2] à proposer des méthodes d'estimation basées sur le critère du *Maximum A Posteriori*. Ces deux méthodes utilisent une variante de l'algorithme de Viterbi. La différence réside dans le fait que l'algorithme proposé par Ungerboeck nécessite d'émettre une séquence d'apprentissage avant chaque bloc (d'où une diminution du taux de codage effectif), ce qui n'est pas le cas de l'algorithme proposé par Macchi et Scharf. Cependant, ces méthodes sont complexes et, de plus, l'algorithme de Viterbi utilisé pour estimer la phase ne peut servir aussi à décoder les symboles reçus. Ceci nous a poussé à essayer un décodeur séquentiel pour estimer la phase et décoder les

Le grand avantage du décodeur séquentiel proposé ici réside en sa faible complexité et rend l'implémentation de l'estimation de phase par le critère du MAP tout à fait possible.

Dans toute la suite de ce paragraphe, la modulation utilisée est du type MDP ou MAQ, le code utilisé est un code en treillis, et on suppose, comme précédemment, que le rapport signal à bruit reste constant à l'intérieur d'un même bloc.

L'observation, après démodulation, est une séquence complexe,

$$z_k = \sqrt{2E_s}\ c_k\ e^{j\theta_k} + n_k$$

où E_s est l'énergie par symbole codé, $\{c_k\}$ est la séquence des symboles codés émis d'énergie moyenne égale à 1, $\{n_k\}$ est la séquence des réalisations d'un bruit additif blanc et gaussien, de moyenne nulle et de variance $2N_0$, $\{\theta_k\}$ est un processus modélisé par une marche aléatoire sur le cercle,

$$\theta_{k+1} = \theta_k + w_k \pmod{2\pi},$$

avec w_k bruit additif blanc Gaussien, de moyenne W (due à la dérive de fréquence) et d'écart-type σ_w (dû à la gigue de phase).

Nous discrétisons le cercle de phases en une grille de N valeurs. N sera, dans la suite, un paramètre à ajuster en fonction de l'écart-type de la gigue de phase.

Le critère du MAP consiste à trouver le couple de séquences (Θ, C) qui maximise la probabilité

$$\text{Prob}\ \{\Theta, C \mid Z\} \tag{1}$$

avec

$$\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_K\},\ Z = \{z_1, ..., z_K\},\ C = \{c_1, ..., c_K\}$$

3. Le décodeur séquentiel estime la phase et décode les symboles reçus

Le décodeur séquentiel doit trouver le couple (Θ, C) qui maximise la probabilité *a posteriori* conjointe (1) connaissant la séquence Z.

Pour cela, l'arbre qui représente le système s'avère être assez complexe. En effet, si N représente le nombre de phases discrètes, et b/r le taux de codage, de chaque noeud émergent $N.2^b$ branches, ce qui peut être très important et donc, faire déborder la pile assez rapidement.

Nous proposons une modification, dans la structure de l'arbre, qui permet de rendre le décodeur implémentable.

Puisque nous ne connaissons pas la phase initiale, on fait partir du noeud source de l'arbre $N.2^r$ branches. Puis, des noeuds suivants, ne partiront que les branches indispensables, c'est-à-dire, celles qui correspondent à une phase voisine de la phase du noeud considéré. Ainsi, en choisissant bien le pas de quantification de la phase, on peut ne conserver que 3.2^r noeuds. Les seules phases que l'on conserve sont:

- la phase θ_k du noeud dont sont issues les branches;
- les deux phases voisines situées de part et d'autre de la phase θ_k.

L'algorithme utilisé pour mener à bien cette estimation effectuée conjointement au décodage est toujours l'algorithme de pile. Pour pouvoir mettre en oeuvre cet algorithme, il nous manque deux quantités importantes que sont la métrique de branche et le débit critique. Nous allons calculer l'une et l'autre.

4. La métrique de branche.

Un paramètre très important du décodage séquentiel est la métrique de branche. Dans le cas où le décodeur est utilisé uniquement dans son cadre classique, la métrique de branche appropriée est la métrique de Fano. Massey [3] a montré que cette métrique est égale à la fonction de vraisemblance pour des mots de longueur inégales.

En utilisant les arguments de Massey, nous allons construire une métrique qui est égale au logarithme de la probabilité *a posteriori* (1) pour des mots de longueurs différentes.

Supposons que les blocs émis sont des mots de M_0 symboles correspondant donc, sur l'arbre, à M_0 profondeurs de noeuds. On suppose que le décodeur se situe à un noeud de profondeur N. On note respectivement Θ_i^j, Z_i^j, C_i^j les séquences de phases, d'observations et de symboles codés allant de la profondeur i à la profondeur j. Par exemple,

$$\Theta_i^j = \{\theta_i, \theta_{i+1}, ..., \theta_j\}.$$

On ne peut comparer que des séquences de même longueur, ainsi, on va calculer la probabilité qu'un chemin de longueur M_0 soit choisi, tout en sachant que le décodeur est à la profondeur M,

$$\text{Prob}\ \{\Theta_1^{M_0}, Z_1^{M_0}, C_1^{M_0}\}.$$

Cette probabilité va être notée P_c dans la suite du calcul. On la calcule en la décomposant en deux termes,

$$P_c = \prod_{k=1}^{M} \left[P(z_k \mid \theta_k, c_k) P(\theta_k/\theta_{k-1}) P(c_k)\right]$$
$$\prod_{l=M+1}^{M_0} \left[P(z_l \mid \theta_l, c_l) P(\theta_l/\theta_{l-1}) P(c_l)\right]$$

Or, nous n'avons aucune information sur la seconde partie de cette expresion puisqu'elle dépend d'événements à venir dont le décodeur ne connaît rien. On se propose de l'estimer en la moyennant par rapport à toutes les séquences de phase et de symboles possibles.

On suppose, comme toujours, que les symboles émis sont équiprobables; de plus, puisque θ est représenté par une chaîne de Markov, alors, le signal reçu z peut être, lui aussi, modélisé par une chaîne de Markov;

$$P_c = J^{-RM} \prod_{k=1}^{M} \left[P(z_k \mid \theta_k, c_k) P(\theta_k \mid \theta_{k-1}) \right] \prod_{l=M+1}^{M_0} \left[P(z_l \mid z_{l-1}) \right]$$

où J est le cardinal de l'alphabet des symboles émis et R est le taux de codage **J-aire**.

Pour avoir un critère qui est équivalent au MAP, il faut maximiser cette probabilité par rapport à tous les chemins de l'arbre, quelles que soient leur profondeur. Pour cela, on peut maximiser une quantité proportionnelle qui est:

$$J^{-RM} \frac{\prod_{k=1}^{M} \left[P(z_k \mid \theta_k, c_k) P(\theta_k \mid \theta_{k-1}) \right] \prod_{l=M+1}^{M_0} \left[P(z_l \mid z_{l-1}) \right]}{\prod_{l=1}^{M_0} \left[P(z_l \mid z_{l-1}) \right]}$$

Après simplification, la métrique du chemin peut être déterminée en prenant le logarithme de cette quantité (pour avoir une métrique additive),

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\chi M} \left[\log_J \frac{P(z_k \mid \theta_k, c_k) P(\theta_k \mid \theta_{k-1})}{P(z_l \mid z_{l-1})} - R \right].$$

où χ est le nombre de symboles codés par branche de l'arbre.

5. Distribution du nombre de calculs: le débit critique

La distribution de calcul vérifie asymptotiquement une loi de Pareto [4]. Un paramètre important est le débit critique qui détermine si le décodage est possible ou non.

On le détermine en constatant que la phase de la porteuse, au même titre que les symboles codés est estimée par le décodeur. Mais alors que les symboles émis sont indépendants les uns des autres, les phases sont représentées par une marche aléatoire sur le cercle.

On en tire donc, après calculs, le débit critique,

$$R_{comp} = \lim_{N \to +\infty} -\frac{1}{N}$$

$$\log \sum_{Z} \left[\sum_{\Theta} \sum_{C} \prod_{n=1}^{N} P(c_n)\, P(\theta_n/\theta_{n-1}) \sqrt{P(z_n/c_n, \theta_n)} \right]^2 .$$

Finalement, après calcul, nous en déduisons:

$$R_{comp} = -\log (\max_i \lambda_i).$$

où λ_i, $i = 1,..,N^2$ sont les valeurs propres de la matrice carrée de dimension $N^2 \,.\, N^2$

$$\int_C A(z) \times A(z).dz.$$

où × est le produit tensoriel (ou de Kronecker).

Ici, le domaine d'intégration est le plan complexe et $A(z)$ est la matrice dont les coefficients sont de la forme

$$a(z)_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \left[P(m)\, P(\theta_i/\theta_j) \sqrt{P(z \mid m, \theta_i)} \right]$$

où M est la taille de l'alphabet des symboles codés et N est, rappelons-le, le cardinal de l'ensemble des phases après quantification. Ce nombre est, dans la pratique, de l'ordre de 60, ce qui rend le calcul direct très malaisé (on doit en effet diagonaliser une matrice [3600 × 3600]).

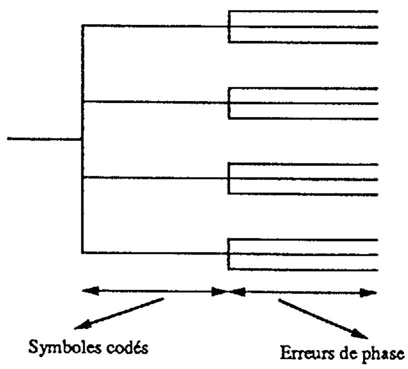
Ce que l'on peut par contre faire, c'est mesurer le débit critique par des simulations. C'est ce qui est développé dans la suite.

6. Changements apportés par rapport à l'algorithme de Ziganjirov-Jelinek

L'estimation d'un couple symbole d'information - erreur de phase se fait en deux étapes pour éviter d'avoir trop de branches issues d'un même noeud et donc de remplir trop vite la pile. L'algorithme s'articule de la manière suivante:

- prolongation d'un noeud en Q branches (Q étant le cardinal de l'ensemble des symboles d'information) en supposant que l'erreur de phase reste la même qu'au noeud précédent;
- puis, prolongation d'un noeud en 3 branches correspondant à 3 erreurs de phase: la même phase que celle du noeud précédent, et les deux phases voisines comme il a été dit précédemment.

Par exemple, pour un code de taux 1/2, de chaque noeud ne partent que 2 branches (pour les bits d'information) ou 3 branches (pour les erreurs de phase). La figure suivante montre la forme de l'arbre servant à décoder un code de taux 1/2 avec estimation conjointe de la phase.



7. Mesure du débit critique.

Nous proposons, ici, de "mesurer" le débit critique d'un canal gaussien avec phase aléatoire, c'est-à-dire d'utiliser les résultats de simulation pour en déduire la valeur du débit critique pour différents rapports signal à bruit et écart-types de la gigue de phase. Lors de la transmission par blocs, si le rapport signal à bruit reste constant sur un bloc mais varie par ailleurs, en suivant une loi exponentielle (l'amplitude du signal reçu suit une loi de Rayleigh), on montre que [7], pour une taille raisonnable de la pile du décodeur, la probabilité de débordement est quasiment égale à la probabilité que le taux de codage soit supérieur au débit critique qui correspond au rapport signal à bruit du bloc. On peut donc obtenir, en utilisant un code de taux R, les couples (rapport signal à bruit, variance de la gigue de phase) conduisant à un débit critique égal à R.

Comment procéder?

Nous simulons un canal de Rayleigh dont le rapport signal à bruit instantané reste constant à l'intérieur d'un même bloc. Nous mesurons le taux de débordement de la pile (supposée être de taille raisonnable) que nous appelons Δ. Nous pouvons alors dire que Δ est relié au débit critique par la relation

$$\Delta = \int_0^{\gamma_c} \frac{1}{\Gamma} e^{-\frac{\gamma}{\Gamma}} d\gamma$$

où γ_c est le rapport signal à bruit correspondant à un débit critique égal au taux de codage employé et Γ est le rapport signal à bruit moyen du canal (que nous prendrons supérieur à γ_c).

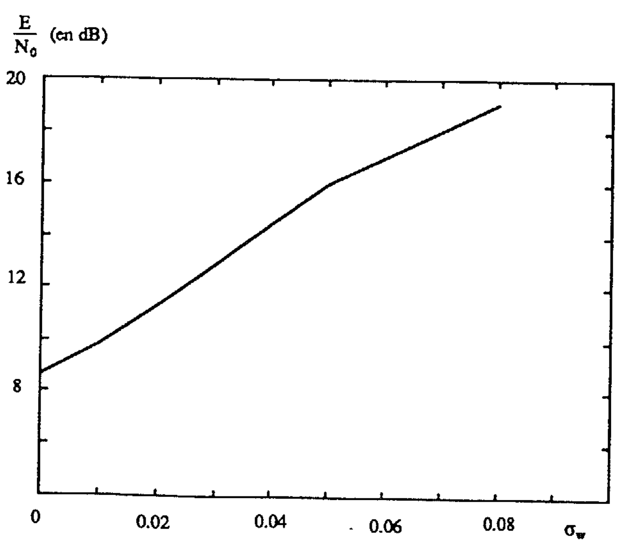
On en déduit donc

$$\Delta = 1 - e^{-\frac{\gamma_c}{\Gamma}}$$

ce qui donne l'expression du rapport signal à bruit "critique"

$$\gamma_c = \Gamma \ln \left[\frac{1}{1 - \Delta} \right]$$

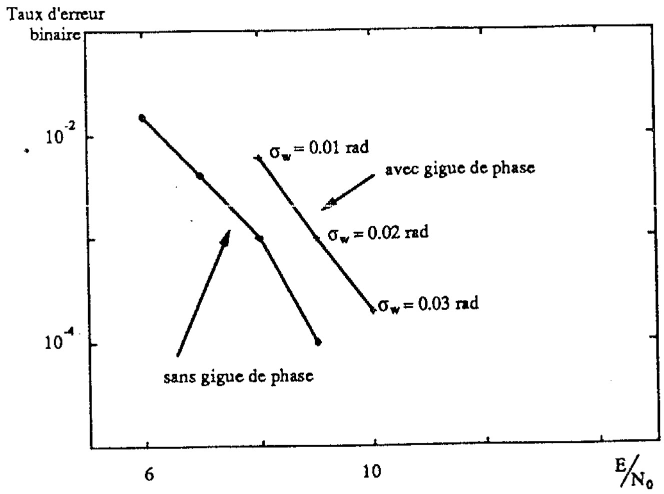
Nous avons représenté, sur la figure suivante, la courbe donnant respectivement, en abscisse et en ordonnée, le couple (rapport signal à bruit, variance de la gigue de phase) conduisant à un débit critique égal à 2/3, pour une modulation MDP-8.



Couples (rapport signal à bruit, ecart-type gigue de phase) conduisant à un débit critique égal à 2/3

8. Les performances.

Les courbes suivantes donnent les taux d'erreur obtenus par simulation pour un décodeur séquentiel estimateur de phase. La modulation est du type MDP-8, le code utilisé est un code d'Ungerboeck [6] à 8 états transparent aux ambiguïtés de phase de π. On compare les résultats avec le cas cohérent. On travaille au voisinage du débit critique (c'est-à-dire que la variance de la gigue de phase est choisie de façon à ce que le débit critique obtenu soit légèrement supérieur à 2/3).



Décodage séquentiel d'une modulation codée MDP8 à 8 états avec et sans fluctuations de la phase

REFERENCES

[1] G. Ungerboeck, "New Application for the Viterbi Algorithm: Carrier Phase Tracking in Synchronous Data Transmission Systems," in Proc. Nat. Telecomm. Conf., 1974, pp. 734-738.

[2] O. Macchi, L.L. Scharf, "A Dynamic Programming Algorithm for Phase Estimation and Data Decoding on Random Phase Channels," IEEE Trans. on Inf. Theory, pp. 581-595, Sept. 1981.

[3] J.L. Massey, "Variable-length codes and the Fano Metric," I.E.E.E. Trans. on Inf. Theory Jan. 1972.

[4] G.D. Forney, "Convolutional Codes III: Sequential Decoding," Information and Control, Jul. 1974.

[5] J.C. Belfiore, G. Kawas Kaleh, "A Sequential Algorithm for Phase Estimation and Trellis-Coded Data Decoding on a Random-Phase Channel," Internat. Symposium on Inf. Theory, Kobe Japan Jun. 1988.

[6] G. Ungerboeck, "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals," IEEE Trans. on Inf. Theory pp. 55-67 Jan. 1982.

[7] J.C. Belfiore, "Codage pour faisceaux hertziens troposphériques," Thèse de Doctorat de l'ENST, 1989.