

ANALYSE DES EFFETS DE QUANTIFICATION SUR UN INTERFEROGRAMME COMPRIME

Corinne MAILHES - Francis CASTANIE

GAPSE / ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France

RÉSUMÉ

Nous utilisons la modélisation autorégressive dans un but de compression de données. Le jeu de paramètres qu'elle va nous fournir (les coefficients autorégressifs, les premiers points d'initialisation du signal et l'erreur de modèle) pourront être quantifiés, transmis et suffiront à reconstruire le signal. Dans cette communication, nous nous intéressons à l'effet de la quantification sur ces paramètres. Nous donnons un schéma global avec tous les filtres parasites introduits par des perturbations appliquées sur chacun des types de paramètres. De plus, nous faisons l'étude statistique complète des erreurs générées par des perturbations sur les conditions initiales : variances sur le signal temporel et sur son spectre, avec les simulations pratiques correspondantes.

SUMMARY

In this communication, autoregressive modeling is used to solve a problem of data compression. The set of parameters derived from this modeling (the autoregressive coefficients, the first signal points for initialization and the model error) will be quantized, transmitted and will be used to reconstruct the signal. The effect of the quantization on each parameter is first studied. It is shown that quantization results in the introduction of several "parasitic" filters in the model. A global scheme is given, which takes into account all these effects. A complete statistical description of the errors due to the quantization of the initial conditions is carried out. Computer simulations on actual signals are given, showing the good agreement with the theoretical models.

1- INTRODUCTION

Nous utilisons la modélisation autorégressive (AR) [1] d'un signal dans un but de **compression de données** [2]. Les signaux à traiter sont des *interférogrammes*, signaux dont la particularité est d'appartenir à la classe des *fonctions de corrélation de spectre "mou"* (tous les résultats sont donc généralisables à cette classe de fonctions).

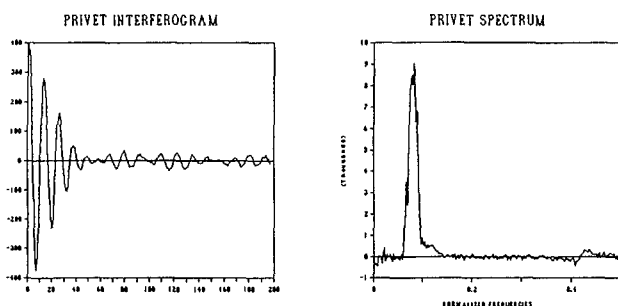
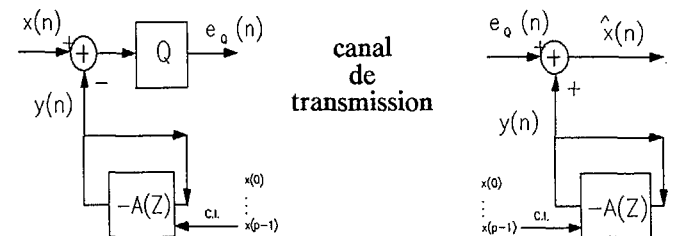


figure 1 : exemple d'interférogramme et de spectre associé

Après la modélisation de l'interférogramme, nous obtenons un jeu de paramètres qu'il nous suffit de transmettre pour pouvoir reconstruire le signal :

- les paramètres autorégressifs $\{a_k\}_{k=1,\dots,p}$ (p = ordre du modèle)
- les p premières valeurs $\{x(n)\}_{n=0,\dots,p-1}$
- l'erreur de modèle $\{e(n)\}_{n=p,\dots,N-1}$.

Le schéma d'émission-réception est le suivant :



Dans cet article, nous nous proposons d'étudier l'effet de la **quantification** sur ces paramètres. Cette étude peut être vue comme l'analyse des perturbations appliquées sur chaque type de paramètre et leur conséquence sur le spectre du signal. En particulier, dans le cas de perturbations sur les conditions initiales, l'étude statistique complète sera menée. Enfin, nous



justifierons le type d'erreur utilisé et sa quantification.

2- ECRITURE DES PERTURBATIONS SUR LE SPECTRE

La reconstruction de l'interférogramme s'effectue ainsi :

$$1- \text{initialisation} \\ n = 0, \dots, p-1 \quad y(n) = x(n) \quad (1)$$

$$\hat{x}(n) = y(n)$$

2- récurrence

$$n \geq p \quad y(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k y(n-k) \quad (2)$$

$$\hat{x}(n) = y(n) + e(n)$$

$x(n)$: interférogramme initial,
 $y(n)$: signal intermédiaire appelé "modèle pur",
 $\hat{x}(n)$: interférogramme reconstitué,
 $e(n)$: erreur de modèle.

Le calcul du spectre est donné par :

$$B_x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \quad (3)$$

et le spectre reconstitué s'écrit :

$$\hat{B}_x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) = B_y(j) + B_e(j) \quad (4)$$

2-1 Perturbations sur l'erreur de modèle

Si on applique des perturbations sur l'erreur de modèle,
 $n = p, \dots, N-1 \quad \hat{e}(n) = e(n) + \epsilon_e(n) \quad (5)$

alors,

$$\hat{B}_x(j) = B_y(j) + \sum_{k=0}^{N-1} \hat{e}(k) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \quad (6) \\ = B_y(j) + B_e(j) + \sum_{k=p}^{N-1} \epsilon_e(k) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right)$$

On a donc une erreur additive sur le spectre correspondant au spectre des perturbations :

$$\hat{B}_x(j) = B_x(j) + E_e(j) \quad (7)$$

avec

$$E_e(j) = \sum_{k=p}^{N-1} \epsilon_e(k) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \quad (8)$$

2-2 Perturbations sur les conditions initiales

Si on applique des perturbations sur les conditions initiales,
 $n = 0, \dots, p-1 \quad \hat{y}(n) = x(n) + \epsilon_x(n) \quad (9)$

alors on peut montrer par récurrence que

$$\hat{y}(n) = y(n) + \epsilon_y(n) \quad (10)$$

avec

$$\epsilon_y(n) = \epsilon_x(n) \quad \text{pour } n = 0, \dots, p-1 \quad (11)$$

$$\epsilon_y(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k \epsilon_y(n-k) \quad \text{pour } n \geq p$$

Dans le domaine spectral, on a une erreur additive sur le spectre,

$$\hat{B}_x(j) = B_x(j) + E_x(j) \quad (12)$$

avec

$$E_e(j) = \sum_{k=p}^{N-1} \epsilon_y(k) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \quad (13)$$

$\epsilon_y(k)$ suivant la récursion trouvée en (11).

2-3 Perturbations sur les paramètres autorégressifs

Si on applique des perturbations sur les paramètres autorégressifs,

$$k = 1, \dots, p \quad \hat{\alpha}_k = \alpha_k + \epsilon_a(k) \quad (14)$$

alors, en négligeant les erreurs au second ordre, on peut montrer par récurrence que

$$\hat{y}(n) = y(n) + \delta(n) \quad (15)$$

avec

$$\text{pour } n = 0, \dots, p-1 \quad \delta(n) = 0 \quad (16)$$

$$\text{pour } n \geq p \quad \delta(n) = - \sum_{k=1}^p \epsilon_a(k) y(n-k) - \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta(n-k)$$

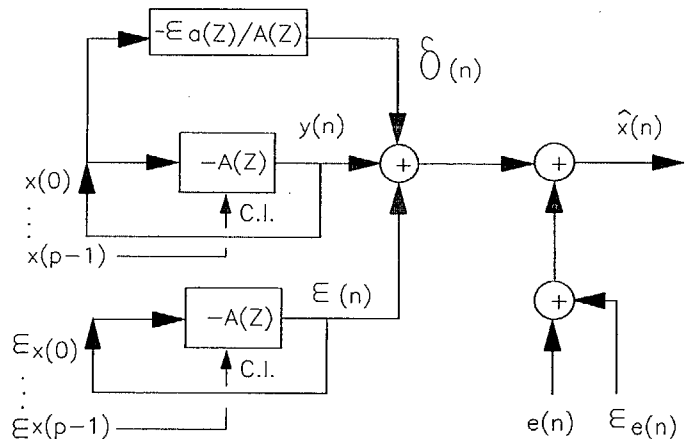
$\delta(n)$ peut être vu comme le filtré de $y(n)$, la fonction de transfert du filtre étant $-\epsilon_a(Z)/A(Z)$.

Ce qui donne encore sur le spectre une erreur additive :

$$E_a(j) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \quad (17)$$

2-4 Schéma général

En reprenant les équations (8), (13) et (17), on obtient le schéma général ci-dessous :



3- PROPAGATION DES ERREURS SUR LES CONDITIONS INITIALES

Tout le détail des calculs peut être trouvé dans [3].

On se donne les perturbations sur les conditions initiales :

$$n = 0, \dots, p-1 \quad \epsilon(n) = u(n) \quad (18)$$

On a montré que : $n \geq p, \quad \epsilon(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k \epsilon(n-k)$

On cherche à écrire $\epsilon(n)$ en fonction des p erreurs initiales.

3-1 Approche par récurrence

On établit, par récurrence, la relation suivante :

$$\forall n, \quad \epsilon(n) = \sum_{j=0}^{p-1} c(n, j) u(j) \quad (19)$$

avec

$$c(n, j) = - \sum_{i=0}^{n-p} h_i a_{n-j-i} \quad (20)$$

$$a_m = 0 \text{ pour } m > p \text{ et } m < 0$$

$$a_0 = 1$$

les $\{h_i\}$ représentant les coefficients de la réponse impulsionnelle associée à $A(Z)$.

3-2 Approche sous forme d'état

On écrit le modèle sous forme d'état :

$$\underline{\epsilon}(n) = A \underline{\epsilon}(n-1) + \underline{v}(n) \quad (21)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{p-1} & -a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\epsilon}(n) = \begin{pmatrix} \epsilon(n) \\ \epsilon(n-1) \\ \epsilon(n-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon(n-p+1) \end{pmatrix}$$

L'entrée $\underline{v}(n)$ à mettre connaissant l'état initial de la séquence $\epsilon(n) : u(0), \dots, u(p-1)$ est

$$\text{pour } n = 0, \dots, p-1 \quad v(n) = \sum_{k=0}^p a_k u(n-k) \quad (22)$$

$$n \geq p \quad v(n) = 0$$

Alors

$$\underline{\epsilon}(j) = \sum_{k=-\infty}^{j-1} A^{j-1-k} \underline{v}(k) \quad (23)$$

Le problème est de trouver l'expression de A^k .

$$A^k = \begin{pmatrix} \beta_1^k & \beta_2^k & \dots & \beta_p^k \\ \beta_1^{k-1} & \beta_2^{k-1} & \dots & \beta_p^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (24)$$

$\{\beta_i^k\}$ étant la première ligne de A^k , on a la récursion suivante:

$$\beta_i^k = -a_i \beta_1^{k-1} + \beta_{i+1}^{k-1} \quad (25)$$

On aboutit ainsi à l'expression voulue :

$$\beta_i^k = \sum_{n=1}^k (-1)^n \sum_{j=0}^{k-n} \alpha_{i+j} \prod_{l \in \Gamma_j} \alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \dots \alpha_{l_{n-1}} \quad (26)$$

n : nombre de α_l dans le produit (degré du produit)

$$\Gamma_j = \{(l_1, \dots, l_{n-1}) / j + l_1 + \dots + l_{n-1} = k-1\}$$

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1, \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$ représentant 3 produits différents (= $3\alpha_1^2 \alpha_2$) et $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$ ne représentant qu'un produit.

Pour se ramener à l'écriture de la première approche, il suffit de remplacer :

$$c(n, j) = \beta_{p-j}^{n-p+1} \quad (27)$$

3-3 Etude statistique

Si on suppose les perturbations sur les conditions initiales à moyenne nulle et à variance connue σ_u^2 , on peut faire l'étude statistique de l'erreur générée.

Dans le plan temporel

Moyenne : 0

Variance : partant de (20), on a directement,

$$\sigma_\epsilon^2(k) = \sigma_u^2 \sum_{j=0}^{p-1} c^2(k, j) \quad (28)$$

Dans le plan spectral

Moyenne : 0

Variance : Notons Esp l'opérateur espérance mathématique.

$$Esp(E^2(j)) = \sum_{k,l} Esp(\epsilon(k)\epsilon(j)) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \cos\left(2\pi j \frac{l}{N}\right) \quad (29)$$

Or

$$\begin{aligned} Esp(\epsilon(k)\epsilon(j)) &= Esp\left(\sum_{l,i} c(k, j) c(l, i) u(j) u(i)\right) \quad (30) \\ &= \sigma_u^2 \sum_{j=0}^{p-1} c(k, j) c(l, j) \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_E^2 = \sigma_u^2 \sum_{\substack{k=0, N-1 \\ l=0, N-1 \\ i=0, p-1}} c(k, i) c(l, i) \cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \cos\left(2\pi j \frac{l}{N}\right) \quad (31)$$

soit encore

$$\sigma_E^2(K) = \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{p-1} (TF_{\text{le long de } k} \{c(k, i)\})^2(K) \quad (32)$$

Notons la TF cette relation de la manière suivante :

$$C(K, i) = TF_{\text{le long de } k} \{c(k, i)\}$$

Alors :

$$\sigma_E^2(K) = \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{p-1} C^2(K, i) \quad (33)$$

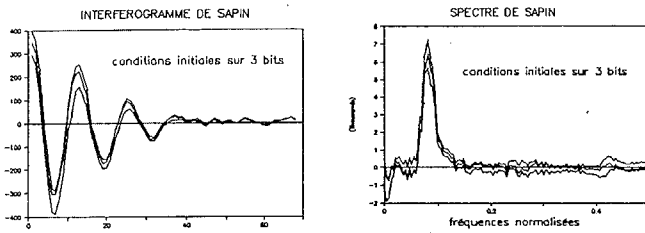
3-4 Relation entre $\sigma_\epsilon^2(k)$ et $\sigma_E^2(K)$

En utilisant la relation de Parseval à une et deux dimensions, on aboutit à la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sigma_\epsilon^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \sigma_E^2(K) \quad (34)$$

3-5 Simulations

Nous présentons ici un exemple de simulation. L'interférogramme est celui d'un sapin qu'on modélise par un AR d'ordre 10 ; lors de la reconstitution, seuls les premiers points sont quantifiés sur 3 bits. On calcule alors les variances sur l'interférogramme et sur son spectre en utilisant les expressions trouvées en (28) et en (33). On trace ensuite l'interférogramme et son spectre reconstitués ainsi que les intervalles de confiance à $\pm 2\sigma$ autour du signal et de son spectre originaux.



intervalles de confiance à 95% pour l'interférogramme et le spectre du sapin

Toutes les simulations effectuées sont venues confirmer les expressions théoriques : le signal reconstitué se situe dans l'intervalle de confiance.

D'autre part, nous avons pu vérifier à chaque fois la relation entre les variances temporelle et spectrale (34).

4- L'ERREUR DE MODELE

La modélisation AR de l'interférogramme se fait de façon classique c'est-à-dire que supposant ce signal comme étant :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) + b(n) \quad (35)$$

on minimise sur un intervalle l'erreur quadratique $b(n)$. L'ordre de modélisation nécessaire se situe autour de 10 et on vérifie bien que $b(n)$ est blanche.

La reconstruction du signal ne se fait pas avec l'erreur de prédiction linéaire (EPL) mais avec l'erreur de modèle (voir la justification en [4]). Cela revient à décrire l'interférogramme par :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) + \sum_{k=1}^p \alpha_k e(n-k) \quad (36)$$

L'EPL suivant une loi gaussienne, l'erreur de modèle -écart entre le signal et le modèle pur- suit, elle aussi, une loi gaussienne. Le quantificateur utilisé sera celui défini par Max pour la loi gaussienne [5], ce qui permet de coder cette erreur sur 2 bits. Par contre, elle n'est plus blanche : c'est l'EPL filtrée par $1/(A(Z)-1)$. Cette erreur aura donc un spectre de même forme que celui de l'interférogramme ; en particulier, il sera localisé dans la même bande que celle du signal.

5- CONCLUSION

Nous avons étudié l'effet des perturbations sur chaque type de paramètre du modèle. Cette étude nous permet de mieux dimensionner les quantificateurs. En particulier, nous pouvons voir que la quantification appliquée sur l'erreur de modèle peut être grossière car, contrairement aux deux autres types de paramètres, elle n'entre pas dans une boucle de récursion. Ce résultat n'est pas surprenant, certes mais il est intéressant de le souligner dans notre cas où le type d'erreur choisi n'est pas classique.

Les travaux que nous avons présentés dans cet article permettent de calculer un critère d'erreur dans le domaine interférogramme ou spectral, pour un taux de compression fixé. On peut aussi apprécier exactement le compromis réduction de données - dégradation de l'information pour le problème de la transmission d'images multispectrales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.Makhoul, "Linear Prediction : a tutorial review", Proc. of the IEEE, vol 63, n°4, April 1975, pp 561-580
- [2] C.Mailhes, F.Castanié, P.Vermande, "Parsimonious modeling of interferograms and correlation functions", EUSIPCO 88, Grenoble, France, 5-8 Sept. 88, vol I, pp. 399-402

[3] C.Mailhes, "Note interne : analyse des effets de quantification sur un interférogramme comprimé", GAPSE, octobre 88

[4] C.Mailhes, F.Castanié, P.Vermande, "Coding of interferograms and correlation functions", EUSIPCO 88, Grenoble, France, 5-8 Sept. 88, vol II, pp. 1003-1006

[5] J.Max, "Quantizing for the minimum distortion", IRE Trans Inform Theory, vol IT-6, pp 7-12, Mars 1960

(*) Les auteurs font partie du GRECO TSI.
Cet travaux font partie de la thèse de Corinne Mailhes.