



SOUSTRACTION DE BRUIT PAR FILTRAGE A.R.M.A. ADAPTATIF EN TREILLIS

E. Moisan, Ph. Favier

CEPHAG, URA 346 CNRS, ENSIEG, BP46, F-38402 St Martin d'Hères Cedex

RÉSUMÉ

Généralement, les méthodes adaptatives de soustraction de bruit mettent en oeuvre un filtre transversal qui, appliqué à une référence bruit seul, permet d'approcher le bruit qui s'ajoute au signal utile reçu sur un capteur particulier. Une simple soustraction fournit ensuite l'estimation de ce signal utile. Plusieurs algorithmes sont déjà bien connus et fournissent d'assez bons résultats, à condition toutefois d'augmenter à volonté la taille du filtre adaptatif, ce qui peut nuire à la stabilité du système ou poser des problèmes d'application en temps réel, du fait de l'accroissement du volume des calculs. Nous nous sommes intéressés à la mise en oeuvre d'un filtre ARMA, afin de disposer d'une mémoire infinie, contrairement aux filtres transversaux. Dans l'ensemble, les résultats obtenus sont satisfaisants, malgré une spectaculaire dégradation des performances lorsque le signal utile est, dès la réception, trop puissant. Ceci constitue bien sûr un net inconvénient vis-à-vis des structures transversales classiques.

SUMMARY

Adaptive noise cancelling often applies transversal filters to noise references. Then, a simple subtraction provides the signal estimate. Several well known methods provide good results but they are limited due to finite impulse response filter. Unfortunately increasing the width of the filter can prejudice to the stability of the system.

The performances of noise cancelling are investigated when using an ARMA lattice filter. The results are generally very good but a dramatic degradation is observed when the signal to noise ratio at the input is too high.

INTRODUCTION

La réduction de bruit, avec référence, est basée sur le fait que l'on dispose d'une source de bruit dont on sait que, selon un filtrage inconnu, elle vient s'ajouter au signal utile, reçu sur un capteur particulier. A partir de l'observation des deux processus, la référence d'une part et le signal bruité d'autre part, le traitement peut s'effectuer en deux étapes :

- estimation du filtre inconnu
- filtrage de la référence et soustraction

Le schéma classique du soustracteur adaptatif est rappelé à la figure 1.

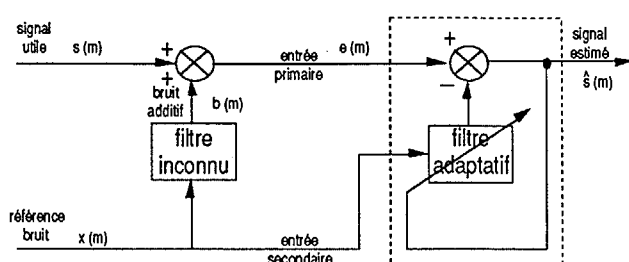


Figure 1 : Synoptique du soustracteur adaptatif de bruit

Le critère d'optimisation d'un tel ensemble consiste généralement en la minimisation d'une erreur quadratique moyenne calculée sur la sortie du système. WIDROW et al [1] ont présenté un algorithme adaptatif de moindres carrés, basé sur une technique de gradient. Plus récemment, d'autres algorithmes plus performants sont apparus : Fast Transversal Filters [2], Fast a Posteriori Error Sequential Technique [3]... Par ailleurs, il est tout à fait possible d'adapter les méthodes d'estimation de processus conjoints, basées sur des structures en treillis, à la réduction de bruit [4] et [5]. Le problème se résume alors à l'identification d'un filtre dont on observe l'entrée et la sortie perturbée par un bruit additif (fig. 2).

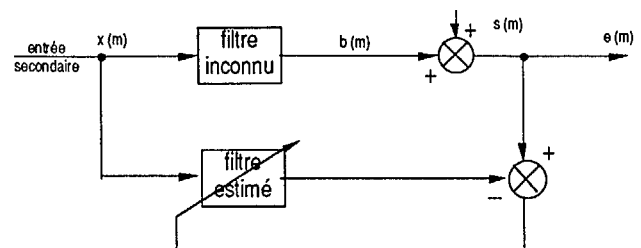


Figure 2 : Parallèle avec l'identification adaptative

Il convient de noter que, dans ce contexte, le bruit n'est autre que le signal utile.



Toutes ces techniques adaptatives, qui s'appliquent également au cas particulier de la prédiction linéaire, sont largement étudiées et commentées dans la littérature depuis quelques années déjà. Les résultats obtenus sont en général satisfaisants, mais limités par l'usage explicite d'un filtre adaptatif transversal, dont la réponse impulsionnelle est de durée finie. Ce problème précis ne se résoud pas facilement, car l'augmentation de la taille du filtre s'accompagne souvent d'accumulations d'erreurs, qui peuvent aller jusqu'à rendre le système instable. Il peut être intéressant, afin de pallier cet inconvénient, de mettre en oeuvre un filtre ARMA qui, par nature possède une mémoire infinie.

Dans un premier temps, nous voyons que la réalisation d'un tel filtrage est équivalente à l'application d'un prédicteur linéaire au processus vectoriel composé des deux entrées primaire et secondaire définies à la figure 1.

Dans un deuxième temps, nous examinons les résultats obtenus en simulation, afin d'étudier l'évolution du rapport signal sur bruit après traitement en fonction du rapport signal sur bruit à l'entrée du système.

IDENTIFICATION A.R.M.A. EN TREILLIS

Soient $x(n)$ et $e(n)$ les processus d'entrée et de sortie d'un filtre A.R.M.A. d'ordre p . Ils sont liés par l'équation :

$$e(n) = \sum_{i=1}^p a_i e(n-i) + \sum_{i=1}^p b_i x(n+1-i) \quad (1)$$

$\{a_i\}$ est l'ensemble des p coefficients A.R.
 $\{b_i\}$ est l'ensemble des p coefficients M.A.

Dans le cas particulier où l'on observe simultanément les deux processus $x(n)$ et $e(n)$, on peut considérer le vecteur composé de ces deux processus et le modéliser sous forme autorégressive:

$$\begin{bmatrix} e(n) \\ x(n) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} a_i & b_{i+1} \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(n-i) \\ x(n-i) \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} \quad (2)$$

où le vecteur $b_1 \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix}$ représente l'innovation du processus dans le cas où la référence $x(n)$ est blanche.

Cette écriture montre que l'estimation du coefficient b_1 risque de différer de celle des autres paramètres. En 1986, LIM et PARKER ont proposé une méthode simple qui permet de traiter ce coefficient b_1 comme les autres : il suffit de retarder d'un échantillon l'entrée primaire $e(n)$.
 On aboutit ainsi à l'équation

$$\begin{bmatrix} e(n-1) \\ x(n) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ f_i & g_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(n-1-i) \\ x(n-i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z(n) \end{bmatrix} \quad (3)$$

REDUCTION DE BRUIT AVEC REFERENCE

L'application au problème de la réduction de bruit est quasi immédiate, notamment dans le cas où le signal utile $s(n)$ est un bruit blanc, indépendant de la référence bruit $x(n)$. Le signal utile constitue alors l'innovation relative à la prédiction de l'entrée primaire :

$$\begin{bmatrix} e(n-1) \\ x(n) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ f_i & g_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(n-1-i) \\ x(n-i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s(n) \\ z(n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

En pratique, le traitement se décompose de la façon suivante (fig. 3) :

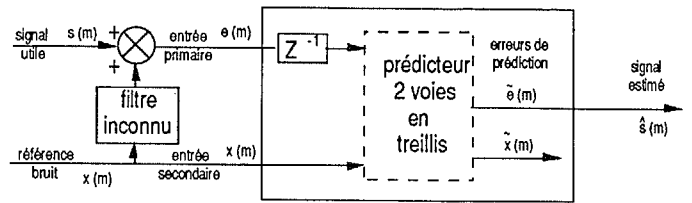


Figure 3 : Réduction de bruit par filtre ARMA en treillis

- l'entrée primaire est retardée d'un pas d'échantillonnage
- on applique un algorithme de prédiction linéaire en treillis au processus vectoriel composé des deux entrées
- l'erreur de prédiction sur la voie primaire fournit l'estimation du signal utile.

A la vue de l'équation (4), on conçoit que la présence du signal utile va dégrader les performances du prédicteur linéaire et donc du soustracteur de bruit.

Dans tout ce qui suit, nous supposons toujours que le signal utile $s(n)$ et la référence bruit $x(n)$ sont indépendants.

Nous avons testé ce dispositif sur des signaux simulés dans les conditions suivantes :

- la référence bruit était soit un bruit blanc, soit un processus autorégressif
- le signal utile était soit une fréquence pure (0,03 Hz) échantillonnée à 1 Hz, soit un bruit blanc filtré par un ARMA

$$(H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}})$$

- le filtre inconnu était un filtre ARMA

$$(H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1} - 0,3z^{-2}})$$

-l'ordre du filtre était toujours supposé connu !

Les résultats sont résumés en une seule courbe qui représente le rapport signal sur bruit à la sortie du système en fonction du rapport signal sur bruit à l'entrée. Ce dernier se calcule aisément puisque les signaux sont simulés. Par contre, nous avons choisi d'estimer le rapport signal sur bruit après traitement en exprimant la sortie $\hat{s}(n)$ sous la forme :

$$\hat{s}(n) = \alpha \cdot s(n) + w(n) \quad (5)$$

où : α est un coefficient réel de proportionnalité
 $w(n)$ est un bruit résiduel.

La difficulté réside maintenant dans le calcul du coefficient α , d'où l'on déduit ensuite le rapport signal sur bruit :

$$R_{\text{sortie}} = \frac{E \{ [\alpha s(n)]^2 \}}{E \{ [\hat{s}(n) - \alpha s(n)]^2 \}} \quad (6)$$

où E désigne l'espérance mathématique.

Lorsque la réduction de bruit se résume à l'identification d'un simple filtre transversal ([1] à [5]), il est logique de prendre le coefficient α égal à 1. Mais ceci n'est plus le cas lorsque l'on met en oeuvre un filtre ARMA, car l'ensemble du réducteur n'a plus obligatoirement un gain unitaire vis-à-vis du signal utile $s(n)$.

On montre [9], que ce paramètre α peut s'exprimer en fonction des coefficients autorégressifs estimés $\{a_i\}$:

$$\alpha = 1 + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i \frac{C_{ss}(i)}{C_{ss}(0)} - \frac{C_{sw}(0)}{C_{ss}(0)} \quad (7)$$

où C_{ss} est l'autocorrélation du signal s
 C_{sw} est l'intercorrélation entre s et l'erreur w .

Par la suite, nous avons tout simplement négligé le rapport $C_{sw}(0) / C_{ss}(0)$ dans l'équation (7), en vérifiant a posteriori qu'il était faible devant le coefficient α ainsi déterminé. Il est clair que cette approximation n'est pas parfaite !
 La courbe obtenue se découpe en trois zones distinctes (fig. 4) :

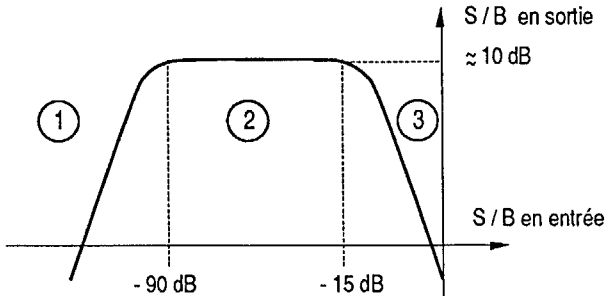


Figure 4 : Rapport signal sur bruit en sortie en fonction de l'entrée

-zone 3 : le signal utile est trop important vis-à-vis du bruit à l'entrée du système. Le filtre adaptatif s'attache alors à éliminer ce signal, avant même de s'attaquer au bruit, afin de minimiser la puissance moyenne de l'erreur de prédiction sur l'entrée primaire. C'est le handicap essentiel de la soustraction de bruit par filtrage ARMA vis-à-vis des structures transversales habituelles, dans l'hypothèse où signal et bruit sont décorrélés.

-zone 2 : le rapport signal sur bruit est quasiment constant. Après convergence, les coefficients du filtre estimé sont voisins de leurs valeurs exactes (précision de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-3}). Le paramètre α , donné par l'équation (7), ne change donc pratiquement pas si on admet que le dernier terme $C_{sw}(0) / C_{ss}(0)$ reste réglageable. Le palier obtenu en sortie signifie alors que la puissance de l'erreur w évolue comme la puissance du signal utile à l'entrée. Ce résultat est en fait assez logique puisque, du point de vue de l'identification du filtre inconnu, la présence du signal utile dégrade les performances et augmente donc la puissance de l'erreur.

-zone 1 : le rapport signal sur bruit à l'entrée est très faible. La puissance du signal utile est comparable à celle de l'erreur de prédiction minimale que l'on obtiendrait sans signal utile. L'algorithme ne parvient alors plus à détecter le signal. Par contre, le filtre ARMA est parfaitement identifié.

Il peut être intéressant d'examiner ces résultats sous un autre angle, en observant après convergence l'évolution du gain du filtre estimé pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit à l'entrée du système.

Les courbes présentées sont relatives à l'exemple suivant :
 - le filtre ARMA a pour gain en z :

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1} - 0,3z^{-2}}$$

-le signal utile est une fréquence pure (0,3 Hz) échantillonnée à 1 Hz.

La figure 5 représente l'ensemble des filtres, sous la forme module et phase en fonction de la fréquence. Le filtre inconnu que nous avons simulé est donné à la figure 5.a, tandis que les courbes 5.b à 5.f montrent le filtre estimé au fur et à mesure que le rapport signal sur bruit augmente à l'entrée du réducteur. La tendance vers le filtre autorégressif capable d'engendrer la

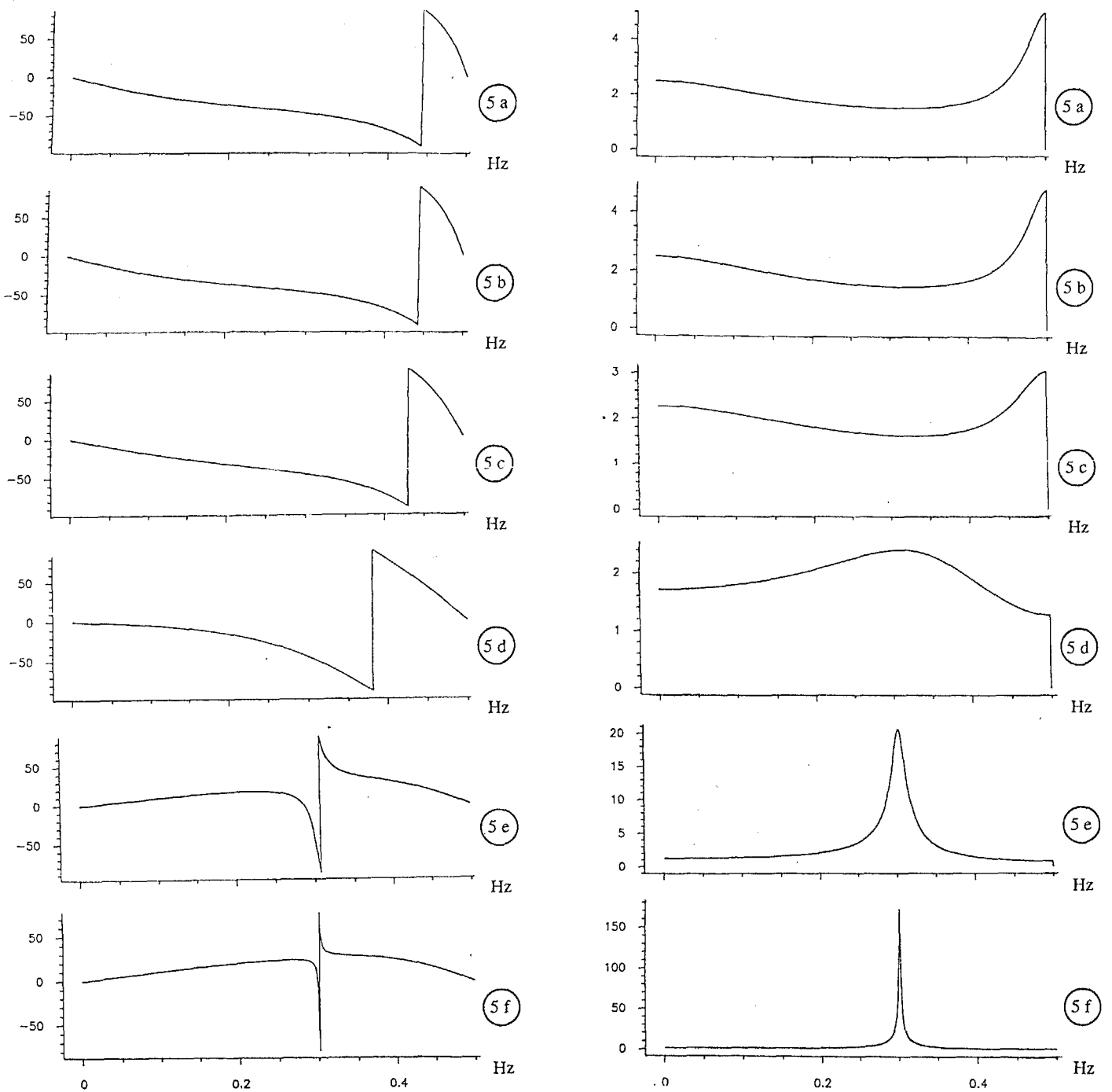
fréquence pure de 0,3 Hz est assez spectaculaire dès que le signal utile et le bruit additif ont des puissances du même ordre.

CONCLUSION

Toutes les simulations que nous avons effectuées conduisent à la même constatation. Tant que le rapport signal sur bruit à l'entrée du soustracteur est suffisamment faible, l'identification du filtre inconnu se déroule correctement et, en conséquence, le signal estimé est très proche du signal utile (le traitement procure un gain d'au moins 20 dB en terme de rapport signal sur bruit). Par contre, les performances se dégradent considérablement dès que le signal présenté à l'entrée est trop puissant. Ce phénomène, que l'on observe également avec les structures transversales classiques, est ici nettement plus critique car le filtre ARMA utilisé parvient à atténuer le signal utile lui-même. Ceci constitue bien évidemment le point faible de la méthode. Il convient de mettre au point une parade si on veut l'utiliser sans information a priori quant au rapport signal sur bruit à l'entrée. C'est le point qui nous préoccupe actuellement. Enfin, il convient de noter que l'extension de la méthode à des processus vectoriels est immédiate puisqu'elle résulte de la simple application d'un prédicteur linéaire en treillis.

REFERENCES

- [1] WIDROW et al "Adaptive noise cancelling : principles and applications. Proc. of the IEEE, vol 63 n°12, pp.1692-1716, December 1975
- [2] J.M. CIOFFI, T. KAILATH "Fast recursive least-squares transversal filters for adaptive filtering" IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing vol ASSP 32 n°2, pp 304-337, avril 1984
- [3] G. CARAYANNIS, D.G. MANOLAKIS, N. KALOUPSIDIS "A fast sequential algorithm for least-squares filtering and prediction" IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, vol ASSP 31 n°6, pp1394-1402, dec.1983
- [4] D.T.L. LEE, M. MORF, B. FRIEDLANDER "Recursive least-squares ladder estimation algorithms" IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, vol ASSP 29 n°3, pp627-641, june 1981
- [5] H. LEV-ARI, T. KAILATH, J.M. CIOFFI "Least-squares adaptive lattice and transversal filters : a unified geometric theory" IEEE Trans. on Information Theory, vol IT 30 n°2, pp 222-236, march 1984
- [6] M. MORF, D.T.L. LEE, J.R. NICKOLLS, A. VIEIRA "A classification of algorithms for ARMA models and ladder realizations". Proc. IEEE ICASSP, pp. 13-19, 1977
- [7] D.T.L. LEE, B. FRIEDLANDER, M. MORF "Recursive ladder algorithms for ARMA modeling". Proc. IEEE, conf. Déc. Contr., pp. 1225-1231, 1980.
- [8] Y.C. LIM, S.R. PARKER " On the identification of systems from data measurements using ARMA lattice models" IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, vol. ASSP 34 n° 4, pp 824-828, Aug. 1986.
- [9] Ph. FAVIER "Prédicteur adaptatif en treillis pour l'identification de filtres ARMA". Rap. de DEA n° 42/88, CEPHAG, Sept. 1988.



Phase du gain du filtre estimé en fonction du rapport S/B en entrée

Module du gain du filtre estimé en fonction du rapport S/B en entrée

5 a : filtre implanté
 5 b : S/B = -21,8 dB
 5 c : S/B = -9,8 dB

5 d : S/B = -1,8 dB
 5 e : S/B = 10,1 dB
 5 f : S/B = 18,0 dB

Fig 5