FILTRES EN TREILLIS ADAPTATIFS COMPARAISON DE DEUX APPROCHES DANS LE CAS DE SIGNAUX NON STATIONNAIRES

G.FAVIER, J.BOUDY, R.SETTINERI

CNRS/LASSY - 41 Bd Napoléon III
F-06041 NICE CEDEX
et
GRECO Traitement du signal et Images

RESUME

Cet article est consacré à la détermination des coefficients PARCOR des filtres en treillis adaptatifs , dans le cas de signaux non stationnaires. Deux approches sont considérées. La première est basée sur l'optimisation du taux de convergence de l'algorithme du gradient. La deuxième utilise un algorithme de type moindres carrés avec fenêtre glissante adaptative. Ces deux approches sont illustrées et comparées à partir d'exemples simulés.

SUMMARY

This paper is concerned with the determination of the PARCOR coefficients of the adaptive lattice filters, in the case of nonstationary signals. Two approaches are considered. The first one is based on the optimization of the step-size of the least mean squares (LMS) algorithm. The second one uses the least squares algorithm with an adaptive sliding-window. These two approaches are illustrated and compared through some simulation results.

I- INTRODUCTION:

La cellule de base (n) d'un filtre en treillis monovariable d'ordre N est associée aux équations suivantes (n =1,...,N):

$$\varepsilon_n(t)=\varepsilon_{n-1}(t)-K^r{}_n(t)r_{n-1}(t-1) \quad (1)$$

$$r_n(t)=r_{n-1}(t-1)-K^\varepsilon{}_n(t)\varepsilon_{n-1}(t) \quad (2)$$

avec: $\varepsilon_0(t)=r_0(t)=x(t)$ (3)

où x(t) représente l'entrée du filtre.

Les coefficients $K^\varepsilon{}_n$ et $K^r{}_n$, paramètres caractéristiques de la cellule (n), sont appelés coefficients de corrélation partielle (partial correlation: PARCOR) direct et rétrograde respectivement. D'autre part les signaux ε_n et r_n sont appelés résidus direct et rétrograde.

Dans le cas où l'entrée x(t) du filtre est non stationnaire, les coefficients PARCOR varient dans le temps et des méthodes récursives sous-optimale (algorithme du gradient) ou optimale (algorithme des moindres carrés) doivent être utilisées pour calculer ces coefficients et suivre leurs variations. On parle alors de filtres en treillis adaptatifs.

Les performances de ces algorithmes dépendent de manière cruciale du choix d'un paramètre de réglage: le taux de convergence α dans le cas du filtre en treillis/gradient, et la longueur de la fenêtre w dans le cas du filtre en treillis/moindres carrés à fenêtre glissante. Le choix de ces paramètres est effectué de façon à obtenir le compromis désiré entre vitesse de convergence et sensibilité au bruit. En supposant que les coefficients PARCOR subissent des variations brusques, c'est à dire en présence de ruptures de modèles, deux solutions sont envisagées dans cet article pour déterminer les paramètres α et w.

La première est basée sur l'optimisation du paramètre α obtenue à partir de la minimisation du critère d'écart résiduel portant sur la variance des résidus et introduit par [WIDROW et al-1976] dans le cas de filtres transverses. Le filtre en treillis/gradient adaptatif ainsi optimisé ([BOUDY,FAVIER-1988],[BOUDY-1988]) fait appel à la notion de degré de non stationnarité [MACCHI-1986].

La deuxième approche est basée sur l'utilisation de méthodes de détection de ruptures de modèles. Un détecteur de variations de paramètres est associé à l'algorithme de filtrage pour en améliorer la capacité de poursuite. Cette amélioration est obtenue par une diminution rapide de la longueur de la fenêtre intervenant dans le filtre en treillis/moindres carrés à fenêtre glissante.

Dans le § II, divers filtres en treillis adaptatifs sont décrits en considérant séparément le cas de signaux lentement non stationnaires et celui où les signaux sont rapidement non stationnaires. Puis dans le § III des résultats de simulation sont présentés pour illustrer et comparer le comportement des solutions proposées.

II- FILTRES EN TREILLIS ADAPTATIFS:

II-1 Cas de signaux lentement non stationnaires:

Dans le cas de variations lentes des coefficients PARCOR, il est possible d'utiliser les versions standards des filtres en treillis/gradient [GRIFFITHS-1977] ou treillis/moindres carrés avec fenêtre glissante [PORAT et al-1982]. Les équations de ces algorithmes sont rappelées dans les tableaux 1 et 2 respectivement.

Equations (1)-(3) avec:

$$K^\varepsilon{}_n(t+1)=K^\varepsilon{}_n(t) +2\alpha^\varepsilon{}_n\varepsilon_{n-1}(t)r_n(t)/S^\varepsilon{}_{n-1}(t) \quad (4)$$

$$K^r{}_n(t+1)=K^r{}_n(t) +2\alpha^r{}_n r_{n-1}(t-1)\varepsilon_n(t)/S^r{}_{n-1}(t-1) \quad (5)$$

$$S^\varepsilon{}_{n-1}(t)=\tau\ S^\varepsilon{}_{n-1}(t-1)+(1-\tau)\varepsilon^2{}_{n-1}(t) \quad (6)$$

$$S^r{}_{n-1}(t)=\tau\ S^r{}_{n-1}(t-1) + (1-\tau)\ r^2{}_{n-1}(t-1) \quad (7)$$

Tableau 1: Filtre en treillis/gradient Version normalisée à deux coefficients

Les paramètres $\alpha^\varepsilon{}_n$ et $\alpha^r{}_n$ sont appelés taux de convergence. Ils permettent de régler la stabilité et la vitesse d'adaptation de l'algorithme.

Les équations du tableau 2 sont obtenues à partir de la minimisation du critère des moindres carrés sur une fenêtre glissante de longueur w. Les équations (8) et (9) sont les équations de mise à jour temporelle du coefficient PARCOR normalisé, associées à une propagation des fronts avant et arrière de la fenêtre respectivement. Les équations (10)-(13) sont les équations de mise à jour vis à vis de l'ordre n, correspondant à une propagation des résidus direct et rétrograde dans le filtre. Les quantités $\bar{\varepsilon}_n$ et $\bar{d}_n$ représentent les résidus directs normalisés d'ordre n, calculés aux deux bouts de la fenêtre. De même pour les résidus rétrogrades normalisés $\bar{r}_n$ et $\bar{q}_n$.

$$K_{n,w}(t) = G(K_{n,w-1}(t-1), \bar{r}_{n-1,w}(t-1), \bar{\varepsilon}_{n-1,w}(t)) \quad (8)$$

$$K_{n,w-1}(t) = F(K_{n,w}(t), \bar{q}_{n-1,w}(t-1), \bar{d}_{n-1,w}(t)) \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n,w}(t) = F(\bar{\varepsilon}_{n-1,w}(t), \bar{r}_{n-1,w}(t-1), K_{n,w}(t)) \quad (10)$$

$$\bar{r}_{n,w}(t) = F(\bar{r}_{n-1,w}(t-1), \bar{\varepsilon}_{n-1,w}(t), K_{n,w}(t)) \quad (11)$$

$$\bar{d}_{n,w}(t) = F(\bar{d}_{n-1,w}(t), \bar{q}_{n-1,w}(t-1), K_{n,w}(t)) \quad (12)$$

$$\bar{q}_{n,w}(t) = F(\bar{q}_{n-1,w}(t-1), \bar{d}_{n-1,w}(t), K_{n,w}(t)) \quad (13)$$

avec:

$$F(a,b,c) = (1-c^2)^{-1/2} (a-cb) (1-b^2)^{-1/2} \quad (14)$$

$$G(a,b,c) = (1-c^2)^{1/2} a (1-b^2)^{1/2} + cb \quad (15)$$

Tableau 2: Filtre en treillis/moindres carrés à fenêtre glissante. Version normalisée

II-2 Cas de signaux rapidement non stationnaires:

Lorsque le signal d'entrée $x(t)$ subit des non stationnarités brusques se traduisant par des variations rapides des coefficients PARCOR, c'est à dire en présence de ruptures de modèles, les algorithmes décrits dans les tableaux 1 et 2 peuvent être améliorés à l'aide des solutions suivantes:

-Filtre en treillis/gradient optimisé.

-Filtre en treillis/moindres carrés avec fenêtre adaptative.

Ces solutions sont maintenant présentées.

- Filtre en treillis/gradient optimisé:

Ce filtre présenté dans [BOUDY,FAVIER-1988] et de manière plus détaillée dans [BOUDY-1988], résulte de l'application aux filtres en treillis des résultats obtenus par [WIDROW et al-1976] et [MACCHI,EWEDA-1983] relativement à l'optimisation de l'algorithme LMS avec un filtre transverse.

Soient $\delta K^{\varepsilon}_n(t)$ l'erreur de poursuite et $dK^{\varepsilon}_n(t)$ l'incrément temporel du coefficient PARCOR $K^{\varepsilon *}_n(t)$ définis comme:

$$\delta K^{\varepsilon}_n(t) = K^{\varepsilon}_n(t) - K^{\varepsilon *}_n(t) \quad (16)$$

$$dK^{\varepsilon}_n(t) = K^{\varepsilon *}_n(t+1) - K^{\varepsilon *}_n(t) \quad (17)$$

où $K^{\varepsilon *}_n(t)$ et $K^{\varepsilon}_n(t)$ représentent respectivement les coefficients PARCOR directs réel et estimé d'ordre n.

Le filtre en treillis/gradient optimisé est obtenu en optimisant le taux de convergence α^{ε}_n de manière à minimiser la déviation quadratique moyenne de la sortie $r_n(t)$ par rapport à la sortie optimale $r_n^*(t)$ définie comme :

$$r_n^*(t) = r_{n-1}(t-1) - K^{\varepsilon *}_n(t) \varepsilon_{n-1}(t) \quad (18)$$

Le critère minimisé est:

$$M_{rn}(\alpha^{\varepsilon}_n) = (\sigma^2_{rn} - \sigma^2_{r*n}) / \sigma^2_{r*n} \quad (19)$$

soit encore aprés calculs

$$M_{rn}(\alpha^{\varepsilon}_n) = \left[\alpha^{\varepsilon}_n + \frac{(y^{\varepsilon}_n)^2 (1-\alpha^{\varepsilon}_n)}{(\alpha^{\varepsilon}_n)^2}\right] \frac{1}{1-3\alpha^{\varepsilon}_n} \quad (20)$$

où y^{ε}_n représente le degré de non stationnarité [MACCHI-1986].

$$y^{\varepsilon}_n = \left[\frac{(dK^{\varepsilon}_n)^2 \sigma^2_{\varepsilon n-1}}{4\sigma^2_{r*n}}\right]^{1/2} \quad (21)$$

avec

$$\sigma^2_{rn} = E[r^2_n(t)]$$
$$\sigma^2_{r*n} = E[r^{*2}_n(t)] \quad (22)$$
$$\sigma^2_{\varepsilon n-1} = E[\varepsilon^2_{n-1}(t)]$$

et

$$dK^{\varepsilon}_n = \sup_t [|dK^{\varepsilon}_n(t)|] \quad (23)$$

La minimisation du critère (20) par rapport à α^{ε}_n est réalisée à l'aide de la méthode de Newton appliquée au numérateur de la dérivée de l'expression de $M_{rn}(\alpha^{\varepsilon}_n)$, qui est un polynôme du 3ème degré en α^{ε}_n:

$$f(\alpha^{\varepsilon}_n) = (\alpha^{\varepsilon}_n)^3 - 6(y^{\varepsilon}_n)^2 (\alpha^{\varepsilon}_n)^2 + 10(y^{\varepsilon}_n)^2 \alpha^{\varepsilon}_n - 2(y^{\varepsilon}_n)^2 \quad (24)$$

On obtient la formule itérative suivante pour le calcul du taux de convergence optimal:

$$(\alpha^{\varepsilon}_n)_{k+1} = (\alpha^{\varepsilon}_n)_k - f((\alpha^{\varepsilon}_n)_k) / f'((\alpha^{\varepsilon}_n)_k) \quad (25)$$

Des formules analogues sont obtenues pour le taux de convergence α^{r}_n.

- Filtre en treillis/moindres carrés avec fenêtre adaptative:

Cette deuxième solution est obtenue en incorporant un test de ruptures de modèles à l'algorithme de filtrage. Deux filtres en treillis/moindres carrés à fenêtre glissante de longueurs w_L et w_C (avec $w_L >> w_C$) sont utilisés en parallèle. Le test de ruptures mis en oeuvre est basé sur la comparaison des variances estimées à court terme (σ^2_C) et à long terme (σ^2_L) du résidu direct d'ordre N délivré par le filtre en treillis opérant sur la fenêtre longue w_L [FAVIER-1988]. La procédure de calcul correspondante est décrite dans le tableau 3.

1. Application des deux filtres en treillis/moindres carrés à fenêtre glissante de longueurs w_L et w_C pour le calcul des coefficients PARCOR:

   => $K_{n,w_L}(t)$ et $K_{n,w_C}(t)$

2. Calcul du critère de détection:

   $$J(t) = \sigma^2_C(t) / \sigma^2_L(t) \quad (26)$$

3. Choix de la longueur de fenêtre:

   - Si $J(t) \leq J_d$ (Pas de détection de ruptures)
     Alors on prend:
     $K_{n,w}(t) = K_{n,w_L}(t)$ (n=1,...,N)

   - Si $J(t) > J_d$ (Détection d'une rupture)
     Alors on prend:
     $K_{n,w}(t) = K_{n,w_C}(t)$ (n=1,...,N)

   J_d représente le seuil de détection

Tableau 3: Filtre en treillis/moindres carrés avec fenêtre adaptative.

Remarque: Dans les portions stationnaires du signal on utilise les résultats fournis par le filtre à fenêtre longue. Aprés une détection de rupture de modèle on commute sur le filtre à fenêtre courte pendant un nombre d'itérations égal à la longueur de la fenêtre longue.

III- RESULTATS DE SIMULATION:

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats de simulation obtenus à l'aide des deux solutions proposées précédemment.

L'exemple simulé est un filtre en treillis d'ordre 2 comportant une rupture, à l'itération 400, sur les coefficients PARCOR d'ordre 1. Les valeurs de ces coefficients ainsi que celles des coefficients (a1, a2) des modèles AR associés sont données dans le tableau 4.

Coefficients	Avant Rupture	Aprés Rupture
$K^{\epsilon}_1=K^{r}_1$	0.82	-0.92
$K^{\epsilon}_2=K^{r}_2$	-0.95	-0.95
a_1	-1.6	1.8
a_2	0.95	0.95

Tableau 4: Valeurs des coefficients du modèle simulé.

Les essais effectués sont résumés dans le tableau 5.

Fig.	Algorithme	Taux de Convergence	Longueurs de fenêtre
1-2	Gradient	$\alpha^{\epsilon}_n=\alpha^{r}_n=0.05$	
3-4	Gradient	$\alpha^{\epsilon}_n=\alpha^{r}_n=0.2$	
5-6	Gradient	Optimisé	
9-10	M.C à Fenêtre Glissante		w=100
11-12	M.C à Fenêtre Glissante		w=30
13-14	M.C à Fenêtre Adaptative		$w_L=100$ $w_C=30$

Tableau 5: Présentation des simulations

Les figures listées dans le tableau 5 fournissent le tracé des coefficients PARCOR K^{ϵ}_1 et K^{ϵ}_2. D'autre part, les figures 7 et 8 représentent les taux de convergence optimisés α^{ϵ}_1 et α^{ϵ}_2 résultant de l'application du filtre en treillis/gradient optimisé (fig. 5-6).

-Analyse des résultats de simulation:

- Filtre en treillis/gradient:

Les figures 1-2 d'une part et 3-4 d'autre part, obtenues en appliquant l'algorithme du gradient normalisé classique décrit dans le tableau 1 (c'est à dire avec un taux de convergence constant), mettent en évidence le compromis à réaliser entre vitesse de convergence et sensibilité au bruit. Comme il est bien connu, l'augmentation du taux de convergence permet de réduire le retard à la poursuite des paramètres mais au prix d'une dégradation des performances en termes de fluctuations des paramètres estimés dûes au bruit.

Les figures 5-8 montrent clairement comment ce compromis peut être réalisé en utilisant le filtre en treillis/gradient optimisé.

Remarques:

- Au niveau de l'identification, nous devons noter le couplage du coefficient K^{ϵ}_1 sur le coefficient K^{ϵ}_2 qui subit un pic transitoire de variation au moment de la rupture de K^{ϵ}_1.

- La qualité de l'identification des coefficients PARCOR dépend fortement du degré de non stationnarité y^{ϵ}_n, comme en témoignent les équations (24) et (25) permettant de calculer le taux de convergence optimisé. Ce degré de non stationnarité étant inconnu en pratique, il est nécessaire de l'estimer à l'aide de l'expression suivante:

$$y^{\epsilon}_n(t)=\left[\frac{(dK^{\epsilon}_n(t))^2\,\sigma^2_{\epsilon n-1}(t)}{4\sigma^2_{r*n}(t)}\right]^{1/2} \qquad (27)$$

avec:

$$\sigma^2_{\epsilon n-1}(t)=\tau\,\sigma^2_{\epsilon n-1}(t-1)+(1-\tau)\,\epsilon^2_{n-1}(t) \qquad (28)$$

$$\sigma^2_{r*n}(t)=\tau\,\sigma^2_{r*n}(t-1)+(1-\tau)\,r^2_n(t) \qquad (29)$$

τ étant choisi assez faible (de l'ordre de 0.6) pour ne pas atténuer l'effet de la rupture sur les variances estimées des résidus direct et rétrograde, et :

$$dK^{\epsilon}_n(t)=\tau\,dK^{\epsilon}_n(t-1)+(1-\tau)\,\bar{d}K^{\epsilon}_n(t) \qquad (30)$$

où $\bar{d}K^{\epsilon}_n(t)=\bar{K}^{\epsilon}_n(t)-\bar{K}^{\epsilon}_n(t-1)$ (31)

la quantité $\bar{K}^{\epsilon}_n(t)$ représentant la valeur lissée du coefficient PARCOR estimé $K^{\epsilon}_n(t)$. Le lissage est réalisé à l'aide d'un polynôme d'ordre 2 dont les coefficients sont identifiés en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursifs à facteur d'oubli exponentiel.

- Pendant le régime transitoire dû à l'initialisation, un filtre en treillis classique avec un taux de convergence fixé a priori est utilisé.

- Filtre en treillis/moindres carrés avec fenêtre glissante:

Dans le cas d'un algorithme avec fenêtre glissante de longueur constante, les figures 9-10 et 11-12 mettent en évidence le rôle joué par la longueur (w) de la fenêtre. La diminution de w a pour effet de réduire trés sensiblement le retard à la poursuite avec toutefois l'introduction de légères fluctuations et d'un biais sur les paramètres estimés.

Lorsqu'on fait appel à l'algorithme avec fenêtre adaptative (fig. 13-14), les résultats d'identification obtenus sont tout à fait remarquables permettant de réaliser le meilleur compromis entre capacité d'adaptation et sensibilité au bruit.

IV- CONCLUSION:

Cet article nous a permis de présenter deux nouvelles solutions pour la réalisation d'un filtre en treillis adaptatif. L'une est basée sur l'optimisation du taux de convergence intervenant dans l'algorithme du gradient, à partir de la notion de degré de non stationnarité, tandis que l'autre fait appel à l'utilisation d'un test de ruptures de modèles pour fixer la longueur de la fenêtre d'un filtre en treillis/moindres carrés avec fenêtre glissante. Ces deux solutions sont d'une complexité sensiblement identique, mais la seconde apparaît comme étant plus facile à mettre en oeuvre tout en offrant une meilleure qualité d'identification.

REFERENCES

[BOUDY-1988] "Optimisation de filtres en treillis non stationnaires et étude comparative de filtres multidimensionnels avec application au traitement d'antenne", Thèse de docteur-ingénieur, LASSY, Nice.

[BOUDY,FAVIER-1988] "Optimization of lattice filters for stationary and non stationary signals", EUSIPCO, Grenoble.

[FAVIER-1988] "Numerically efficient adaptive identification algorithms", APII, Vol. 22, n°1, pp. 27-52.

[GRIFFITHS-1977] "A continuously-adaptive filter implemented as a lattice structure", Proc. ICASSP, Hatford, pp. 683-686.

[MACCHI,EWEDA-1983] "Second-order convergence analysis of stochastic adaptive linear filtering", IEEE Tr. Aut. Cont., Vol. AC-28, n°1, pp. 76-85.

[MACCHI-1986] "Optimization of adaptive identification for time-varying filters", IEEE Tr. Aut. Cont., Vol. AC-31, n°3, pp. 283-287, March .

[PORAT et al.-1982] "Square root covariance ladder algorithms", IEEE Tr. Aut. Cont., Vol. AC-27, n°4, pp. 813-829, Aug.

[WIDROW et al.-1976] "Stationary and non stationary learning characteristics of the LMS adaptive filter", Proc. IEEE, Vol. 8, pp. 1151-1162, Aug.

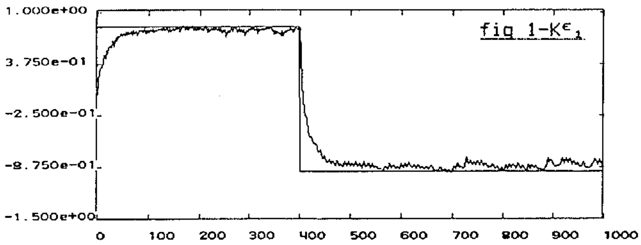
fig 1-K^{ϵ}_{1}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

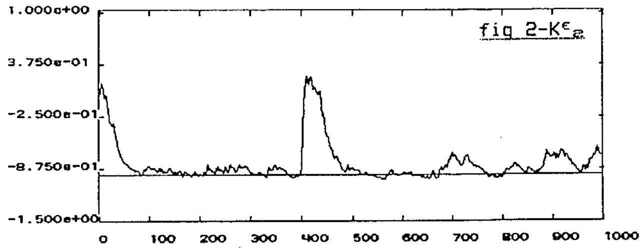
fig 2-K^{ϵ}_{2}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

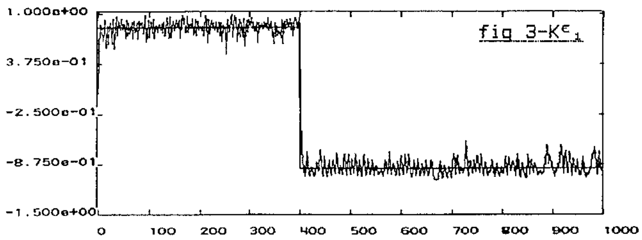
fig 3-K^{ϵ}_{1}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

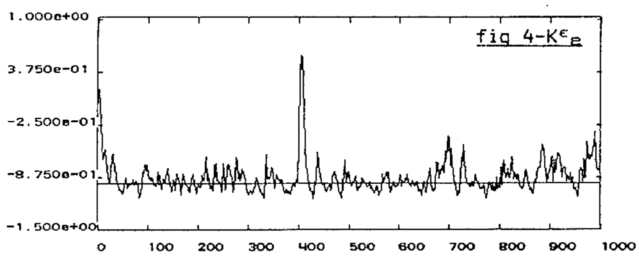
fig 4-K^{ϵ}_{2}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

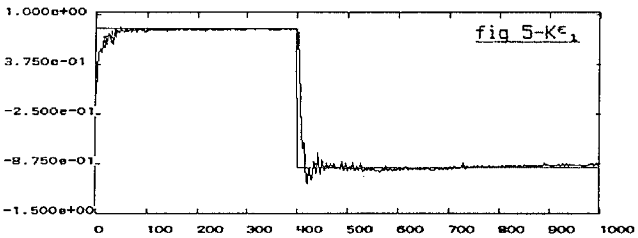
fig 5-K^{ϵ}_{1}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

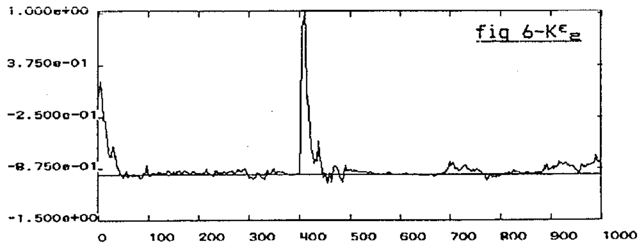
fig 6-K^{ϵ}_{2}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

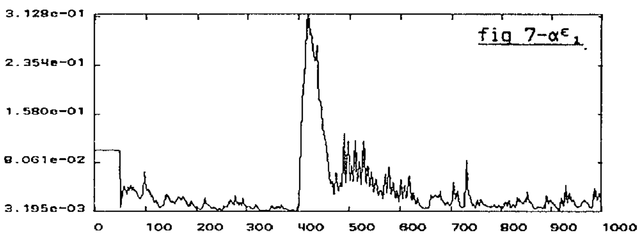
fig 7-α^{ϵ}_{1}
3.128e-01
2.354e-01
1.580e-01
8.061e-02
3.195e-03
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

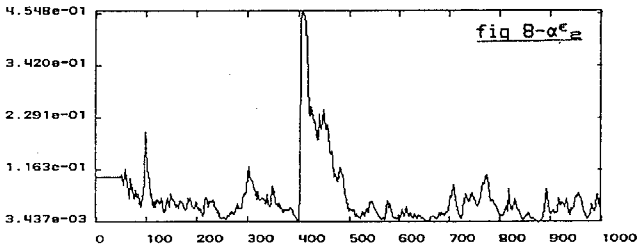
fig 8-α^{ϵ}_{2}
4.548e-01
3.420e-01
2.291e-01
1.163e-01
3.437e-03
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

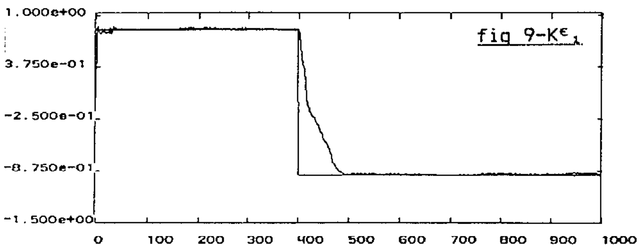
fig 9-K^{ϵ}_{1}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

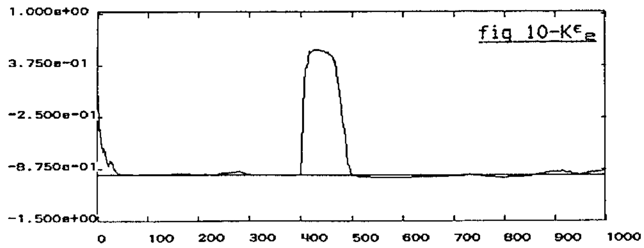
fig 10-K^{ϵ}_{2}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

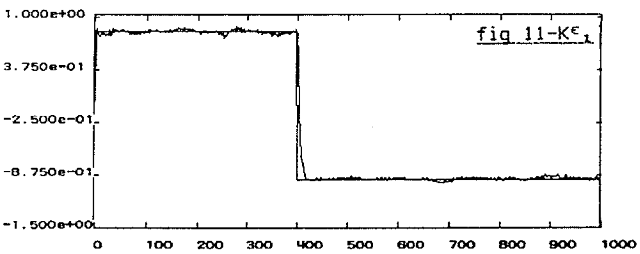
fig 11-K^{ϵ}_{1}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

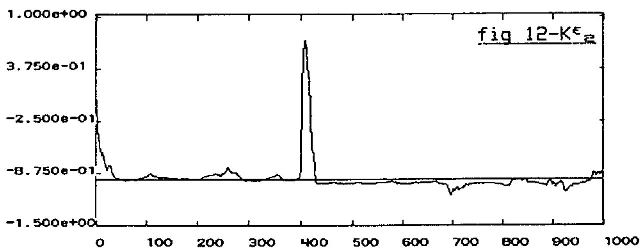
fig 12-K^{ϵ}_{2}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

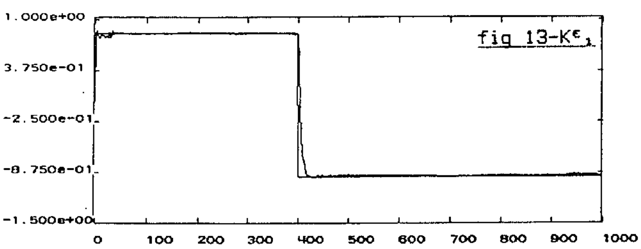
fig 13-K^{ϵ}_{1}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

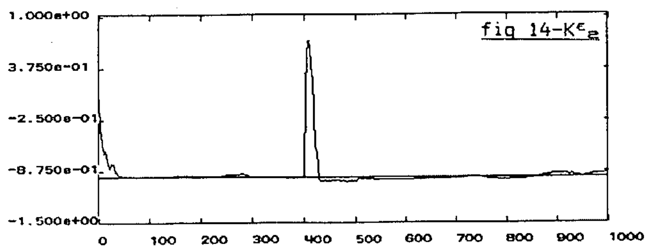
fig 14-K^{ϵ}_{2}
1.000e+00
3.750e-01
-2.500e-01
-8.750e-01
-1.500e+00
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000