

**PREDICTION DES MOUVEMENTS D'UN NAVIRE A
L'AIDE DE MODELES AR OU ARMA**

J.-Ph. PUY * - G. FAVIER ** - B. SIFFREDI ***

* NEREIDES - SUD/CAPCA - Les Oursinières, F - 83220 Le Pradet
 ** CNRS/LASSY - 41 Bd. Napoléon III, F - 06041 Nice Cedex
 *** DCAN/CAPCA - Les Oursinières, F - 83220 Le Pradet

RESUME

Cet article est consacré au problème de la prédiction à k pas des mouvements d'un navire (roulis, tangage, pilonnement) à l'aide de modèles AR ou ARMA, monovariables ou multivariables. Une analyse du type Monte Carlo est utilisée pour comparer les performances de différents prédicteurs.

1 - INTRODUCTION

Les prédicteurs linéaires à k pas sont très utilisés dans de nombreux domaines d'application (prédiction de trajectoires de mobiles manoeuvrants, prévision de charge dans les réseaux électriques, commande prédictive de processus...).

Cet article est consacré au problème de la prédiction des mouvements d'un navire (roulis, tangage, pilonnement). Ce problème joue un rôle déterminant dans les systèmes d'armes embarqués. Les signaux correspondant à chaque mouvement peuvent être modélisés soit de manière individuelle à l'aide de modèles AR ou ARMA monovariables, soit de manière globale (c'est-à-dire avec prise en compte des couplages entre les différents mouvements) à l'aide de modèles AR ou ARMA multivariables. Deux formes de prédicteurs à k pas optimaux au sens des moindres carrés (variance de l'erreur de prédiction minimale) sont tout d'abord présentées pour des signaux modélisés à l'aide de modèles AR ou ARMA : formulations à récursivité simple et multiple. Puis la procédure générale utilisée pour calculer les prédicteurs de manière adaptative est présentée. Enfin une analyse du type Monte Carlo est réalisée pour comparer les performances de différents prédicteurs appliqués à des signaux de mouvements de navire. L'effet de paramètres tels que la période d'échantillonnage et l'ordre du modèle, ainsi que l'apport lié à la prise en compte des couplages à travers une modélisation multivariable des signaux sont plus particulièrement étudiés.

2 - PREDICTEURS A k PAS DE PROCESSUS AR OU ARMA

Considérons le processus stochastique $\{x(t)\}$ modélisé à l'aide du modèle suivant :

$$A(z^{-1}) x(t) = C(z^{-1}) e(t) \quad (1)$$

$$\text{où } \dim x(t) = \dim e(t) = m \geq 1 \quad (2)$$

$\{e(t)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de covariance R.

$$A(z^{-1}) = I + A_1 z^{-1} + \dots + A_p z^{-p} \quad (3)$$

$$C(z^{-1}) = \begin{cases} I & \text{si modèle AR (p)} \\ I + C_1 z^{-1} + \dots + C_q z^{-q} & \text{si modèle ARMA (p, q)} \end{cases} \quad (4)$$

Etant donné l'ensemble des mesures $\mathcal{M}_t = \{x(\tau), \tau \leq t\}$, le prédicteur optimal à k pas ($k \geq 1$), au sens des moindres carrés (variance de l'erreur de prédiction minimale), du processus $x(t)$, dénoté $\hat{x}(t+k/t)$, peut être calculé de deux manières différentes [FAVIER, CRESP - 1983], [FAVIER et al. - 1988] :

- formulation basée sur l'utilisation d'une récursivité simple,
- formulation basée sur l'utilisation d'une récursivité multiple.

Ces deux formulations sont rappelées dans les tableaux 1 et 2 ci-après, dans le cas d'un processus ARMA multivariable.

SUMMARY

This paper is concerned with the problem of k-step-ahead prediction of ship movements (rolling, pitching, heaving) by use of AR or ARMA, monovariabile or multivariable models. A Monte Carlo type analysis is used to compare the performance of various predictors.

2.1 - Prédicteur à récursivité simple d'un processus ARMA multivariable

1) Détermination des matrices polynomiales F_k et G_k solutions de :

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1}) F_k(z^{-1}) + z^{-k} G_k(z^{-1}) \quad (5)$$

$$\text{avec } n F_k = k - 1, n G_k = p - 1 \quad (6)$$

2) Détermination des matrices polynomiales \bar{C}_k et \bar{F}_k solutions de :

$$\bar{C}_k(z^{-1}) F_k(z^{-1}) = \bar{F}_k(z^{-1}) C(z^{-1}) \quad (7)$$

3) Calcul de la matrice polynomiale \bar{G}_k :

$$\bar{G}_k(z^{-1}) = [\bar{C}_k(z^{-1}) - \bar{F}_k(z^{-1}) A(z^{-1})] z^k \quad (8)$$

4) Calcul du prédicteur à k pas :

$$\hat{x}(t+k/t) = \bar{C}_k^{-1}(z^{-1}) \bar{G}_k(z^{-1}) x(t) \quad (9)$$

Tableau 1 : Calcul du prédicteur à k pas d'un processus ARMA multivariable - Formulation à récursivité simple

Remarques :

- L'erreur de prédiction à k pas est donnée par :

$$\tilde{x}(t+k/t) = x(t+k) - \hat{x}(t+k/t) = F_k(z^{-1}) e(t+k) \quad (10)$$

C'est un processus MA d'ordre k-1.

- Dans le cas monovariabile, les étapes 2 et 3 du tableau 1 disparaissent et nous avons simplement :

$$\hat{x}(t+k/t) = C^{-1}(z^{-1}) G_k(z^{-1}) x(t) \quad (11)$$

- Le calcul du prédicteur à récursivité simple d'un processus AR multivariable se déduit des équations du tableau 1 en remplaçant $C(z^{-1})$ par la matrice identité d'ordre m. L'étape 2 disparaît alors et nous avons :

$$\bar{C}_k(z^{-1}) = I, \bar{F}_k(z^{-1}) = F_k(z^{-1}) \quad (12)$$

$$\text{et } \hat{x}(t+k/t) = \bar{G}_k(z^{-1}) x(t) \quad (13)$$

Dans le cas monovariabile nous avons de plus :

$$\bar{G}_k(z^{-1}) = G_k(z^{-1}) \quad (14)$$



2.2 - Prédicteur à récursivité multiple d'un processus ARMA multivariable

<p>1) Décomposition de la matrice polynomiale $C(z^{-1})$</p> $C(z^{-1}) = C_k^1(z^{-1}) + z^{-k} C_k^2(z^{-1}) \quad (15)$ <p>avec</p> $C_k^1(z^{-1}) = I + C_1 z^{-1} + \dots + C_{k-1} z^{-k+1} \quad (16)$ $C_k^2(z^{-1}) = \begin{cases} C_k + C_{k+1} z^{-1} + \dots + C_q z^{-q+k} & \text{si } k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases} \quad (17)$ <p>2) Calcul du prédicteur à k pas :</p> $\bar{x}(t+k/t) = -\tilde{A}(z^{-1}) \bar{x}(t+k/t) + C_k^2(z^{-1}) [x(t) - \bar{x}(t/t-1)] \quad (18)$ <p>où par définition :</p> $\tilde{A}(z^{-1}) \bar{x}(t+k/t) = \sum_{i=1}^p A_i \bar{x}(t+k-i/t) \quad (19)$ $\alpha \quad \bar{x}(t+k-i/t) = x(t+k-i) \quad \text{si } i \geq k \quad (20)$

Tableau 2 - Calcul du prédicteur à k pas d'un processus ARMA multivariable - Formulation à récursivité multiple

Remarques :

- L'expression (18) utilise une récursivité multiple dans le sens où le calcul du prédicteur à k pas fait appel aux valeurs prédites à j pas avec $j \in [k-p, k-1]$.
- La formulation à récursivité multiple est beaucoup plus facile à mettre en oeuvre que celle à récursivité simple du fait qu'elle ne nécessite pas la résolution d'équations polynomiales matricielles. Par contre, le calcul de la prédiction à k pas à l'aide d'une récursivité multiple nécessite d'avoir calculé au préalable toutes les valeurs prédites à j pas pour $j \in [1, k-1]$.
- Il est à noter que dans le cas monovariante l'algorithme de calcul du prédicteur à récursivité multiple reste rigoureusement identique à celui décrit dans le tableau 2.
- Le calcul du prédicteur à récursivité multiple d'un processus AR se réduit à :

$$\bar{x}(t+k/t) = -\tilde{A}(z^{-1}) \bar{x}(t+k/t) \quad (21)$$

3 - PREDICTEURS A k PAS AUTO-AJUSTABLES

Lorsque les paramètres du modèle AR ou ARMA sont inconnus, deux types d'algorithmes de prédiction adaptative peuvent être utilisés pour calculer le prédicteur à k pas : algorithmes de type explicite ou implicite [FAVIER, CRESP. 1983]. Dans l'étude expérimentale qui va suivre nous présenterons des résultats obtenus à l'aide d'une approche de type explicite composée de deux étapes suivantes :

- 1) Estimation récursive des paramètres du modèle AR ou ARMA.
- 2) Calcul des prédictions à l'aide des formules à récursivité simple ou multiple dans lesquelles les polynômes (cas monovariante) ou les matrices polynomiales (cas multivariable) $A(z^{-1})$ et $C(z^{-1})$ ont été remplacés par leurs valeurs estimées obtenues à l'étape 1.

Ces deux étapes sont répétées à chaque instant d'échantillonnage. L'estimation des paramètres du modèle AR est effectuée à l'aide d'un filtre en treillis/moindres carrés (voir par exemple [FRIEDLANDER-1982]). Dans le cas d'un modèle ARMA (p, q) diverses méthodes d'estimation ont été utilisées et comparées [PUY-1989].

Les résultats numériques présentés dans le paragraphe suivant ont été obtenus à l'aide d'une méthode d'identification de modèle ARMA basée sur l'identification d'un modèle AR pur d'ordre (p + q) dont les équations sont décrites dans le tableau 3. Pour plus de détails voir [FAVIER, PUY-1989].

<p>1) Estimation récursive des paramètres d'un modèle AR d'ordre (p+q) :</p> $x(t) = -\sum_{i=1}^n \alpha_n(i) x(t-i) + f_n(t), \quad n \in [1, p+q] \quad (22)$ <p>à l'aide d'un filtre en treillis/moindres carrés. On appelle σ_n^2 la covariance du résidu direct $f_n(t)$ d'ordre n.</p> <p>2) Détermination des paramètres $C_j, j \in [1, q]$, de la partie MA à l'aide de la résolution du système d'équations linéaires algébriques suivant : ($i \in [1, q]$)</p> $\alpha_{p+q}(p+i) = -\sum_{j=1}^{\text{Min}(p+i, q)} C_j \sigma_{p+q}^{1/2} \sigma_{p+q-j}^{-1/2} \alpha_{p+q-j}(p+i-j) \quad (23)$ <p>3) Détermination des paramètres $A_j, j \in [1, p]$, de la partie AR à l'aide de la résolution du système d'équations linéaires algébriques suivant : ($i \in [1, p]$)</p> $A_i = \alpha_{p+q}(i) + \sum_{j=1}^{\text{Min}(i, q)} C_j \sigma_{p+q}^{1/2} \sigma_{p+q-j}^{-1/2} \alpha_{p+q-j}(i-j) \quad (24)$

Tableau 3 - Algorithme d'identification d'un modèle ARMA (p, q)

4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous présentons ci-après des résultats expérimentaux obtenus à partir du traitement de signaux de tangage et de pilonnement simulés puis réels.

4.1 - Etude en simulation

L'objet de cette étude en simulation est de comparer les performances des prédicteurs à k pas calculés à partir d'une représentation AR ou ARMA, monovariante ou multivariable, des signaux de tangage et de pilonnement. Les prédicteurs mis en oeuvre font appel à une récursivité multiple. D'autre part, le critère de performance considéré est égal à :

$$J = \frac{\sum_{t=1}^T [x(t+k) - \bar{x}(t+k/t)]^2}{\sum_{t=1}^T x^2(t+k)} \times 100 \quad (25)$$

Afin de simuler les couplages entre les mouvements de tangage et de pilonnement, la simulation des signaux a été réalisée à l'aide de la figure 1.

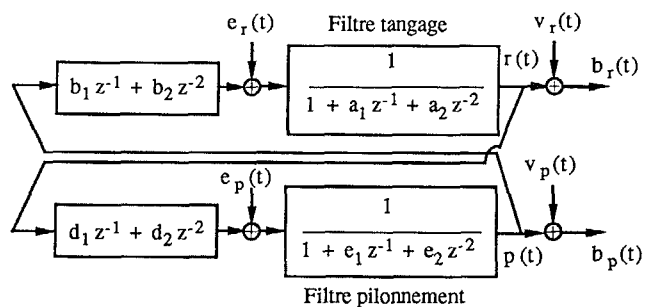


Figure 1 - Simulation des signaux de tangage et de pilonnement

Les mouvements de tangage $r(t)$ et de pilonnement $p(t)$ sont modélisés à l'aide de deux filtres AR du second ordre, tandis que les couplages des deux mouvements sont représentés à l'aide de deux filtres transverses du second ordre. Les signaux d'entrée (e_r et e_p) ainsi que les bruits de mesure (v_r et v_p) sont supposés être des séquences de bruit blanc, non corrélés entre elles et d'écart type respectif $\sigma_{e_r}, \sigma_{e_p}, \sigma_{v_r}, \sigma_{v_p}$.

Filtre tangage : Les paramètres a_1 et a_2 sont définis par :

$$a_1 = -2 e^{-\beta_r T} \cos \omega_r T, \quad a_2 = e^{-2 \beta_r T}$$

où T représente la période d'échantillonnage,
avec : $\beta_r = 2.10^{-4}$, $\omega_r = 1$

Filtre pilonnement : Les paramètres e_1 et e_2 sont définis par :

$$e_1 = -2 e^{-\beta_p T} \cos \omega_p T, \quad e_2 = e^{-2 \beta_p T}$$

avec : $\beta_p = 3.10^{-4}$, $\omega_p = 2 \pi / 5$

D'autre part, les écarts types des bruits d'entrée σ_{e_r} et σ_{e_p} sont choisis égaux à l'unité, tandis que les écarts types des bruits de mesure σ_{v_r} et σ_{v_p} sont fixés de façon à avoir un rapport signal à bruit égal à 200.

$$\left(\sigma_r / \sigma_{v_r} = \sigma_p / \sigma_{v_p} = 200 \right)$$

Nous devons noter que le schéma de la figure 1 correspond à un modèle AR bidimensionnel, bruité, du second ordre, c'est-à-dire un modèle ARMA bidimensionnel du second ordre.

Dans le tableau 4 sont résumés les essais effectués pour le calcul d'une prédiction à 100 pas ($k = 100$) des signaux de tangage et de pilonnement simulés. Une analyse du type Monte Carlo faisant intervenir 20 séquences de bruit différentes a été réalisée.

Fig.	Signaux prédits	Type de modèle	Ordre (p, q)	Période trait ^l	Critère J
2	Tangage	AR Monovariante	(20,0)	T	40 %
3	Tangage	AR Monovariante	(20,0)	5T	4 %
4	Tangage	ARMA Monovariante	(2,2)	T	45 %
5	{ Tangage Pilonnement	AR Multivariante	(10,0)	T	3 % 7 %
6	{ Tangage Pilonnement	ARMA Multivariante	(2,2)	T	4 % 7 %

Tableau 4 - Comparaison de divers prédicteurs (k = 100) sur des signaux de tangage et de pilonnement simulés

En examinant les fig. 2-6 et en comparant la valeur du critère J (erreur quadratique normalisée de prédiction) associée à chacun des essais (tableau 4), nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- L'utilisation d'un modèle AR ou ARMA monovariante conduit à une valeur importante (≥ 40 %) du critère d'erreur J. A noter que le modèle ARMA (2,2) est celui qui a donné les meilleurs résultats parmi tous les modèles ARMA d'ordre (p, q) avec p et q $\in [2, 8]$.
- La qualité de la prédiction est sensiblement la même avec un modèle AR (20) monovariante (fig. 2) et un modèle ARMA (2,2) monovariante (fig. 4).
- Lorsqu'on sous-échantillonne les données en prenant 1 point sur 5, ce qui correspond à une période de traitement égale à 5T, la qualité de la prédiction obtenue à l'aide d'un modèle AR (20) monovariante est nettement améliorée (fig. 3). Le sous-échantillonnage a comme conséquence de réduire le couplage des signaux.
- Les figures 5 et 6 mettent en évidence l'intérêt de prendre en compte un modèle AR ou ARMA multivariante. Avec un modèle AR (10), fig. 5, ou un modèle ARMA (2,2), fig. 6, la qualité de la prédiction est sensiblement voisine de celle obtenue à l'aide d'un modèle AR (20) monovariante avec un sous-échantillonnage des données.

4.2 - Traitement de données réelles

Les algorithmes de prédiction étudiés précédemment ont été testés sur des signaux réels de tangage et de pilonnement enregistrés à la mer.

Sur les fig. 7-10, nous avons tracé le critère J en fonction de la période de traitement lT , $l \in [1, 15]$. Les essais effectués sont résumés dans le tableau 5 où, pour chaque figure, nous avons indiqué les types de modèle associés aux courbes en trait plein et en trait pointillé. Le pas de prédiction a été choisi égal à $k = 60$.

Fig.	Signal prédit	Types de modèle	
		courbe trait plein	courbe trait pointillé
7	Tangage	AR(5) Multivariante	AR(10) Monovariante
8	Tangage	AR(25) Multivariante	AR(50) Monovariante
9	Pilonnement	AR(5) Multivariante	AR(10) Monovariante
10	Pilonnement	AR(25) Multivariante	AR(50) Monovariante

Tableau 5 - Comparaison de divers prédicteurs (k = 60) sur des signaux de tangage et de pilonnement réels

L'examen des fig. 7-10 permet de conclure qu'il existe une période de traitement "optimale" $\hat{l}T$ (sous-échantillonnage) pour le calcul de la prédiction. Ceci est particulièrement marqué avec un modèle AR d'ordre élevé (existence d'un minimum sur les courbes des fig. 8 et 10 pour $\hat{l} = 5$).

D'autre part, nous constatons que pour un modèle AR d'ordre faible, la modélisation monovariante donne de meilleurs résultats que le modèle multivariante (fig. 7). Par contre cette tendance s'inverse lorsqu'on augmente l'ordre du modèle AR (fig. 8 et 10).

Les auteurs sont particulièrement reconnaissants à M^r l'ICA MOUTET et M^r l'IPA RIOT pour leur soutien dans ces travaux.

REFERENCES

- [Favier, Cresp - 1983] "Etude comparative de prédicteurs auto-ajustables" - GRETSI, Nice.
- [Favier, Dubois Rougerie - 1988] "A review of k-step ahead predictors" - IFAC Symp. on identification and system parameter estimation, Pékin.
- [Favier, Puy - 1989] "Identification de modèles ARMA" - GRETSI, Juan-les-Pins.
- [Friedlander - 1982] "Lattice filters for adaptive processing" - Proc. of the IEEE, vol. 70, n° 8, pp 829-867, Ang.
- [Puy - 1989] "Identification de modèles ARMA - Application des mouvements d'un navire" - Thèse de doctorat - Université de Nice.

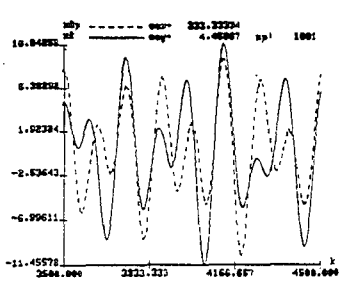


Fig. 2

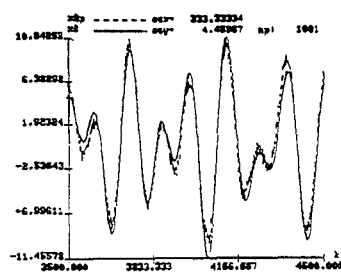


Fig. 3

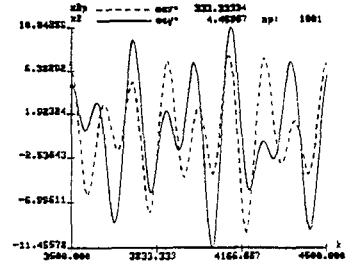


Fig. 4

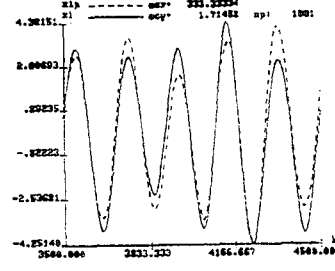
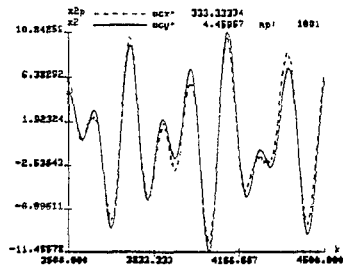


Fig. 5

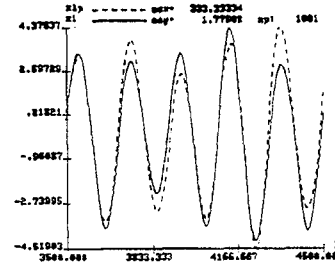
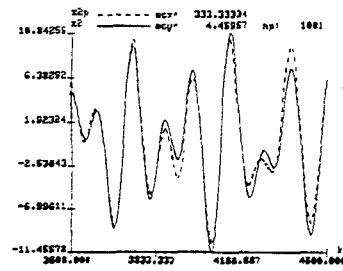


Fig. 6

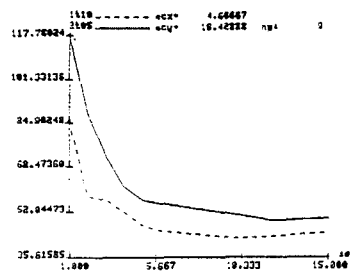


Fig. 7

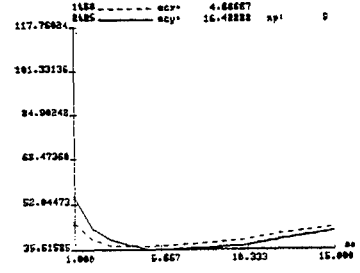


Fig. 8

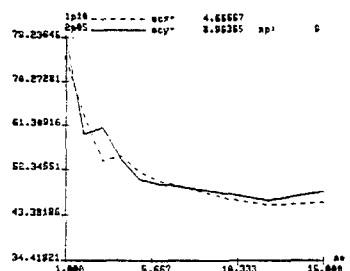


Fig. 9

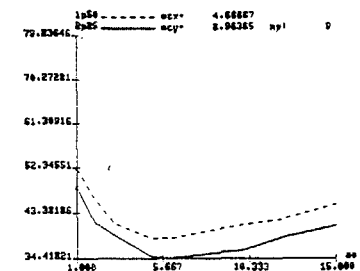


Fig. 10