APPORT DES FONCTIONS SPHEROIDALES POUR L'ESTIMATION DES PARAMETRES D'UNE CIBLE RADAR.

J.SAILLARD G.BUNEL

Laboratoire SYSTEMES et SIGNAUX HAUTES FREQUENCES
IRESTE - La Chantrerie CP3003 - 44087 NANTES Cedex03 - Tel (33) 40.68.30.64

RESUME

L'objectif de cet article est de montrer comment il est possible d'augmenter la discrimination de contributeurs proches à partir d'un fichier de mesures en utilisant une méthode basée sur l'analyse harmonique. On sait que par une transformée de Fourier, le pouvoir de discrimination est au mieux de 1/n, où n est le nombre d'échantillons. La méthode proposée utilise une batterie de filtres sphéroïdaux et permet d'obtenir une résolution égale à 2/N où N est la taille de la F.F.T.

SUMMARY

The objective of this paper shall be to show it is possible to increase discrimination of near elementary contributors from the same signal samples in using a method based on harmonic analysis. One knows that, by a Fourier transform, the normalized resolution is 1/n where n stands for the number of samples. The proposed method uses spheroïdal windows and allows to obtain a resolution equal to 2/N, N being the size of Fast Fourier transform.

1- Introduction :

Nous considérons une cible éclairée par une onde monochromatique de fréquence f. Pour diverses attitudes de la cible, nous enregistrons le champ rétrodiffusé par celle-ci, pour un couple de polarisation émission-réception fixé dans une bande Δf, l'incrément fréquentiel étant δf. La mesure est cohérente (amplitude et phase). Nous posons à priori l'hypothèse d'une cible modélisable par N contributeurs élémentaires et éclairée par une onde plane.

Le champ rétrodiffusé H(f) s'écrit en fonction de la fréquence de l'onde incidente :

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} |a_i|\, e^{j\emptyset_i}\, e^{j\frac{4\pi}{c}\delta_i f}$$

$|a_i|$ est l'amplitude du point brillant i supposée constante dans la bande d'analyse. $\emptyset_i$ est la phase propre du contributeur i. δ_i est la distance projetée sur la direction de visée cible-radar. f est la fréquence de l'onde incidente.

Nous désirons pouvoir estimer le nombre N de points brillants, la distance différentielle δ_i, ainsi que l'amplitude complexe du point brillant i.

Un problème crucial est l'estimation N du nombre de points brillants ainsi que les valeurs des paramètres associés, avec la meilleure précision possible.

En effet, il est difficile, voire im- ble, d'obtenir une bonne précision sur les paramètres, si une bonne précision e. atteinte sur l'un, celle-ci se fait au détriment de la précision sur tous les autres paramètres.

Des études ont été déjà menées dans cette direction. Des résultats significatifs ont été obtenus sur des cibles ayant des distances entre les contributeurs assez grandes par rapport à la longueur d'onde. |1| La discrimination était alors impossible pour des contributeurs très proches les uns des autres.

2 Fonctions sphéroïdales discrètes :

De nombreux articles, dont les principaux sont ceux de THOMSON |2| et de SLEPIAN |3| montrent l'intérêt d'utiliser les fonctions propres du noyau de Dirichlet, plus connues sous le nom des fonctions sphéroïdales. Les fonctions sphéroïdales discrètes sont notées $U_k(N,W;f)$ pour $k = 0,1, \ldots N-1$ et sont solutions de l'équation:

$$\int_{-W}^{W} \frac{\sin N\,\pi(f-f')}{\sin \pi(f-f')}\, U_k(N,W;f')\,df' = \lambda_k(N,W).\,U_k(N,W;f)$$

où W est la bande passante, comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, et est de l'ordre de 1/N, avec N le nombre d'échantillons.

Les fonctions sont classées selon leur valeur propre.

$$1 > \lambda_0(N,W) > \lambda_1(N,W) > \ldots > \lambda_{N-1}(N,W) > 0$$

Les 2 N W valeurs propres sont voisines de 1, ainsi la plus grande partie de leur énergie est concentrée entre [-W,W].

La propriété primordiale des fonctions sphéroïdales est leur double orthogonalité : Elles sont orthogonales sur l'intervalle [-W,W] et sur l'intervale $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

En effet :

$$\frac{1}{\lambda_k(N,W)} \int_{-W}^{W} U_j(N,W;f)\, \overline{U_k(N,W;f)}\, df = \delta_{j,k}$$

et

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_j(N,W;f)\, U_k(N,W;f)\, df = \delta_{j,k}$$

Les transformées de Fourier des fonctions sphéroïdales sont appelées les suites discrètes sphéroïdales.

$$v^{(k)}(N,W) = \frac{1}{\epsilon_k \lambda_k(N,W)} \int_{-W}^{W} U_k(N,W;f)\, e^{-j2\pi f(n-(N-1)/2)}\, df$$

avec k compris entre 0 et N-1.
ϵ_k est égal à 1 pour k pair, et à j pour k impair.

A cause de la seconde orthogonalité, il existe une seconde transformée de Fourier :

$$v_n^{(k)}(N,W) = \frac{1}{\epsilon_k} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_k(N,W;f)\, e^{-i2\pi f(n-(N-1)/2)}\, df$$

valide pour n et k variant entre 0 et N-1.

Par transformation inverse à partir de $v_n^k(N,W)$, il est possible de remonter à la forction $U_k(N,W;f)$. Il faut remarquer que la $k^{\text{ième}}$ suite sphéroïdale possède k zéros et que plus l'ordre de la fenêtre est élevé, plus l'énergie est concentrée près des extrémités.

3 Evaluation des paramètres d'une composante spectrale isolée :

THOMSON |2| s'est intéressé à l'extraction d'un signal noyé dans un bruit hautement coloré, par l'utilisation de la méthode de l'analyse harmonique.

Considérons un signal de N échantillons renfermant une raie spectrale de fréquence fo et d'amplitude μ. Pondérons ce signal par les K premières fenêtres sphéroïdales qui ont la propriété d'être doublement orthogonales.

L'estimée à la fréquence fo à la sortie du filtre k sera :

$$y_k(f_o) = \mu\, U_k(N,W;0)$$

pour k variant entre 0 et k-1.

La moyenne des estimées de μ est calculée à partir de la méthode classique de la régression |3|.

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} U_k^2(N,W;0)\, y_k(f_o)}{\sum_{k=0}^{K-1} U_k^2(N,W;0)}$$

Considérons maintenant un signal composé d'une raie spectrale de fréquence fo et d'amplitude μ(fo) auquel est venu s'ajouter un bruit b(f) quelconque.

Chaque $y_k(f)$ est considéré pour tout f un élément de la base k orthogonale à toutes les autres. Dans l'espace engendré par les K fonctions orthogonales, on peut définir une approximation de $\hat{\mu}(f)$ d'ordre K de la composante $\mu(f)$ par la combinaison linéaire :

$$\hat{\mu}(f) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} U_k(N,W;0)\, y_k(f)}{\sum_{k=0}^{K-1} U_k^2(N,W;0)}$$

La différence entre $\mu(f)$ et $\hat{\mu}(f)$ donne un signal d'erreur dû au bruit dont la norme est l'erreur quadratique moyenne. Cette approximation $\mu(f)$ de $\mu(f)$ est optimale au sens des moindres carrés.

La distance $\mu(f)$, $\hat{\mu}(f)$ est donnée par :

$$d(\mu,\hat{\mu}) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \left| y_k(f) - \hat{\mu}(f)\, U_k(N,W;0) \right|^2}{(K-1) \left| \sum_{k=0}^{K-1} U_k^2(N,W;0) \right|^2}$$

l'application du test de Fischer |7| permet de donner une indication d'existence de la raie f.

$$F(f) = \frac{\text{Puissance estimée de la raie}}{\text{écart de la puissance réelle et de la puissance estimée}}$$

$$F(f) = \frac{K\, |\hat{\mu}(f)|^2 \sum_{k=0}^{K-1} \left| U_k(N,W;0) \right|^2}{\sum_{k=0}^{K-1} \left| y_k(f) - \hat{\mu}(f) U_k(N,W;0) \right|^2}$$

Si le signal est faiblement bruité, F(f) tend vers l'infini. Plus F(f) est faible, plus l'existence de la raie f l'est également.

4 Evaluation des paramètres de composantes spectrales proches :

Considérons un signal régi par l'équation suivante :

$$y_i = \mu s_i + \nu t_i + B_i$$

B_i représente le bruit.

Nous supposons disposer de K échantillons. Ecrivons notre système sous forme matricielle et cherchons à minimiser

$y - \mu s - \nu t$ par rapport à s et à t.

Les équations de projection par rapport à s et à t s'écrivent :

$$y - \mu s - \nu t \perp s$$

$$y - \mu s - \nu t \perp t$$

ou encore :

$$(y - \mu s - \nu t, s) = (y,s) - \mu \|s\|^2 - \nu(t,s) = 0$$

$$(y - \mu s - \nu t, t) = (y,t) - \mu \|t\|^2 - \nu \|t\|^2 = 0$$

La représentation matricielle permet d'écrire:

$$\begin{bmatrix} (y,s) \\ (y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|s\|^2 & (t,s) \\ (s,t) & \|t\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}$$

avec $(a,b) = \sum_{i=1}^{K} a_i \, b_i^{*}$ et $\| a \|^2 = \sum_{i=1}^{K} |a_i|^2$

(a,b) indique le produit scalaire.

Nous connaissons les y_i, s_i et t_i, nous pouvons trouver les μ et ν. Par inversion de matrice nous obtenons :

$$\mu = \frac{1}{\Delta} \left\{ \| t \|^2 (y,s) - (t,s)(y,t) \right\}$$

$$\nu = \frac{1}{\Delta} \left\{ \| s \|^2 (y,t) - (s,t)(y,s) \right\}$$

avec $\Delta = \sum_{i=1}^{K} s_i^2 \sum_{i=1}^{K} t_i^2 - \sum_{i=1}^{K} (s_i \, t_i)^2$

sachant que les fonctions sphéroïdales forment une base orthogonale; à la sortie des K filtres sphéroïdaux nous disposons de la suite $y_1(f)$, $y_2(f)$,... $y_k(f)$, $y_K(f)$. Les équivalents des s et des t sont la suite des $U_k(0)$, $U_k(d)$. Il est à noter que les $U_k(0)$ sont réels ou nuls. Il vient alors, avec $\sum = \sum_{k=1}^{K}$

$$\Delta = \sum |U_k(0)|^2 \sum |U_k(d)|^2 - \sum |U_k(0) \; U_k(d)|^2$$

$$A = \sum (U_k(d) \; U_k^{*}(d)) \quad \sum (y_k \; U_k^{*}(0))$$

$$B = \sum (U_k(d) \; U_k^{*}(0)) \quad \sum (y_k \; U_k^{*}(d))$$

$$C = \sum (U_k(0) \; U_k^{*}(0)) \quad \sum (y_k \; U_k^{*}(d))$$

$$D = \sum (U_k(0) \; U_k^{*}(0)) \quad \sum (y_k \; U_k^{*}(0))$$

$$\mu = \frac{1}{\Delta} \left\{ A - B \right\} \qquad \nu = \frac{1}{\Delta} \left\{ C - D \right\}$$

Les valeurs de $\mu(f_1;f_2)$ et de $\nu(f_1;f_2)$ représentent les amplitudes recherchées pour le couple $(f_1;f_2)$.

A cette recherche de μ et de ν doit également être associée une indication d'existence conjointe du couple des deux composantes spectrales f_1, f_2 par application du test de Fisher bidimensionnel. Ce test s'écrit:

$$F(f_1;f_2) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \left| \mu(f_1;f_2) \; U_k(0) + \nu(f_1;f_2) \; U_k(d) \right|^2}{\sum_{k=0}^{K-1} \left| y_k(f) - \mu(f_1;f_2) U_k(0) - \nu(f_1;f_2) U_k(d) \right|^2}$$

Plus la valeur $F(f_1;f_2)$ est grande, plus l'existence du couple de raies $(f_1;f_2)$ est probable.

Ce test de Fisher est tracé pour $f_2 > f_1$, les valeurs de F sont placées dans une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Sur la diagonale est porté le résultat du test de Fisher monoraie. La visualisation en trois dimensions de F nous donne une information totale surl'existencedes raies.

Cette méthode requiert un signal de N échantillons, la pondération de ce signal par les K premières fenêtres sphéroïdales, afin de calculer les transformées de Fourier du signal apodisé. De plus, il est nécessaire de posséder les valeurs complexes des K premières suites discrètes sphéroïdales pour un produit NW = 3.5, valeur permettant d'utiliser une longueur de batterie de filtres K égale à 5.

Le nombre total de FFT à calculer est K sachant que les premières suites ont été préalablement tabulées.

Le choix de la taille de la FFT est uniquement lié à la précision souhaitée sur la discrimination de deux composantes spectrales proches et au maximum de l'erreur absolue ou relative admissible. La résolution entre deux points par cette méthode est de 2/M (M, taille de la FFT).

Au vu des résultats obtenus par les tests monodimensionnel et bidimensionnel, une décision doit être prise. Existe-t-il deux composantes spectrales proches l'une de l'autre ou une composante spectrale unique ? Un test de décroissance du pic permet de répondre à cette question. En effet, plus le pic est fin, plus l'existence de la raie le générant est vraisemblable.

Dans la zone étudiée, nous caractérisons la décroissance par :

$$D_1 = \frac{2 \, A_{(im)}}{A_{(im-1)} + A_{(im+1)}}$$

pour le test monodimensionnel,

et par :

$$D_2 = \frac{8 \, A_{(im,jm)}}{\sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} A_{(im+i,jm+j)} - A_{(im,jm)}}$$

i_m et j_m étant les coordonnées du maximum du test de Fisher bidimensionnel et A(im) ou A(im,jm) l'amplitude du test.

5 Résultats expérimentaux :

La méthode décrite dans ce rapport a été testée sur des cibles réelles. Nous en présentons ici l'un des exemples.

Nous disposons du fichier d'une cible (cb3) possédant trois points brillants principaux. Ce fichier correspond à un enregistrement de 740 valeurs de champ complexe rétrodiffusé dans une gamme de 8 à 13,2 GHz par pas de 7MHz

Sur la figure 1 sont tracées les réponses impulsionnelles de la cible (cb3) apodisées par la fenêtre naturelle et par la fenêtre de Hamming. Les FFT sont effectuées sur 1024 points. Une raie quasiment isolée émerge au voisinage de l'abscisse 0.008 en fréquence normalisée. Deux raies proches et voire confondues après une apodisation par Hamming apparaissent pour des fréquences normalisées de − 0,002 et − 0,006.

Appliquons les traitements décrits aux paragraphes 3 et 4 afin d'extraire les valeurs des paramètres.

Sur la figure 2 nous avons tracé le module du spectre (1) apodisé par une fenêtre rectangulaire, la FFT étant de 4096 points. En (2) est tracée la valeur du test de Fisher monodimensionnel et en (3) la valeur du test de Fisher bidimensionnel. Par application du critère de décision, nous remarquons que la cible ne présente qu'un seul contributeur dont les caractéristiques sont données par les valeurs contenues dans le tableau I.

a	ϕ	10^{-3} xf
1,8189	− 175 °	6,591

TABLEAU I

La précision est meilleure que $\frac{1}{2 \times 4096}$, soit : $1,2207 \times 10^{-4}$ en absolu.

Considérons à présent la région (2) de la figure 1 et appliquons le traitement proposé. Sur la figure 3, nous montrons trois tracés :

le premier correspond au module du spectre, le second au test de Fisher monodimensionnel, le troisième au test de Fisher bidimensionnel. Par application du test de décroissance, nous remarquons que dans la zone étudiée, nous avons effectivement deux contributeurs principaux proches que nous avons isolés. Les valeurs des paramètres de ces deux contributeurs sont répertoriés dans le tableau II.

N	a	ϕ	$10^{-9} \times f$
1	0,7109	- 3,6	- 1, 709
1	0,4346	- 30	- 4,150

TABLEAU II

Le test monodimensionnel avait decelé un seul contributeur (tableau III) ayant pour paramètre :

a	ϕ	$10^{-9} \times f$
0,631	- 4°70	- 1,709

TABLEAU III

La position était correctement décelée, mais une erreur importante affecte l'amplitude

6 Conclusion :

Dans le cas de l'approximation de l'optique géométrique, une cible radar admet comme modèle, sans contraintes sévères, celui des points brillants. La méthode usuellement utilisée de la réponse impulsionnelle implique que la cible soit mesurée pour un nombre élévé de fréquences, mais de part nature, ce nombre est limité.

Par des calculs classiques, la discrimination des contributeurs est délicate, quelle que soit l'apodisation effectuée sur les données. En effet, si une localisation précise du point brillant est recherchée, celle-ci se fait au détriment de la précision sur l'amplitude complexe. Si une valeur correcte de l'amplitude complexe est recherchée, celle-ci s'effectue au détriment de la localisation. Un compromis est généralement recherché et ceci dans le cas simple où les contributeurs ont été parfaitement isolés les uns des autres. Dans un cas réel, plusieurs contributeurs sont proches, les valeurs des paramètres estimés sont généralement entachées d'une erreur très appréciable si aucune précaution particulière n'est prise.

Dans cet article, nous avons montré, comment il était possible, grâce à une méthode basée également sur l'analyse harmonique, d'augmenter la précision des résultats tant en amplitude qu'en localisation, en utilisant une batterie de filtres sphéroïdaux associés à un traitement adéquat. L'apport important de cette méthode est la discrimination de contributeurs très voisins, nous savons que par analyse harmonique, le pouvoir de discrimination est au mieux de 1/N, quelle que soit la taille de la transformée de Fourier utilisée, par contre, par cette méthode, le pouvoir de discrimination est de 2/M (M étant la taille de la transformée de Fourier utilisée). De plus, du fait de l'orthogonalité des diverses fenêtres entre elles, le bruit tend à se décorréler et ainsi le rapport local signal à bruit tend à augmenter. Avec la méthode décrite, nous pouvons isoler des raies et estimer avec une excellente précision tous les paramètres des contributeurs.

A partir de ces estimations des paramètres des contributeurs d'une cible, toute simulation, à postériori, des grandeurs résultantes champ rétrodiffusé ou section efficace de rétrodiffusion est plausible.

Les auteurs tiennent à remercier la division ASRE du CELAR pour son aide.

Bibliographie :

|1| SAILLARD J., COATANHAY J.L., GADENNE Ph. *"Extraction des caractéristiques d'une cible radar à partir d'une analyse fréquentielle . Extension de la méthode."* 11ème Colloque GRETSI Nice, juin 1987, p.340-343.

|2| THOMSON D. *"Spectrum estimation and harmonic analysis"*. Proc. IEEE, vol. 70, n°9, 1982, p. 1055-1096.

|3| SLEPIAN D. *"Prolate sphéroïdal wave functions, Fourier analysis and uncertainty.- The discrete case"*. Bell System Technical Journal, vol. 57, p. 1371 - 1429, 1978.

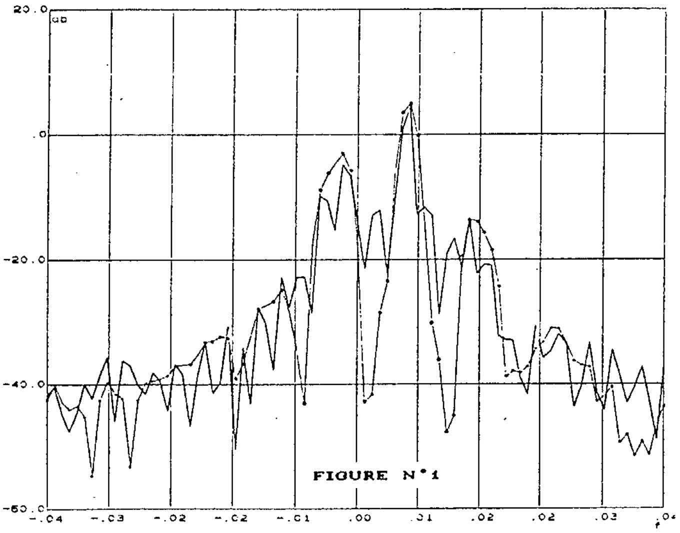

FIGURE N°1

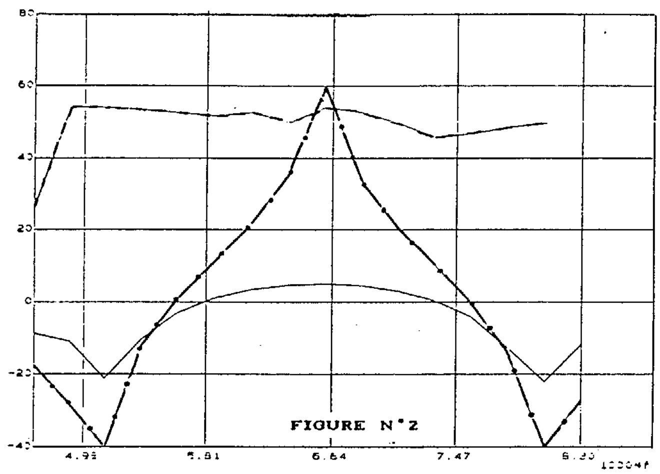

FIGURE N°2

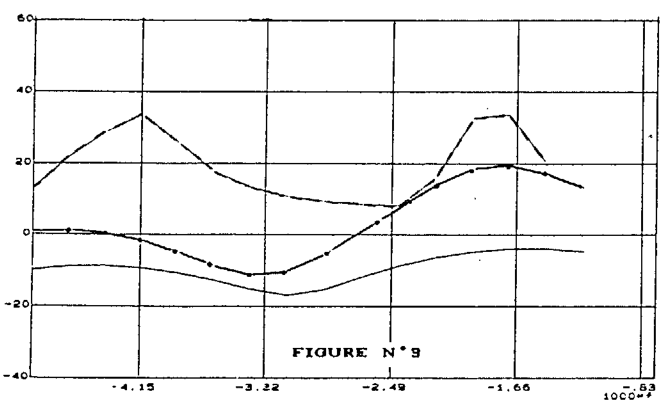

FIGURE N°3