

Quasi solutions de problèmes mal posés

J.L. Lacoume* et P. Ruiz**

* CEPHAG, INPG/ENSIEG, URA 346 CNRS, BP 46, 38402 St Martin d'Hères Cedex

** TECHNIPHONE, BP 22, 13610 Le Puy Ste Réparate

RÉSUMÉ

L'identification des sources (excitations indépendantes) contribuant à un champ de bruit peut être faite en utilisant la matrice interspectrale construite à partir de mesures lorsque :

- le nombre des mesures est supérieur au nombre des sources
- on se donne un modèle décrivant la relation (supposée linéaire et stationnaire) entre les sources et les mesures.

Nous montrons ici comment on peut traiter le problème en remplaçant le modèle strict par une famille de modèles. Cette approche rend compte de situations réelles dans lesquelles on ne peut obtenir une caractérisation totale et précise du modèle.

SUMMARY

The characterization of independent sources contributing in a noise field can be achieved if :

- the number of mesures is greater than the number of sources
- a model relating mesures and sources is given (linearity, stationarity)

Our purpose is to replace a fixed model by a woolly model, nearer of real situation, and show how we can characterize it.

1) POSITION DU PROBLEME

On veut contrôler le signal $y(t)$, dénommé sortie, issu de la combinaison linéaire inconnue de q signaux élémentaires $S_j(t)$ ($1 \leq j \leq q$) dénommés sources. On connaît le signal de sortie $y(t)$ et p signaux ($p \geq q$) de mesure $x_j(t)$ ($1 \leq j \leq p$) constitués par des combinaisons linéaires inconnues des signaux source.

Dans la pratique il s'agit de contrôler le signal $y(t)$ issu de la combinaison des bruits émis par des machines constituant les sources. On peut par exemple vouloir contrôler le bruit acoustique en un point pour lutter contre la pollution sonore. On peut contrôler le niveau sonore d'un système électro-mécanique comportant plusieurs sources acoustiques (discrétion acoustique). Ce problème n'a pas de solution dans le cas général en utilisant les propriétés énergétiques des signaux observés (mesures et sorties) qui sont résumées, dans le cas stationnaire envisagé ici par la matrice interspectrale [1] [2] [3]. On peut alors faire appel à des moments statistiques d'ordre supérieur (cumulants [4]).

Dans cet article nous limiterons nos connaissances à la mesure de la matrice interspectrale. On doit alors disposer de relations supplémentaires [5] décrivant le modèle. Les relations supplémentaires sont généralement données sous la forme de relations strictes. Nous nous placerons ici dans une autre situation. Nous supposons que nous disposons de données "incertaines" exprimant la relation entre les sources et les mesures et éventuellement la sortie. Ces relations incertaines pourront apparaître sous la forme d'inégalités comme nous le verrons dans l'exemple détaillé plus loin.

Enfin, indiquons ce que nous entendons par "contrôler la sortie". En régime "normal" la sortie a une puissance moyenne inférieure à un seuil "d'alarme". Lorsque ce "seuil d'alarme" est dépassé nous voulons être capable de déterminer la (ou les) source(s) "fautive(s)". Dans un premier temps nous supposons qu'il n'y a qu'une source fautive à chaque alarme, car nous postulons une indépendance entre ces sources qui rend peu probable l'occurrence simultanée du dysfonctionnement de deux sources.

2) LE MODELE GENERAL

Soit : $\underline{X}(n)^t = (x_1(n) \dots x_p(n))$ le signal mesuré
 $Y(n)$ la sortie à contrôler
 $\underline{S}^t(n) = (S_1(n) \dots S_q(n))$ les sources

(Les grandeurs apparaissant ci-dessous sont fonction de la fréquence, pour simplifier les écritures nous ne ferons pas apparaître la variable fréquence)

et : $\underline{R}(n)^t = (\underline{X}^t(n), Y(n))$ le signal observé

Nous postulons pour ces grandeurs un modèle aléatoire, stationnaire (variant par sauts lors des alarmes) et ergodique. Le filtrage linéaire à q entrées et $p+1$ sorties reliant les sources au signal observé est décrit par une matrice de transfert:

$$\underline{H} = (\underline{h}_1, \underline{h}_2, \dots, \underline{h}_q)$$



ou :

$$\gamma_{Y|Y_i} = \frac{|\gamma_{YX_i}|^2}{\gamma_{X_i X_i}}$$

est la portion de l'énergie de y provenant de la source i (ou, ce qui revient ici au même, de la mesure i).

Par continuité avec le cas ci-dessus, nous allons admettre que la mesure i est influencée de manière dominante par la source i .

Dans le cas de 2 sources nous écrivons donc :

$$\begin{aligned} \text{mesure 1 : } X_1 &= S_1 + \alpha_1 S_2 \\ \text{mesure 2 : } X_2 &= S_2 + \alpha_2 S_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Nous pouvons introduire S_1 et S_2 directement dans les relations (5) puisque nous ne changeons rien en remplaçant une source par un filtrée de cette source.

Nous traduirons le fait que chaque mesure est influencée de manière dominante par la source correspondante en imposant :

$$\begin{aligned} 0 \leq |\alpha_1|^2 \leq l_{\alpha 1} < 1 \\ 0 \leq |\alpha_2|^2 \leq l_{\alpha 2} < 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Les deux bornes, $l_{\alpha 1}$ et $l_{\alpha 2}$ introduisent les relations incertaines.

Les relations (1) donnent alors avec :

$$\mathcal{Y}_{pp} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

$$P_1 + |\alpha_1|^2 P_2 = \gamma_{11}$$

$$|\alpha_2|^2 P_1 + P_2 = \gamma_{22} \quad (7)$$

$$\alpha_2^* P_1 + \alpha_1 P_2 = \gamma_{12} \quad (2 \text{ relation réelles})$$

Les 6 inconnues sont : P_1 , P_2 , $|\alpha_1|$, phase de α_1 , $|\alpha_2|$, phase de α_2 .

Paramétrons le résultat par : P_1 et P_2 puissance des sources. On obtient alors dans le plan P_1 , P_2 les inégalités suivantes issues de (6) et (7) :

$$\begin{aligned} P_1 &\leq \gamma_{11} \\ P_2 &\leq \gamma_{22} \\ P_1 + l_{\alpha 1} P_2 &\geq \gamma_{11} \\ P_2 + l_{\alpha 2} P_1 &\geq \gamma_{22} \end{aligned}$$

Dans le cas représenté figure 2 on voit que les valeurs possibles de P_1 et P_2 sont localisées dans le quadrilatère hachuré et que l'on peut donc borner P_1 et P_2 par :

$$\begin{aligned} \gamma_{11} - l_{\alpha 1} \gamma_{22} \leq P_1 \leq \gamma_{11} \\ \gamma_{22} - l_{\alpha 2} \gamma_{11} \leq P_2 \leq \gamma_{22} \end{aligned}$$

Notons que les bornes inférieures de P_1 et P_2 ne sont utiles que si elles sont supérieures à 0.

On imagine aisément que dans ces conditions le bruiteur causant une alarme pourra être identifiable. Il suffit que dans la nouvelle configuration l'un des deux intervalles (et seulement l'un des deux) n'intercepte pas l'intervalle précédent. Sur la figure 3 nous présentons une alarme issue de la source 1.

Appelant γ_{11}^a , γ_{22}^a les valeurs avant alarme et γ_{11}^b et γ_{22}^b les valeurs après alarme. La source 1 est détectée comme "fautive" dès que :

$$\gamma_{11}^b - l_{\alpha 1} \gamma_{22}^b > \gamma_{11}^a$$

En considérant le cas le plus défavorable la figure 3 montre que dans ces conditions la puissance de P_1 est passée de :

$$P_{1 \min} = \gamma_{11}^a - l_{\alpha 1} \gamma_{22}^a$$

$$P_{1 \max} = \gamma_{11}^b$$

La variable maximale de P_1 pour lequel le bruiteur en cause n'est pas identifiable est obtenue lorsque :

$$\gamma_{11}^b - l_{\alpha 1} \gamma_{22}^b = \gamma_{11}^a$$

Soit :

$$\begin{aligned} \Delta P_{1MI} &= (P_{1 \max} - P_{1 \min}) \text{ maximal non identifiable} \\ &= l_{\alpha 1} \gamma_{22}^a + l_{\alpha 2} \gamma_{22}^b \end{aligned}$$

que l'on peut approcher par :

$$\Delta P_{1MI} = (l_{\alpha 1} + l_{\alpha 2}) P_2$$

on obtiendrait symétriquement :

$$\Delta P_{2MI} = (l_{\alpha 1} + l_{\alpha 2}) P_1$$

Ces résultats sont logiques et montrent bien que c'est la présence de la source 2 (resp. 1) qui limite l'identification du bruiteur 1 (resp. 2)

5) PLUS DE 2 SOURCES DE BRUIT

Le modèle est alors

$$x_i = \sum_j \alpha_{ij} S_j$$

avec : $\alpha_{ij} = 1$

Et les contraintes s'écrivent : $|i \neq j| \Rightarrow |\alpha_{ij}|^2 < l_{ij} < 1$

Nous sommes seulement intéressés par les p puissances qui vérifient le système suivant d'inéquations :

où h_i donne l'effet de la source i sur le signal observé.

Les sources sont supposées statistiquement indépendantes.

La matrice interspectrale du signal observé, qui est mesurable, est :

$$(1) \quad \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{H}}^+$$

avec : $\underline{\underline{P}} = \text{Diag} (P_i)$

P_i = puissance de la source i à la fréquence ν .

En posant :

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{H}} \begin{pmatrix} \sqrt{P_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{P_q} \end{pmatrix}$$

(1) s'écrit :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{W}}^+$$

Avec : $\underline{\underline{W}} =$ matrice $(p+1) \times q$ et $p+1 > q$

L'identification totale du système consisterait à déterminer $\underline{\underline{W}}$ à partir de $\underline{\underline{\gamma}}$.

Ecrivons :

$$\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{W}}_q \\ \underline{\underline{W}}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{W}}_q \\ \underline{\underline{\Pi}} \underline{\underline{W}}_q \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{W}}_q$ matrice $q \times q$

$\underline{\underline{\Pi}}$ matrice $(p+1-q) \times q$ dénommée dans [6] le propagateur.

On introduit $\underline{\underline{\Pi}}$ car comme il y a q sources $\underline{\underline{W}}_q$ est dans un espace à q dimensions et les q premières lignes suffisent pour la déterminer [6].

Soit alors :

$$(2) \quad \underline{\underline{\gamma}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\gamma}}_{qq} & \underline{\underline{\gamma}}_{qc} \\ \underline{\underline{\gamma}}_{cq} & \underline{\underline{\gamma}}_{cc} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\gamma}}_{qq}$ matrice $q \times q$

$\underline{\underline{\gamma}}_{qc}$ matrice $q \times (p+1-q)$

$\underline{\underline{\gamma}}_{cq} = \underline{\underline{\gamma}}_{qc}^+$ += transposée complexe conjuguée

$\underline{\underline{\gamma}}_{cc}$ matrice $(p+1-q) \times (p+1-q)$

$$(3) \quad \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{W}} \underline{\underline{W}}^+ = \begin{pmatrix} \underline{\underline{W}}_q \underline{\underline{W}}_q^+ & \underline{\underline{W}}_q \underline{\underline{W}}_q^+ \underline{\underline{\Pi}}^+ \\ \underline{\underline{\Pi}} \underline{\underline{W}}_q \underline{\underline{W}}_q^+ & \underline{\underline{\Pi}} \underline{\underline{W}}_q \underline{\underline{W}}_q^+ \underline{\underline{\Pi}}^+ \end{pmatrix}$$

(2) et (3) donnent le propagateur :

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\gamma}}_{cq} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{qq}^{-1}$$

Notons que, en présence de q sources linéairement indépendantes, $\underline{\underline{\gamma}}_{qq}$ est de rang q et donc inversible. On voit à ce stade que la détermination du modèle se ramène à la

détermination de $\underline{\underline{W}}_q$ à partir de la relation.

$$(4) \quad \underline{\underline{\gamma}}_{qq} = \underline{\underline{W}}_q \underline{\underline{W}}_q^+$$

3) IDENTIFIABILITE DU MODELE GENERAL

Elle est donnée en comparant le nombre de relations contenues dans (4) et le nombre d'inconnues. La matrice $\underline{\underline{\gamma}}_{qq}$ est hermitienne elle comporte donc :

- q données réelles

- $q(q-1)/2$ données complexes

$$\text{soit : } N_r = \boxed{q^2 \text{ relations réelles}}$$

Chaque colonne de $\underline{\underline{W}}_q$ comporte q inconnues complexes. Chacune de ces colonnes décrit la fonction de transfert entre 1 source et p mesures. Il est clair que l'on peut remplacer une source par une version déphasée (multiplication par $\exp(j\phi)$) et que cela ne changera en rien notre appréciation sur la "source fautive" qui est la source (supposée unique à chaque alarme) dont la puissance a augmenté. Chaque colonne de $\underline{\underline{W}}_q$ est donc associée à $2q-1$ inconnues réelles. Il y a donc :

$$N_i = \boxed{2q^2 - q \text{ inconnues réelles}}$$

On voit alors que : $N_i > N_d$ pour $q \geq 2$

Le modèle n'est donc pas identifiable sauf dans le cas, trivial, d'une seule source. Le nombre de paramètres libres est : $N_L = N_i - N_r = q(q-1)$

4) UNE SOLUTION POUR LE PROBLEME A 2 SOURCES

On a alors : 6 inconnues et 4 relations. Il reste donc deux paramètres réels libres. En général on ne peut aller plus loin. Dans le cas envisagé il est logique de penser que les mesures auront été réalisées dans le but, pour chacune d'entre elles, de caractériser une source particulière soit : mesure 1 pour la source 1 etc....

Si on pouvait obtenir une liaison exclusive (et linéaire) entre chaque source et chaque mesure, soit :

$$X_i(t) = F_{ij} [S_j(t)]$$

(F_{ij} filtre faisant passer de la source j à la mesure i) le problème serait résolu. En effet, dans ce cas l'estimée linéaire de Y à partir de la mesure X_i est (en notant γ_{AB} la DSPI de $A(t)$ et $B(t)$ à la fréquence ν) .

$$Y_{|x_i} = \frac{\gamma_{yx_i}}{\gamma_{x_i x_i}} X_i$$

Conduisant à :

$$\underline{\underline{\gamma}}_{YY} = \sum_{i=1}^p \frac{|\gamma_{yx_i}|^2}{\gamma_{x_i x_i}}$$



$$\begin{cases} P_i \leq \gamma_{ij} \\ P_i + \sum_{j \neq i} l_{ij} P_j \geq \gamma_{ii} \end{cases}$$

Bornant les valeurs possibles de P_i dans un polyèdre éventuellement tronqué par les conditions : $P_i \geq 0$

Ceci conduit pour chaque puissance aux bornes suivantes :

$$\gamma_{ij} - \sum_{j \neq i} l_{ij} \gamma_{jj} \leq P_i \leq \gamma_{ii}$$

ou bien

$$\Delta P_i \geq \sum_{j \neq i} l_{ij} P_j$$

6) APPLICATION

Nous avons utilisé deux sources réelles issues du banc de mesure ALIS du Cerdan (normalisées en puissance à la fréquence f).

Les mesures X_1 et X_2 simulées sont construites à partir des deux sources $S_1(f)$ et $S_2(f)$:

$$\begin{cases} X_1(f) = S_1(f) + \alpha_1 S_2(f) \\ X_2(f) = \alpha_2 S_1(f) + S_2(f) \end{cases}$$

avec $\alpha_1 = 0,3$ et $\alpha_2 = 0,3$

Les auto et interspectres sont calculés par périodogramme moyenné (32 moyennes de 512 points).

Nous supposons que :

$$l\alpha_1 = l\alpha_2 = 0,5$$

En notant γ_{ii} la DSP de la mesure X_i , et P_1 et P_2 les DSP des sources

$$\begin{cases} \gamma_{11} - l\alpha_1 \gamma_{22} \leq P_1 \leq \gamma_{11} \\ \gamma_{22} - l\alpha_2 \gamma_{11} \leq P_2 \leq \gamma_{22} \end{cases}$$

Les courbes présentées représentent les domaines possibles des puissances de S_1 et S_2 avant alarme ($P_1 = P_2$) et après alarme (la puissance d'une des deux sources a augmenté). La courbe de puissance de S_1 (Fig. a) fait apparaître 2 bandes disjointes des valeurs possibles de P_1 avant et après alarme. On conclut que S_1 a augmenté.

L'intersection des domaines de valeurs possibles de P_2 avant et après alarme, n'est pas nulle (Fig. b) : on conclut que S_2 peut ne pas avoir augmenté.

7) CONCLUSION

Il est bien connu que la matrice interspectrale ne permet pas d'identifier des sources en l'absence d'un modèle (éventuellement paramétrique avec un nombre de paramètre dépendant du nombre de sources et du nombre de capteurs comme cela a été montré en [3]. Nous avons traité un problème d'identification partielle dans lequel nous cherchons à identifier la source causant une

augmentation de puissance d'une sortie particulière. Nous avons montré que le problème peut être résolu en se limitant à des contraintes relativement peu contraignantes sur le modèle de la fonction de transfert entre les sources de bruit et les capteurs de mesure.

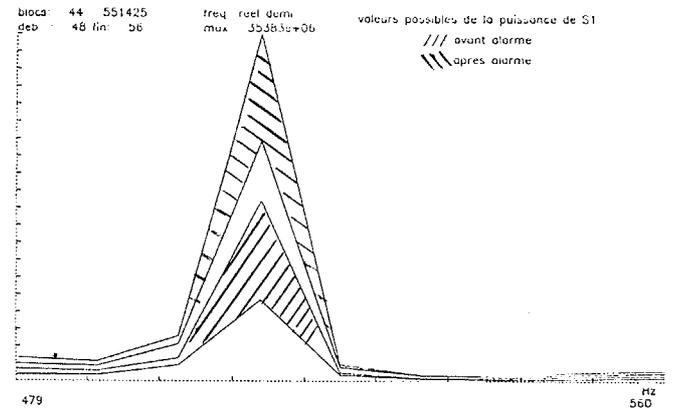


Fig. a : Evolution de la puissance de S_1 .

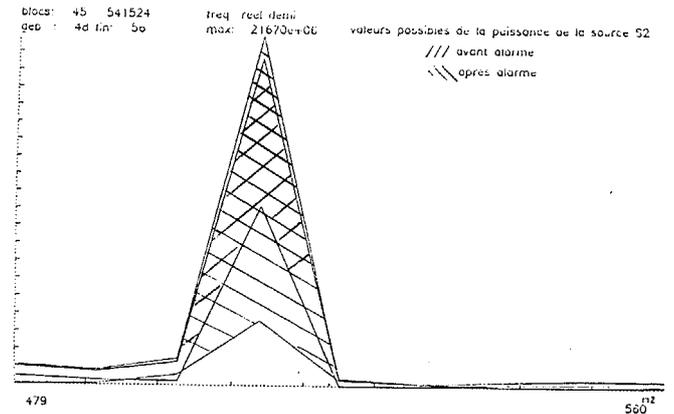


Fig. b : Evolution de la puissance de S_2 .

Ce travail a été réalisé conjointement par le CEPHAG et la Société TECHNIPHONE avec le support du CERDAN-Toulon.

RÉFÉRENCES

- [1] H. Mermoz. Filtrage adapté et utilisation optimale d'une antenne. NATO ASE. Grenoble France, 163-294, 1964.
- [2] J.S. Bendat, A.G. Piersol. Random data analysis and measurements procedures. Chap. 7, 2nd edition, 1986, John Wiley & sons.
- [3] J.L. Lacoume, B. Boutheymy, F. Glangeaud et C. Latombe. Use of spectral for sources identification. Proc. of Inst. of Acoustics "Spectral Analysis and its use in Underwater Acoustics". Londres Avril 1982.
- [4] J.L. Lacoume and P. Ruiz. Source Identification : a solution based on the third and fourth order cumulants. IEEE ASSP, Minneapolis, August 1988.
- [5] H. Mermoz. Imagerie correlation et modèles. Ann. Télécom. n° 31, pp 17/36, Janv/Fev. 1976.
- [6] J. Munier, G. Jourdain, G.Y. Delisle. A New algorithm for the identification of distorted wavefronts. NATO, Kingston Canada, Juillet 1988.