

UNE ALTERNATIVE AUX MÉTHODES À HAUTE RÉOLUTION BASÉES SUR LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS PROPRES

Bernard LUMEAU¹ et Henri CLERGEOT²

¹LSS, CNRS-ESE, Plateau du Moulon, 91192 GIF-SUR-YVETTE Cedex
²LESIR-ENS, 61, Av. du Président Wilson, 94230 CACHAN

RÉSUMÉ

Une méthode est proposée pour la détermination de l'espace source à partir de la matrice de covariance, qui d'une part permet de s'accommoder d'hypothèses très générales sur le bruit, et d'autre part remplace la classique décomposition en valeurs singulières par une factorisation plus simple de la matrice ($N \times N$), termes bruités exclus. La méthode intègre un critère statistique pour la détermination du rang r , c'est-à-dire du nombre de sources. Elle comprend une phase d'initialisation et une phase d'optimisation. L'initialisation exploite les relations de dépendance entre colonnes liées à la singularité de la matrice, dans l'hypothèse $N > 2r$. L'algorithme d'optimisation est de type gradient, avec choix optimal du pas; il peut être utilisé dans un contexte adaptatif pour poursuivre l'évolution de l'espace source.

SUMMARY

A new method is proposed for the estimation of the signal subspace from the data covariance matrix ($N \times N$). This has two main advantages: first, it accounts for more general hypotheses on the noise, and secondly, it replaces the usual EVD decomposition by a simpler factorization of the covariance matrix, the noisy terms being excluded. The method also provides the rank r of the signal matrix, equal to the number of sources. A first initialization step takes advantage of the linear relations between rows of the matrix connected to the singularity. It assumes that the rank r is smaller than $N/2$. The optimization step uses a gradient algorithm with optimal step selection. It can be used in a non-stationary context to track the variations of the signal subspace.

I. INTRODUCTION

Soit une observation sous forme vectorielle \mathbf{x} . Les composantes peuvent être les valeurs successives d'un signal temporel échantillonné, ou des signaux à un instant donné sur les éléments d'une antenne (signal spatial), ou la concaténation d'observations spatiales et temporelles en un seul vecteur [1]. Un cas important en pratique est celui où l'observation \mathbf{x} est un combinaison linéaire de "vecteurs sources" $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}(\varphi_i)$ et d'un bruit sous la forme :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \eta_i \mathbf{s}(\varphi_i) + \varepsilon, \quad (1)$$

où $\mathbf{s}(\varphi)$ est une fonction connue d'un paramètre φ . Ce modèle s'obtient en particulier en traitement d'antenne, φ désignant un paramètre (scalaire ou vectoriel) de position des sources, $\mathbf{s}(\varphi)$ étant déterminé par la géométrie de l'antenne et le modèle de propagation.

Les méthodes les plus performantes pour déterminer les φ_i à partir d'un ensemble d'observations \mathbf{x} , sont fondées sur la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance. Moyennant certaines hypothèses sur le bruit, elles permettent une détermination asymptotiquement non biaisée de l'"espace source" \mathcal{S} , espace vectoriel engendré par les r vecteurs sources $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_r$. A partir de \mathcal{S} , des algorithmes classiques (goniomètre [2], Tufts Kumaresan [3], Kung [4]) permettent d'identifier les φ_i . Nous proposons de reconsidérer les trois points clefs qui apparaissent dans cette démarche : généralisation des hypothèses de départ sur le bruit, alternative aux méthodes de décomposition en valeurs singulières (SVD) ou de décomposition en valeurs propres (EVD) dans la détermination de \mathcal{S} , alternative aux algorithmes de recherche des φ_i .

I.1. Alternative à l'EVD pour la détermination de l'espace source \mathcal{S} .

D'après (1) et sous l'hypothèse d'un bruit décorrélé avec le signal, la matrice de covariance $\Gamma_{\mathbf{x}}$ de l'observation peut s'écrire comme une somme

$$\Gamma_{\mathbf{x}} = \Gamma_{\mathbf{y}} + \Gamma_{\varepsilon} \quad (2)$$

où $\Gamma_{\mathbf{y}}$ est la covariance du signal non bruité et Γ_{ε} la covariance du bruit.

La remarque fondamentale est que si le nombre r de sources est inférieur à la dimension N du vecteur \mathbf{x} , $\Gamma_{\mathbf{y}}$ est de rang $r_{\mathbf{y}} \leq r < N$. Nous supposons que $r_{\mathbf{y}} = r$, ce qui est vrai assez généralement (sources non totalement corrélées [5]). Dans ces conditions la décomposition en éléments propres de $\Gamma_{\mathbf{y}}$ comporte seulement r valeurs propres différentes de zéro, les vecteurs propres correspondants constituent une base orthonormée de \mathcal{S} [5].

Une première idée de la présente communication sera de remplacer l'EVD par une factorisation plus simple sous forme d'un produit de matrices rectangulaires $N \times r$: $\Gamma_{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{\dagger}$. L'espace source est alors identifié comme étant le sous espace vectoriel engendré par les r vecteurs colonne de \mathbf{M} . Eventuellement une base orthonormée peut en être déduite pour transposer directement les algorithmes de type goniomètre, etc... Le choix de l'algorithme de factorisation est fortement influencé par les hypothèses sur le bruit.

I.2. Hypothèses sur le bruit

Le gros intérêt de la méthode de détermination de \mathcal{S} par EVD est que si le bruit est blanc ($\Gamma_{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{I}$) les vecteurs propres de $\Gamma_{\mathbf{x}}$ et $\Gamma_{\mathbf{y}}$ sont les mêmes : l'espace source \mathcal{S} peut donc être déterminé sans erreur à partir de la covariance du signal bruité $\Gamma_{\mathbf{x}}$, au lieu de $\Gamma_{\mathbf{y}}$, non accessible directement. Le principe peut



s'étendre au cas d'une matrice Γ_e quelconque, mais connue à un facteur près : on se ramène au cas précédent par une opération matricielle de préblanchiment [6].

Nous nous intéressons ici à un autre cas important en pratique, celui de bruits décorrélés mais de variances différentes et inconnues. Γ_e est alors diagonale, mais non scalaire (la méthode s'étendrait à une matrice "en bande", tenant compte de corrélation des bruits entre capteurs voisins).

Une solution à ce problème a été proposée, dans le cadre de l'analyse factorielle [7,8]. La matrice diagonale Γ_e est estimée itérativement, chaque étape comportant une EVD de $\Gamma_x - \hat{\Gamma}_e$, et le calcul des nouveaux éléments diagonaux après réduction du rang à l'ordre r , supposé connu, par troncature de la suite des valeurs propres. L'algorithme est donc très lourd et le rang r doit être connu à l'avance.

Une autre approche, inspirée de la méthode de la variable instrumentale, consiste à partitionner x en deux sous vecteurs x_1 et x_2 , $x^T = [x_1^T, x_2^T]$ de telle sorte que les bruits sur x_1 et x_2 sont décorrélés et la covariance $\Gamma_{x_{12}} = E[x_1 x_2^T]$ n'est pas affectée par le bruit [9]. Désignons par N_1 et N_2 les dimensions de x_1 et x_2 , $\Gamma_{x_{12}}$ représente le bloc inférieur gauche $N_1 \times N_2$ de Γ_x , entièrement en dessous de la diagonale. Supposons que N_1 et N_2 soient supérieurs à r , ce qui implique $N > 2r + 1$. On peut alors introduire pour x_1 et x_2 des sous espaces signaux \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de dimension r , qui sont aussi, respectivement, l'espace colonne et l'espace ligne de $\Gamma_{x_{12}}$. Ils sont identifiables par la SVD de $\Gamma_{x_{12}}$, qui s'écrit

$$\Gamma_{x_{12}} = \sum_{i=1}^{\min N_1, N_2} \eta_i u_i v_i^+ \quad (3)$$

Il n'y a que r valeurs non nulles de η_i ; les vecteurs u_i correspondants (respectivement v_i) constituent une base orthonormée pour \mathcal{S}_1 (respectivement \mathcal{S}_2). La détermination des φ_i peut alors être faite par les méthodes classiques (goniomètre, etc...) à partir de \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 ou une combinaison des deux.

La méthode présentée ici reprend l'hypothèse $N > 2r + 1$ mais vise d'une part à éviter la SVD, d'autre part à améliorer la précision par une meilleure utilisation des données. Elle se présente en trois étapes de précision, mais aussi de complexité, croissante. Elle approfondit un principe déjà présenté par les auteurs [10,11].

La première étape remplace la SVD de $\Gamma_{x_{12}}$ par une factorisation triangulaire selon un algorithme voisin de l'algorithme du pivot de Gauss; elle s'accompagne d'un réarrangement des lignes et colonnes de Γ_x correspondant au choix du meilleur "pivot", et d'un critère de détermination du rang.

La deuxième étape vise à améliorer la robustesse en présence de fluctuations statistiques. On obtient une factorisation du bloc inférieur $(N-r) \times N$ de Γ_y en exprimant les colonnes de cette matrice comme combinaison linéaire des r premières par un critère de moindres carrés. On en déduit une factorisation de Γ_y elle-même qui conduit à une estimation de l'espace signal \mathcal{S} .

La troisième étape détermine une factorisation symétrique de Γ_y sous la forme MM^+ par minimisation d'un critère de moindres carrés portant sur les éléments non diagonaux de Γ_x , non affectés par le bruit. L'algorithme est de type gradient. La convergence est accélérée par une méthode de choix du pas optimal, et en privilégiant dans le gradient la composante orthogonale aux vecteurs colonne de M , seule responsable de l'évolution de l'estimée de \mathcal{S} vers l'optimal. L'algorithme peut être initialisée par les étapes 1 ou 2, ou être utilisé en contexte adaptatif pour suivre l'évolution de \mathcal{S} en présence de sources mobiles.

I.3. Localisation des sources

Dans la mesure où les vecteurs colonne de M appartiennent à \mathcal{S} , ils ont la forme (1) d'observations non bruitées. Si les vecteurs sources sont de forme exponentielle, $s_i^+ = (1, z, z^2, \dots, z^{n-1})$, dans la mesure où le bruit a été éliminé, on peut se contenter d'appliquer la méthode d'erreur de prédiction minimale aux pseudo-observations constituées par les vecteurs colonne, avec un prédicteur d'ordre r . De façon à peu près équivalente on peut aussi appliquer la méthode de Kung [4] non pas aux r vecteurs propre signal, mais aux r vecteurs colonne de M .

II. DÉTERMINATION INITIALE DE L'ESPACE SOURCE

Ce paragraphe correspond aux étapes 1 et 2, qui peuvent suffire à déterminer \mathcal{S} si les erreurs statistiques sont faibles ou servir d'initialisation à l'algorithme d'optimisation.

II.1. Prédétermination du rang et classement des capteurs

On effectue une factorisation triangulaire du mineur inférieur gauche $N/2 \times N/2$ de Γ_x par une procédure identique à l'algorithme d'élimination de Gauss : on garde la première colonne et on la retranche aux suivantes de façon à faire apparaître des zéros sur la dernière ligne. On répète la même opération avec la deuxième colonne de façon à faire apparaître des zéros dans l'avant dernière ligne, etc... Si le mineur est de rang $r < \frac{N}{2}$

les colonnes $r+1, r+2, \dots, \frac{N}{2}$ sont combinaison linéaire des r premières, et à l'itération r de l'algorithme on voit apparaître des colonnes complètes de zéro.

Pour améliorer la fiabilité de l'algorithme on normalise la matrice et on modifie itérativement l'ordre des capteurs de façon à assurer le meilleur conditionnement du mineur $r \times r$ inférieur gauche. La normalisation consiste à ramener à 1 les éléments diagonaux de Γ_x , c'est-à-dire à travailler sur la matrice de cohérence (voir paragraphe III). Pour réordonner les capteurs, à chaque itération après avoir retranché une colonne aux suivantes, on cherche dans le tableau résultant l'élément ayant le module le plus grand, et on le ramène comme "pivot", premier élément de la nouvelle colonne à conserver.

Pour déterminer le rang, avant de continuer l'algorithme, on compare le pivot sélectionné à un seuil. Dans l'hypothèse où l'on a atteint le rang r , l'espérance du pivot c_k est nulle et on peut utiliser un test du type $|c_k|^2 \leq \alpha$. σ_k^2 si σ_k^2 est la variance du pivot c_k . Reste à calculer σ_k^2 .

À l'itération k l'algorithme de factorisation en est au stade représenté sous la forme matricielle suivante :

$$\Gamma_x \cdot \Lambda = \Gamma_{xe} \quad (4)$$

où Λ est la matrice de coefficients des combinaisons linéaires entre colonnes et où la matrice résultante Γ_{xe} peut s'interpréter comme la matrice des intercorrélations entre les variables x_i et $e_j = \sum \lambda_{j,i} x_i$.

Dans l'hypothèse Gaussienne, en supposant Γ_x estimé par une moyenne sur L_c échantillons indépendants on démontre que si les variables x_i sont normées ($\sigma_{x_i}^2 = 1$) :

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{L_e} \sigma_{e_k}^2 \quad (5)$$

où:

$$\sigma_{e_k}^2 = E[|e_k|^2] = E[(\sum_{\ell} \lambda_{k,\ell} x_{\ell}) e_k^*] = \sum_{\ell} \lambda_{k,\ell} (\Gamma_{xe})_{\ell k} \quad (6)$$

qui se calcule à partir des matrices Γ_{xe} et Λ .

II.2. Estimation de l'espace source \mathcal{S}

On conserve l'arrangement des capteurs précédemment obtenu, qui assure que les r premières colonnes de Γ_y sont indépendantes. On se limite à des vecteurs de longueur $N-r$, correspondant aux $N-r$ dernières composantes, non affectées par le bruit diagonal de Γ_x . Les $N-r$ autres vecteurs colonnes doivent s'exprimer comme combinaison linéaire des r premiers. On se propose de trouver les coefficients de cette combinaison pour chaque colonne, par un critère de moindre carrés, portant sur les $N-r$ derniers éléments des colonnes de Γ_x , sauf un, l'élément diagonal perturbé par le bruit. En pratique on remplace cet élément par un paramètre inconnu qui sera déterminé également par le critère de moindre carré. Désignons par γ_k l'estimée d'un vecteur colonne à partir des r premiers :

$$\hat{\gamma}_k = \Gamma \mathbf{b}_k, \quad k > r \quad (7)$$

où Γ est la matrice $(N-r) \times r$ des r premiers vecteurs colonnes, \mathbf{b}_k le vecteur des coefficients. Désignons par $\tilde{\gamma}_k$ le $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne, complété sur la diagonale par le paramètre inconnu s_k ; il est de la forme :

$$\tilde{\gamma}_k = \gamma_k + \beta_k \mathbf{k} \quad (8)$$

où γ_k est le vecteur colonne de Γ_x avec l'élément diagonal mis à zéro, et où \mathbf{k} est le vecteur avec une seule composante non nulle égale à un, correspondant à l'élément bruité inconnu β_k . On doit donc minimiser $\|\hat{\gamma}_k - \tilde{\gamma}_k\|^2$. Du fait que $\hat{\gamma}_k$ appartient à l'espace colonne de Γ , s_k peut être déterminé directement par la condition que la composante orthogonale soit minimale ce qui conduit à

$$\beta_k = \frac{\text{Réel } \mathbf{k}^+ \Gamma (\Gamma^+ \Gamma)^{-1} \Gamma^+ \tilde{\gamma}_k}{1 - \mathbf{k}^+ \Gamma (\Gamma^+ \Gamma)^{-1} \Gamma^+ \mathbf{k}} \quad (9)$$

On obtient alors pour \mathbf{b}_k

$$\mathbf{b}_k = (\Gamma^+ \Gamma)^{-1} \Gamma^+ \tilde{\gamma}_k$$

On vérifie que les relations $\Gamma \mathbf{b}_k - \tilde{\gamma}_k = \text{erreur de prédiction} \equiv 0$ s'écrivent sous forme matricielle

$$\begin{array}{|c|} \hline \Gamma_{xij} \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{I}_r & -\mathbf{B}_{N-r}^+ \\ \hline (0) & \mathbf{I}_{N-r} \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline \Gamma & (0) \\ \hline \end{array} \quad (10)$$

$\hat{\Gamma}_y \quad \mathbf{B}_0$

La matrice \mathbf{B}_0 s'inverse facilement. En multipliant à droite par \mathbf{B}_0^{-1} on obtient la factorisation de $\hat{\Gamma}_y$

$$\begin{array}{|c|} \hline \hat{\Gamma}_y \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline \Gamma & (0) \\ \hline \end{array} \cdot \mathbf{B}_0^{-1} = \begin{array}{|c|} \hline \Gamma \\ \hline \end{array} \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{I}_r & -\mathbf{B}_{N-r}^+ \\ \hline \end{array}}_{\mathbf{B}^+} \quad (11)$$

Il en résulte que l'espace ligne de la matrice \mathbf{B}^+ des paramètres est le même que celui de $\hat{\Gamma}_y$ et donne une estimation de l'espace source \mathcal{S} .

II.3. Factorisation symétrique de Γ_y

A partir d'une base estimée quelconque de l'espace \mathcal{S} , donnée par les vecteurs colonnes d'une matrice $N \times r$ \mathbf{B} , montrons que l'on peut déduire explicitement une estimée factorisée de Γ_y sous la forme $\mathbf{M}\mathbf{M}^+$, la matrice $N \times r$ \mathbf{M} ayant même espace colonne que \mathbf{B} et approximant les éléments non diagonaux de Γ_x au sens des moindres carrés.

Pour ceci, on commence par estimer les éléments diagonaux non bruités de Γ_y par une méthode identique à celle du II.2 en écrivant que les vecteurs colonnes de Γ_y , complétés par des paramètres inconnus sur la diagonale, sont une combinaison linéaire des vecteurs colonne de \mathbf{B} , base de \mathcal{S} . Soit $\hat{\Gamma}_y$ la matrice obtenue, à factoriser.

La matrice \mathbf{M} recherchée, et ayant même espace colonne que \mathbf{B} , est de la forme:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} \mathbf{P} \quad (12)$$

où \mathbf{P} est la matrice $r \times r$ de changement de base correspondante. On doit déterminer \mathbf{P} pour minimiser $\text{tr}[(\hat{\Gamma}_y - \mathbf{M}\mathbf{M}^+)^2]$. Si on égale à zéro les composantes du gradient dans l'espace colonne de \mathbf{B} on obtient l'équation

$$\mathbf{B}^+ [\hat{\Gamma}_y - \mathbf{M}\mathbf{M}^+] \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

Soit, en remplaçant \mathbf{M}

$$\mathbf{B}^+ \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{P}^+ \mathbf{B}^+ \mathbf{B} = \mathbf{B}^+ \hat{\Gamma}_y \mathbf{B} \quad (14)$$

d'où

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^+ = (\mathbf{B}^+ \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^+ \hat{\Gamma}_y \mathbf{B} (\mathbf{B}^+ \mathbf{B})^{-1} \quad (15)$$

Une solution pour \mathbf{P} est obtenu par factorisation de Cholesky du second membre de (15).

Comme matrice \mathbf{B} on peut utiliser la matrice déterminée au paragraphe II.2; la matrice \mathbf{M} obtenue permet d'initialiser l'algorithme d'optimisation qui constitue la dernière étape.

III. ÉTAPE D'OPTIMISATION

Le but est d'affiner la détermination de Γ_y sous forme $\mathbf{M}\mathbf{M}^+$ par minimisation d'un critère de moindre carrés entre $\mathbf{M}\mathbf{M}^+$ et Γ_x portant sur les éléments non diagonaux, identiques pour Γ_x et Γ_y . Pour des raisons portant sur les propriétés statistiques des intercorrélations [10], on est conduit à utiliser une pondération en $\sqrt{\gamma_i \gamma_j}$, qui équivaut à utiliser les moindres carrés simples non plus sur Γ_x mais sur la matrice normalisée correspondante, la matrice de cohérence \mathbf{C}_x . Nous présentons l'algorithme de minimisation de base, puis un critère de détermination fine du rang.

III.1. Algorithme de minimisation

On définit la matrice \mathbf{H} par

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{ij} = [\mathbf{C} - \mathbf{M}\mathbf{M}^+]_{ij} & \text{pour } i \neq j \\ = 0 & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (16)$$

La matrice \mathbf{M} , de dimension $N \times r$ doit minimiser $\text{tr}[\mathbf{H}^2]$. L'application de la méthode du gradient conduit à l'algorithme [10]:

$$\mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{M}_n - \mu_n \mathbf{H}_k \mathbf{M}_k \triangleq \mathbf{M}_n - \mu_n \cdot \nabla_n \quad (17)$$



Pour accélérer la convergence, il est souhaitable de choisir pour μ_n la valeur qui minimise $\text{tr}(\mathbf{H}_{n+1}^2)$. Or

$$\mathbf{M}_{n+1} \mathbf{M}_{n+1}^+ \cong \mathbf{M}_n \mathbf{M}_n^+ - \mu_n (\mathbf{M}_n \nabla_n^+ + \nabla_n \mathbf{M}_n^+) \quad (18)$$

en négligeant les termes en $\delta \mathbf{M} \delta \mathbf{M}^+$. On en tire :

$$\text{tr}(\mathbf{H}_{n+1}^2) \cong \text{tr}(\mathbf{H}_n^2) - \mu_n \text{tr}(\mathbf{H}_n \mathbf{D}_n) + \mu_n^2 \text{tr}(\mathbf{D}_n^2) \quad (19)$$

où l'on a posé

$$\mathbf{D}_n \triangleq \mathbf{M}_n \nabla_n^+ + \nabla_n \mathbf{M}_n^+ \quad \mathbf{D}'_n \triangleq \nabla_n^+ \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_n^+ \nabla_n \quad (20)$$

Cette expression est minimale pour

$$\mu_n = \frac{\text{tr}(\mathbf{H}_n \mathbf{D}_n)}{2 \text{tr}(\mathbf{D}_n^2)} = \frac{\text{tr}(\nabla_n^+ \nabla_n)}{\text{tr}(\mathbf{D}_n^2)} = \frac{\sum |\nabla_{ni}|^2}{\sum |\mathbf{D}'_{ni}|^2} \quad (21)$$

le seul produit matriciel nécessaire pour calculer μ_n est donc le produit $\nabla_n^+ \mathbf{M}_n$ d'où l'on déduit la matrice \mathbf{D}'_n de dimension $r \times r$.

III.2. Détermination fine du rang

Si l'on veut déterminer le rang il faut itérer sur le nombre de colonnes r de la matrice \mathbf{M} , en opérant par valeurs croissantes à partir d'une valeur r_0 certainement inférieure ou égale au rang exact. Si l'on utilise l'initialisation du paragraphe II, le rang est en général sousestimé et vérifie donc cette condition.

La procédure est récursive, dans la mesure où l'on utilise pour l'initialisation de l'algorithme du gradient au rang $r+1$ la matrice $\mathbf{M}(r)$ à laquelle on rajoute une colonne convenablement choisie $\mathbf{m}(r+1)$. Idéalement $\mathbf{m}(r+1) \mathbf{m}(r+1)^+$ devrait approximer au mieux le reste précédent $\mathbf{H}(r)$. En pratique on peut prendre la colonne de $\mathbf{H}(r)$ contenant le plus grand élément et la normer de telle sorte que $\mathbf{m}(r+1)^+ \cdot \mathbf{H}(r) \cdot \mathbf{m}(r+1) = \|\mathbf{m}(r+1)\|^4$.

La détermination du rang se fait en examinant la suite des résidus $\text{tr}(\mathbf{H}(r)^2)$ et en les comparant à un seuil. Ce seuil est déterminé dans l'hypothèse où $\mathbf{M}(r) \mathbf{m}(r)^+$ serait exactement égal à \mathbf{C}_y et où $\mathbf{H}(r)$ correspondrait aux seules fluctuations statistiques. On suppose que \mathbf{C}_x est estimée par moyennage sur L_e réalisations indépendantes de la covariance \mathbf{xx}^+ .

Pour une réalisation, dans l'hypothèse d'un bruit ε gaussien décorrélé par rapport à y on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{R} \triangleq \mathbf{xx}^+ - \mathbf{yy}^+ = (\mathbf{y}\varepsilon^+ + \varepsilon\mathbf{y}^+) + \varepsilon\varepsilon^+ \\ \mathbf{E}[\mathbf{R}^2] = \text{tr}(\mathbf{C}_\varepsilon) \mathbf{C}_\varepsilon + \text{tr}(\mathbf{C}_\varepsilon) \mathbf{C}_y + \text{tr}(\mathbf{C}_y) \mathbf{C}_\varepsilon + \mathbf{C}_\varepsilon^2 \\ \mathbf{E}[\mathbf{R}_{ii}^2] = 2\sigma_{\varepsilon i}^4 + 2\sigma_{\varepsilon i}^2 \sigma_{y i}^2 \end{cases} \quad (22)$$

Pour l'erreur résiduelle \mathbf{H} , il faut supprimer les termes diagonaux; la variance se trouve divisée par L_e du fait du moyennage

$$S(r) \triangleq \mathbf{E}[\text{tr}(\mathbf{H}(r)^2)] \cong \frac{1}{L_e} \{ \mathbf{E}[\text{tr}(\mathbf{R}^2) - \sum_i \mathbf{R}_{ii}^2] \} \quad (23)$$

Compte tenu du fait que les signaux sont normalisés (utilisation de la matrice de cohérence) :

$$\sigma_{xi}^2 = 1 = \sigma_{yi}^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \quad (24)$$

Posons :

$$S_1(r) = \frac{1}{N} \sum \sigma_{yi}^2, \quad S_2(r) = \frac{1}{N} \sum \sigma_{\varepsilon i}^4 \quad (25)$$

qui représentent la somme des éléments diagonaux et des carrés des éléments diagonaux de $\mathbf{C}_y = \mathbf{M} \mathbf{M}^+$. Après toutes réductions on obtient :

$$S(r) = \frac{N^2}{L_e} \{ 1 - S_1(r)^2 - \frac{1}{N} (1 - S_2(r)) \} \quad (26)$$

A faible rapport signal sur bruit, d'après (24), $S_1(r)$ et $S_2(r)$ sont petits devant 1 et $S(r) \cong N(N-1)/L_e$. Mais à fort signal $S_1(r)$ et $S_2(r)$ sont voisins de 1; on voit que le seuil peut alors devenir très petit.

Pour déterminer le rang on forme le rapport $Q(r) = \text{tr}(\mathbf{H}(r)^2)/S(r)$, qui doit diminuer avec r et se stabiliser à une valeur voisine de 1 dès que l'on a atteint la bonne valeur du rang.

IV. CONCLUSION

Les méthodes de localisation à partir d'une base de l'espace source ne nécessitent ni que cette base soit formée de vecteurs propres, ni même qu'elle soit orthonormée. A partir de ces remarques nous avons introduit un algorithme extrêmement simple (paragraphe III.1), de type gradient, permettant d'obtenir une telle base en déterminant une forme factorisée de \mathbf{C}_y .

Cet algorithme trouve tout son intérêt dans un contexte adaptatif où les itérations du gradient servent à poursuivre les variations de l'espace source.

L'algorithme préserve la possibilité de déterminer facilement le nombre de sources.

Enfin, il s'accommode d'hypothèses sur le bruit peu contraignantes : bruits décorrélés de variances inconnues, non nécessairement identiques. Il se généralise sans complication de calcul à une matrice de bruit Γ_ε en bande, également inconnue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BIENVENU, "Eigensystem properties of the sampled space correlation matrix", *Proc. ICASSP 83*, pp.332-335.
- [2] G. BIENVENU et L. KOPP, "Principe de la goniométrie passive adaptative", GRETSI, Nice, 1979, pp.106/1-106/10.
- [3] D.W. TUFTS et R. KUMARESAN, "Estimating the angle of arrival of multiple plane waves", *IEEE Trans. on Aero. Space and Electronic Systems*, 19, 1, 1984, pp.134-139.
- [4] S.Y. KUNG, K.S. ARUN et D.V. BHASKA RAO, "State space and singular value decomposition based approximation methods for the harmonic retrieval problem", *Journ. Opt. Soc. of Am.*, 73, 12, Déc. 83, pp.1799-1811.
- [5] A. OUAMRI, "Etude des performances des méthodes d'identification à haute résolution", Thèse de doctorat d'état, Paris-Sud, 1986.
- [6] G. BIENVENU et L. KOPP, "Adaptivity to background noise spectral coherence for high resolution passive methods", *Proc. ICASSP 80*, pp.308-310.
- [7] I. TASS, "Traitement d'antenne passif : détection et identification de sources", Thèse de doctorat, Grenoble, 1987.
- [8] G.A.F. SEBER, "Multivariate observations", John Wiley & Sons, 1984.
- [9] J.J. FUCHS, "Estimation du nombre de sinusoides dans un bruit coloré", GRETSI, Nice, 1987, pp.197-200.
- [10] B. LUMEAU et H. CLERGEOT, "Séparation de sources dans le cas de signaux bruités à bruits décorrélés", GRETSI, Nice, 1983, pp.271-275.
- [11] B. LUMEAU, "Traitement spatial et analyse spectrale - Applications neurophysiologiques", Orsay, 1987.