

LE PROPAGATEUR ET SON ESTIMATION ADAPTATIVE

Sylvie MARCOS* et Jacques MUNIER**

*Laboratoire des Signaux et Systèmes ESE, Plateau de Moulon,
91192, Gif-sur-Yvette-Cedex, France

**Cephag - ENSIEG, BP 46, 38402 St Martin d'Hères, France

RÉSUMÉ

Le propagateur est un nouveau concept qui fut introduit en traitement d'antenne sous le nom "d'opérateur de propagation" en 1987 et a été depuis lors perfectionné. Il permet non seulement de réaliser à moindre frais la localisation des sources mais aussi de prédire la forme d'une antenne ou d'identifier les gains complexes des capteurs. Dans cette communication nous présentons une version adaptative récursive du propagateur qui permet de diminuer encore considérablement la complexité des calculs et de traiter les situations évolutives rencontrées dans le cas de sources mobiles, d'antennes de forme lentement variable ou de champ de bruit non-stationnaire. Un exemple obtenu par simulation est donné concernant la poursuite de sources mobiles.

SUMMARY

The propagator is a new concept for array processing which was first introduced under the name of "propagation operator" and since has been improved. It allows to achieve source localization and also to predict the antenna shape or to identify the complex gains of the sensors. In the present paper, a recursive-adaptive version of the propagator is given, this enables to reduce the complexity of the computation and to deal with time-varying situations like moving sources or antennas with slow varying shape. An example obtained with simulations, concerning the tracking of moving sources is shown.

1. LE PRINCIPE DU PROPAGATEUR

Le propagateur [1-3] est un opérateur linéaire qui ne dépend pas des amplitudes complexes des sources, mais seulement des paramètres de propagation. Soit

$$v = U\alpha + b, \quad (1)$$

le vecteur des signaux reçus sur un ensemble de N capteurs à une fréquence donnée où α est le vecteur des amplitudes complexes de n sources, $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ une matrice de dimension $(N \times n)$ et b un vecteur de bruit. Les vecteurs sources u_i ne contiennent que l'information relative aux paramètres de propagation, à savoir la forme des fronts d'onde, la géométrie de l'antenne et les gains complexes des capteurs. La matrice U est supposée non-aléatoire, mais elle est lentement variable dans le temps (sources mobiles, antenne déformable). Cette hypothèse exclut l'influence de la turbulence locale qui déforme aléatoirement les fronts d'onde.

La définition du propagateur repose sur la partition des vecteurs sources et de la matrice U suivant

$$u_i = \begin{bmatrix} x_i \\ - \\ y_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \\ \} N-n \end{matrix}, \quad U = \begin{bmatrix} X \\ - \\ Y \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \\ \} N-n \end{matrix}. \quad (2)$$

Cette partition correspond à un partage du réseau de capteurs en deux sous-réseaux. Les vecteurs sources du sous-réseau correspondant à X de dimension (n, n) , sont supposés linéairement

indépendants et, par suite, la matrice X est non-singulière. Cette condition est en fait fort peu contraignante, d'autant que les capteurs peuvent être rangés en un ordre quelconque; elle est automatiquement vérifiée si les capteurs de ce sous-réseau sont alignés et si leurs espacements n'excèdent pas la demi-longueur d'onde. Le propagateur est alors l'opérateur linéaire P de dimension $(n, N-n)$ défini de façon équivalente par

$$P^\dagger = YX^{-1} \quad \text{ou} \quad y_i = P^\dagger x_i, \quad \forall i; \quad (3)$$

il en résulte qu'à partir des signaux relatifs à un front d'onde particulier reçus sur n capteurs, le propagateur permet de prédire les signaux reçus sur les autres capteurs. C'est ainsi qu'en présence d'un petit nombre n de sources, si on admet qu'un modèle "onde plane, antenne rectiligne" s'applique valablement à n capteurs consécutifs, on peut prédire la suite et en déduire la forme de l'antenne lorsque celle-ci est distordue [4].

Par ailleurs, le propagateur permet de construire une matrice Q de dimension $(N, N-n)$

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ - \\ -I \end{bmatrix}, \quad (4)$$

I étant la matrice identité de dimension $(N-n)$, telle que l'on ait d'après (2)(3)

$$Q^\dagger U = 0 \quad \text{ou} \quad Q^\dagger u_i = 0, \quad \forall i. \quad (5)$$



D'autre part, en absence de bruit, la définition (3) implique que l'on peut extraire le propagateur directement de la matrice interspectrale des signaux reçus $\Gamma \triangleq E[\nu\nu^\dagger]$ suivant

$$H = GP, \quad (6)$$

où $\Gamma = [G : H]$, G et H sont des matrices de dimensions respectives (N, N) , (N, n) et $(N, N-n)$

En présence de bruit, la relation (6) n'est plus vérifiée mais on peut chercher la meilleure combinaison possible \hat{P} des colonnes de G qui donne H au sens d'un certain critère. Dans [4], on a choisi de minimiser $\mathcal{C}(\hat{P}) = \|H - G\hat{P}\|^2$ (somme des normes des vecteurs colonnes) par rapport à \hat{P} ; la solution est alors donnée par

$$\hat{P}_{\text{opt}} = (G^\dagger G)^{-1} G^\dagger H. \quad (7)$$

La méthode d'azimétrie reposant sur l'utilisation de (5) permet des performances comparables à celles du goniomètre, particulièrement dans un contexte de bruit fort [3]. Elle est aussi plus générale en ce sens que le propagateur apporte moins de contraintes par rapport au modèle de propagation et permet en particulier de déterminer la géométrie des fronts d'onde [1][2], les gains des capteurs ou leur position relative [4]. De plus, l'extraction du propagateur à partir de la matrice interspectrale demande une charge de calcul plus faible que la recherche des éléments propres de cette même matrice. Dans cet article, nous établissons une version adaptative-réursive du propagateur directement à partir du vecteur des signaux reçus, qui a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre par comparaison à la méthode non-réursive qui consiste à appliquer (7) en remplaçant simplement G et H par leurs estimées.

2. ESTIMATION ADAPTATIVE-RÉCURSIVE DU PROPAGATEUR

A. Détermination de l'algorithme

Soit ν_k le vecteur des signaux en sortie d'antenne à l'épreuve k pour une fréquence donnée que l'on partitionne ainsi

$$\nu_k = \begin{bmatrix} s_k \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \\ \} N-n \end{matrix}, \quad (8)$$

et G_k une estimation de $G \triangleq E[\nu_k s_k^\dagger]$. Une modélisation de ν_k consiste à ajuster au mieux un jeu de paramètres \hat{P} tel que

$$\nu_k = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ \hat{P}^\dagger \end{bmatrix} X \alpha_k + b_k; \quad (9)$$

la fonction de coût $\mathcal{C}(\hat{P})$ mesure la validité du modèle. Or, dans [4], on a établi une version stochastique de l'algorithme du gradient qui minimise $\mathcal{C}(\hat{P})$, soit

$$\begin{cases} \hat{P}_{k+1} = \hat{P}_k + \mu G_k^\dagger \nu_k e_k^\dagger \\ G_{k+1} = \beta G_k + (1-\beta) \nu_{k+1} s_{k+1}^\dagger \\ e_k = t_k - \hat{P}_k^\dagger s_k \end{cases} \quad (10)$$

où \hat{P}_k est une estimation de P à l'épreuve k , β un facteur d'oubli proche de 1 et μ un paramètre positif dont on montrera le rôle fondamental. En effet, le recours aux algorithmes adaptatifs à gain μ constant est principalement motivé par leur propriété de poursuite d'un environnement lentement variable. C'est sur ce point que nous allons consacrer l'étude qui suit.

B. Capacité de poursuite de l'algorithme adaptatif

Dans la suite $P(k)$ désigne le propagateur optimal à l'épreuve k ; il varie effectivement au cours du temps avec certains paramètres du problème: déformations variables des fronts d'onde ou de l'antenne, sources mobiles ... Dans le cas où $n = N-1$, $P(k)$, \hat{P}_k et s_k sont des vecteurs de dimension $N-1$, G une matrice de dimension $(N, N-1)$, t_k et e_k des scalaires. On note dans la suite

$$\begin{cases} R_k = P(k) - \hat{P}_k \\ D_k = P(k+1) - P(k) \end{cases} \quad (11)$$

où R_k détermine l'écart par rapport à l'optimalité et D_k l'évolution du propagateur optimal entre deux épreuves. En utilisant les notations (11) et en introduisant comme dans [5,6] (I matrice identité de dimension $(N-1, N-1)$),

$$\begin{cases} U_{k,k} = I \\ U_{j,k} \triangleq [I - \mu G_k^\dagger \nu_k s_k^\dagger] [I - \mu G_{k-1}^\dagger \nu_{k-1} s_{k-1}^\dagger] \\ \dots [I - \mu G_{j+1}^\dagger \nu_{j+1} s_{j+1}^\dagger], \quad j < k \end{cases} \quad (12)$$

alors l'algorithme (10) peut se réécrire

$$R_{k+1} = U_{0,k} R_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \mu U_{j,k} [D_j / \mu - G_j^\dagger \nu_j e_{j,\text{opt}}^*] \quad (13)$$

où $e_{j,\text{opt}} = t_j - P(j)^\dagger s_j$ est l'erreur minimale.

D'après [5,6], on a le résultat important suivant:

$$\begin{cases} E[\|U_{j,k}\|^\rho] \leq C_\rho (1 - \delta_\rho \mu)^{k-j} \\ \mu < \mu_\rho, \quad k \geq j \end{cases} \quad (14)$$

qui s'avère encore valable dans ce cas au moins pour des variations lentes; en Annexe on trouve $C_\rho=1$ et $\delta_\rho = \rho \lambda_{\min}$ où λ_{\min} est la valeur propre minimale de $G^\dagger G$.

D'après le résultat (14), on trouve que le premier terme de droite de (13) s'annule au bout d'un certain nombre d'itérations k_0 pourvu que $\mu < \mu_{\max} = \frac{2}{\delta_2} = \frac{1}{\lambda_{\min}}$. Ainsi en prenant l'espérance mathématique de (13) et du fait du caractère aléatoire, indépendant centré de $e_{j,\text{opt}}$, on obtient

$$E[R_{k+1}] = \sum_{j=1}^{k-1} E[U_{j,k}] E[D_j], \quad k > k_0. \quad (15)$$

Dans le cas de *variations aléatoires et centrées* du propagateur optimal (ce serait le cas de petites fluctuations de la position des capteurs par rapport à une position moyenne connue) \hat{P}_k tend en moyenne vers $P(k)$ pour tout k ($E[R(k)]=0$). Par

contre, dans le cas de variations D_k déterministes et bornées par D , une majoration de (15) permet d'obtenir

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[R_k] \leq 2C \frac{1}{2} \frac{D}{\delta_2 \mu} = \frac{D}{\mu \lambda_{\min}} \quad (16)$$

indiquant que la limite supérieure de $\mathbb{E}[R_k]$ est majorée par un terme d'autant plus petit que μ est grand (sans oublier que μ est limité à μ_{\max}). Donc dans ce cas (déformation d'une antenne ou sources mobiles) l'algorithme (10) approche le propagateur optimal avec un biais inversement proportionnel au gain μ .

L'erreur quadratique moyenne de \hat{P}_k par rapport à l'optimalité $P(k)$ ou encore la variance de l'estimation \hat{P}_k de $P(k)$ est calculée ici dans le cas où D_j est déterministe et borné

$$\mathbb{E}[\|R_{k+1}\|^2] = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{p=1}^{k-1} D_p^\dagger \mathbb{E}[U_{p,k}^\dagger U_{j,k}] D_j + \sum_{j=1}^{k-1} \mu^2 \mathcal{E}_{\min} \mathbb{E}[\|U_{j,k} G^\dagger v_j\|^2] \quad (17)$$

où $\mathcal{E}_{\min} = \mathbb{E}[|e_{k,\text{opt}}^*|^2]$. D'après (17), il apparaît que la variance $\mathbb{E}[\|R_k\|^2] = \mathbb{E}[\|R_k^r\|^2] + \mathbb{E}[\|R_k^f\|^2]$ où les deux membres de

droite sont respectivement l'erreur due à la poursuite de la non-stationnarité (elle s'annule si $D_j = 0$) et celle due aux fluctuations de l'algorithme stochastique par rapport à l'optimalité (elle s'annule en absence de bruit $b_k=0$, $\mathcal{E}_{\min}=0$). En appliquant successivement les inégalités de Schwartz et les inégalités des normes matricielles et en ajoutant l'hypothèse $\mathbb{E}[\|G^\dagger v_j\|^4] \leq \rho$ (bornitude des signaux reçus) alors (14) permet d'obtenir

$$\mathbb{E}[\|R_{k+1}^f\|^2] \leq \mu^2 \mathcal{E}_{\min} \rho^{1/2} C_4^{1/2} \sum_{j=1}^{k-1} [(1-\delta_4 \mu)^{1/2}]^{k-j}, \quad (18)$$

$$\mathbb{E}[\|R_{k+1}^r\|^2] \leq C_4^{1/2} D^2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{p=1}^{k-1} [(1-\delta_4 \mu)^{1/4}]^{2k-j-p}. \quad (19)$$

Finalement, une majoration de la limite supérieure de l'erreur totale, somme des termes de fluctuations (18) et de retard (19), peut être obtenue pour $\delta_4 \mu \ll 1$. Le résultat

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|R_k\|^2] \leq \mathcal{E}_{\min} \frac{\mu \rho^{1/2}}{2 \lambda_{\min}} + \frac{D^2}{\mu^2 \lambda_{\min}^2} \quad (20)$$

fait apparaître le compromis entre réduire le terme de fluctuation dû au bruit (diminuer μ) et améliorer la poursuite d'un propagateur dont l'évolution est caractérisée par D^2 (augmenter μ). Il existe un gain optimal réalisant ce compromis, il est donné en dérivant le membre de droite de (20) par rapport à μ :

$$\mu_{\text{opt}} = \left[\frac{4D^2}{\lambda_{\min} \mathcal{E}_{\min} \rho^{1/2}} \right]^{1/3}. \quad (21)$$

3. RÉSULTATS DE SIMULATIONS

A titre d'exemple, les performances de l'algorithme adaptatif (10) sont illustrées par des simulations concernant la poursuite de sources mobiles. Les figures proposées sont relatives à un réseau rectiligne de 16 capteurs identiques espacés d'une demi-longueur d'onde et connectés en 7 groupements de 4 capteurs décalés de 2, recevant 3 fronts d'onde plans avec un

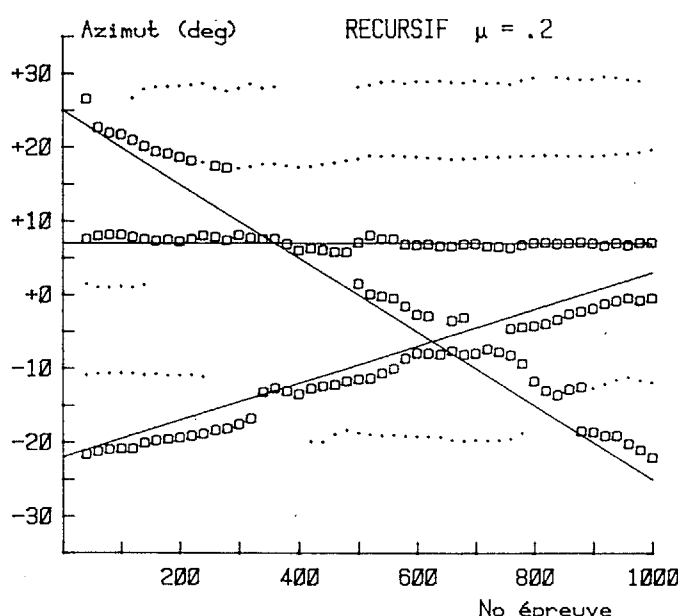
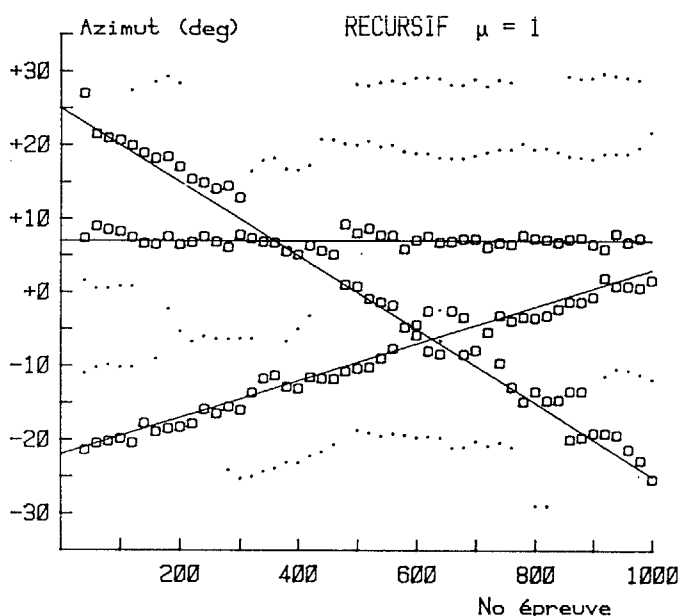
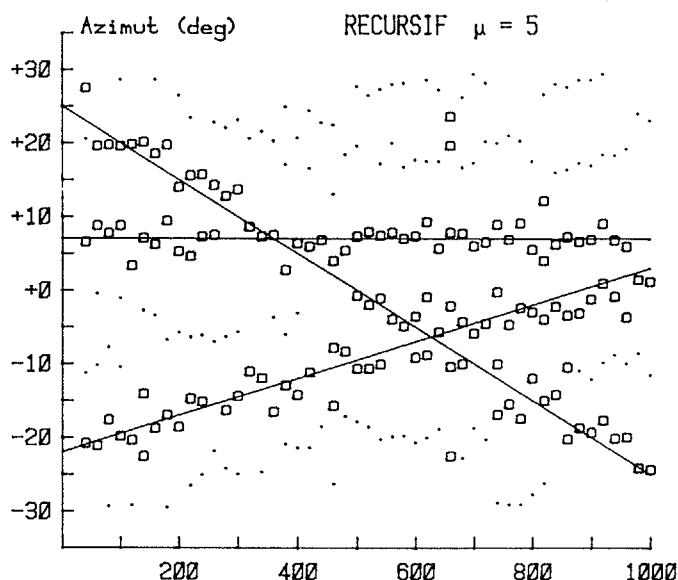
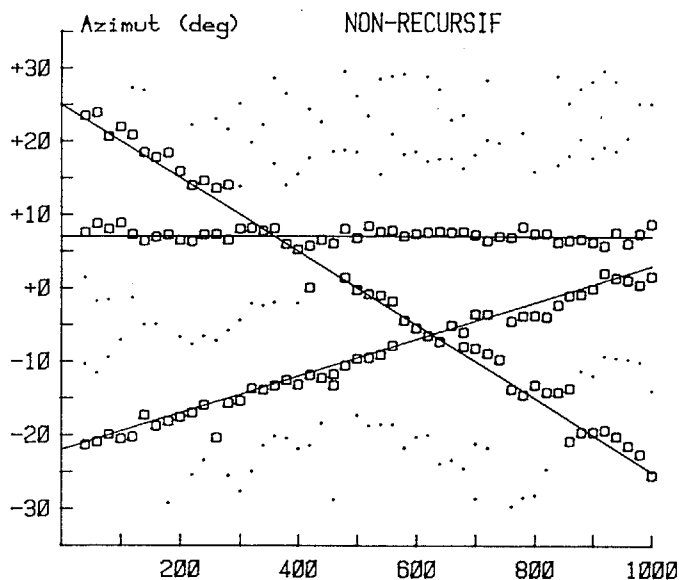
rapport signal à bruit égal à -5 dB par source. Les dérivées des sources en azimuth sont respectivement de 0 (source fixe), 0.025 et 0.050 degré par épreuve; les trajets réels sont représentés par des traits pleins sur les figures. A chaque épreuve on procède à l'adaptation récursive du propagateur suivant l'algorithme (10) où v_k est partitionné en supposant le sous-espace source de dimension 6. L'azimétrie est réalisée toutes les 20 épreuves en cherchant les minima de $\|Q^\dagger u(\theta)\|$, où $u(\theta)$ est un vecteur d'analyse de modèle de propagation connu et ne dépendant que de l'azimut θ . Selon l'épreuve considérée, il apparaît de 4 à 6 minima. L'intensimétrie est ensuite obtenue à partir des éléments diagonaux de la matrice de corrélation des sources estimée par $\hat{\mathcal{C}} = (\hat{D}^\dagger \hat{D})^{-1} \hat{D}^\dagger \hat{A} \hat{D} (\hat{D}^\dagger \hat{D})^{-1}$ où \hat{A} est la matrice interspectrale estimée et \hat{D} la matrice des vecteurs sources estimés en utilisant les azimuths correspondants aux minima de $\|Q^\dagger u(\theta)\|$. Dans les figures qui suivent, on a appliqué un seuil de détection égal à la moyenne des intensités des solutions de l'intensimétrie obtenue aux épreuves précédentes; les ronds et les points indiquent respectivement les détections supérieures et inférieures au seuil.

Dans ces conditions, la figure 1 compare les résultats réalisés avec le propagateur récursif (10), à ceux obtenus par le propagateur non-récursif qui consiste à appliquer directement (7) ($\beta=0.95$, $\mu=1$). D'après l'analyse de la section 2, le coefficient de récursivité μ dépend fortement de la puissance des signaux reçus; pour éviter de trop petites valeurs de μ , le vecteur v_k est préalablement normé. Dans notre cas de simulation, la théorie donne $\mu_{\max} \cong 10$ indiquant la condition de convergence de l'algorithme. L'estimation adaptative du propagateur apparaît comme très satisfaisante dans le cas de la poursuite de sources mobiles.

La figure 2 illustre l'importance du choix de μ comme on l'a vu dans la section 2. Un coefficient de récursivité μ trop grand (figure 2A) rend l'erreur de fluctuation due au bruit telle que même la source immobile n'est plus retrouvée. Au contraire, μ trop petit donne une fluctuation minimale (voir sur la source fixe) mais une mauvaise poursuite des sources mobiles qui s'exprime par une dérive des points détectés prêtant ainsi à confusion sur la direction prise par les sources. Finalement, le résultat de la figure 1 est le meilleur; l'erreur de fluctuation est plus forte qu'en 2B (voir sur la source fixe) mais encore acceptable alors que l'erreur due à la poursuite est plus faible. Ceci illustre donc bien la formule (20) qui indique le compromis que doit réaliser μ entre les deux types d'erreur. D'ailleurs, dans notre cas, (21) donne $\mu_{\text{opt}} \cong 2$ indiquant le bon accord entre la théorie de la section 2 et les résultats de simulation, compte-tenu que (21) est en fait une borne supérieure.

4. CONCLUSION

L'estimation adaptative récursive du propagateur est un atout supplémentaire de l'outil qu'il représente en traitement d'antenne. Il permet non seulement de suivre un environnement évolutif (sources mobiles, antennes ou fronts d'onde se déformant lentement au cours du temps) mais encore de réduire le temps calcul. En effet, pour conclure on donne l'évaluation suivante. En prenant comme unité le temps nécessaire à la remise à jour de la matrice interspectrale à chaque épreuve, les temps de calcul sont de 0.6 pour le propagateur récursif, 6 pour le propagateur non-récursif, 17 pour le repérage des minima, entre 6 et 10 pour le calcul des intensités des sources; à titre comparatif 32 est le temps nécessaire à la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice interspectrale.



o solutions d'intensité supérieure au seuil;
 . solutions d'intensité inférieure au seuil.

o solutions d'intensité supérieure au seuil;
 . solutions d'intensité inférieure au seuil.

Figure 1 : A. Propagateur adaptatif-non-récurusif
 B. Propagateur adaptatif-récurusif

Figure 2 : Propagateur adaptatif-récurusif
 A. $\mu = 5$. B. $\mu = 0.2$

RÉFÉRENCES

[1] J.Munier, "L'identification de fronts d'ondes corrélés et distordus", *Traitement du Signal*, Vol.4, N°4, 1987.
 [2] J.Munier, G.Jourdain, G.Y.Delisle, "A new algorithm for the identification of distorted wavefronts", *Colloque NATO-ASI, Underwater Acoustics*, Kingston, July 1988.
 [3] J.Munier, G.Y.Delisle, "Spatial analysis using new properties of the CSM matrix", submitted to *IEEE Trans. on ASSP*, 1989
 [4] S.Marcos, J.Munier, "Source localization using a distorted antenna", *Proceedings of ICASSP-89*, Glasgow, May 23-26 1989.
 [5] S.Marcos, O.Macchi, "Tracking capability of the LMS algorithm: application to an echo canceller", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol.5, N°11, 1987.
 [6] O.Macchi, "Advances in adaptive filtering", *Digital Communications*, E.Biglieri and G.Prati Ed., North Holland, 1986

ANNEXE : Majoration de $E[\|U_{j,k}\|^\ell]$ dans le cas de variations lentes

Pour μ petit (variations lentes de l'algorithme) on peut écrire en négligeant les termes d'ordre supérieur en μ

$$U_{j,k} \cong I - \mu \frac{k-j}{k-j} \sum_{i=j+1}^k G^\dagger v_i s_i^\dagger \tag{A.1}$$

Pour $k-j$ suffisamment grand et des signaux supposés ergodiques on écrit

$$U_{j,k} \cong I - \mu(k-j)E[G^\dagger v_j s_j^\dagger] = I - \mu(k-j)G^\dagger G, \tag{A.2}$$

d'où la norme à la puissance ℓ arbitraire

$$\|U_{j,k}\|^\ell \cong \|I - \mu(k-j)G^\dagger G\|^\ell \leq (1 - \mu(k-j)\lambda_{\min})^\ell \cong (1 - \mu\ell \lambda_{\min})^{k-j} \tag{A.3}$$

où λ_{\min} est la valeur propre minimale de $G^\dagger G$.