



CONCEPTION DE FILTRES RIF 2-D OPTIMAUX POUR LA CONVERSION DE STRUCTURES D'ECHANTILLONNAGE

Pierre Siohan

Centre Commun d'Etudes de Télédiffusion et de Télécommunications
35512 Cesson-Sévigné - France

RESUME

Le problème de la conversion de structures d'échantillonnage est posé pour des signaux bidimensionnels à structure orthogonale ou quinconce. Les deux types de structures d'échantillonnage considérés sont supposés reliés par deux paramètres à valeurs entières L et K . Pour les opérations de décimation, préfiltrage suivi d'un sous-échantillonnage, et d'interpolation, postfiltrage après un sur-échantillonnage, un filtre idéal de forme losange est proposé. Le problème de sa synthèse optimale, au sens du minimax, est posé en considérant, d'une part, des coefficients de filtre à précision infinie; et d'autre part, des coefficients codés sur un nombre limité de bits. Des résultats optimaux correspondant aux deux types de synthèse, et à des valeurs de paramètres de conversion différentes, sont présentés.

SUMMARY

The problem of conversion between different sampling structures is stated for two-dimensional signals having an orthogonal or a quincunx structure. The two types of sampling structures considered are assumed to be related with two parameters L and K which are integers. For the decimation, prefiltering followed by downsampling, and interpolation, postfiltering after downsampling, an ideal diamond shaped filter is proposed. The problem of its optimal design, in the minimax sense, is stated considering, from the one hand, infinite precision coefficients, and on the other hand, the finite wordlength case. Optimal results are presented corresponding to both types of design and also to conversion parameters with different values.

1-INTRODUCTION

La conversion de structures d'échantillonnage occupe une place importante en traitement numérique des signaux multidimensionnels. En effet dans un grand nombre de domaines en liaison avec le traitement d'images, comme la "multirésolution" [5] ou la télévision à haute-définition [3], la nécessité apparaît de modifier des structures d'échantillonnage. Pour des traitements de ce type les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) présentent deux avantages importants, d'une part la possibilité d'obtenir une parfaite linéarité ou nullité de la caractéristique de

phase, et d'autre part la stabilité. Dans cet article le problème de leur synthèse est posé dans le cas bidimensionnel pour une conversion, caractérisée par deux paramètres à valeurs entières, permettant le passage, dans les deux sens, d'une structure d'échantillonnage orthogonale à une structure en quinconce dite '(L,K)'. La détermination des filtres RIF 2-D est basée sur une minimisation de la norme infinie de l'erreur, et tient compte des contraintes liées à la conversion à effectuer, ainsi que du type de coefficients recherchés, qui peuvent être à valeurs continues ou discrètes.



II- STRUCTURE EN QUINCONCE (L,K) ET FILTRE IDEAL

Les structures d'échantillonnage orthogonale et quinconce sont celles utilisées le plus fréquemment en traitement d'images de télévision. On peut les caractériser par 2 matrices, inverses l'une de l'autre, qui sont: la matrices d'échantillonnage \underline{V} et la matrice de périodicité du spectre \underline{U} . Dans le cas d'une structure d'échantillonnage orthogonale elles sont données par [4]:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

où T_1 et T_2 désignent les périodes d'échantillonnage sur chaque axe.

Dans le cas de la structure en quinconce (L,K) proposée ces matrices sont définies par [1]:

$$\underline{V}_{L,K} = \begin{bmatrix} LT_1 & LT_1 \\ KT_2 & -KT_2 \end{bmatrix} \quad \underline{U}_{L,K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2LT_1} & \frac{1}{2LT_1} \\ \frac{1}{2KT_2} & \frac{-1}{2KT_2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

La représentation spectrale de cette structure de sous-échantillonnage est donnée à la Figure 1.

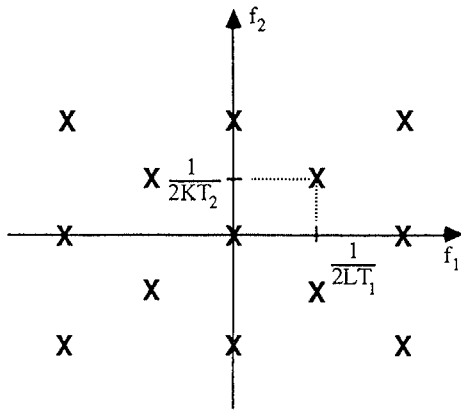


Figure 1: Positions centrales du spectre de la structure en quinconce (L,K).

Le passage de la structure orthogonale à la structure en quinconce (L,K), ainsi que l'opération inverse, pose le problème de l'utilisation optimale du domaine fréquentiel. L'optimalité revient dans le cas présent à assurer un recouvrement maximum tout en respectant le théorème de Shannon bidimensionnel. Ces transformations encore appelées décimation et interpolation peuvent s'effectuer à l'aide de filtres linéaires pour lesquels, à la différence du cas monodimensionnel, il n'existe pas un contour idéal unique. L'intérêt du filtre idéal de forme losange représenté à la Figure 2 est de permettre une définition maximale dans les directions horizontale et verticale.

Dans le quart plan des fréquences positives telles que $0 \leq f_1 \leq 1/2T_1$ et $0 \leq f_2 \leq 1/2T_2$, la caractéristique idéale est définie par:

$$I(f_1, f_2) = \begin{cases} G \text{ si } f_2 + \left(\frac{LT_1}{KT_2}\right)f_1 \leq \frac{1}{2KT_2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (3)$$

La valeur de G "gain" du filtre, dépend du traitement considéré, elle vaut 1 pour une décimation et 2LK pour une interpolation [1].

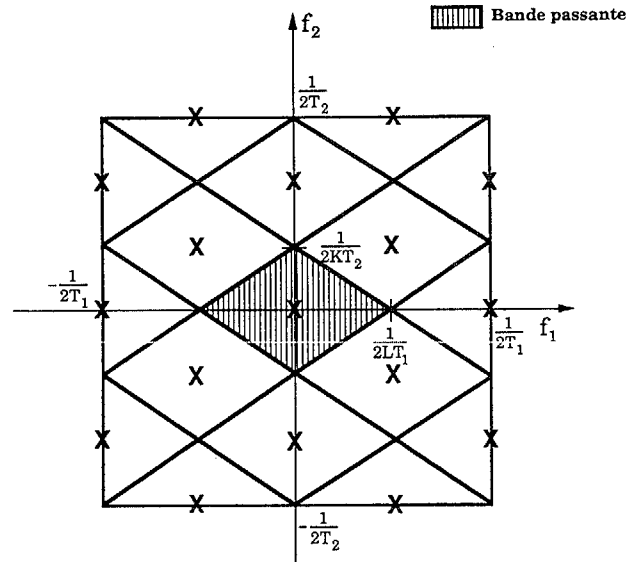


Figure 2: Bande passante du filtre de conversion idéal de forme losange.

III- CONVERSION PAR FILTRES RIF 2-D

La conversion de structures d'échantillonnage suppose, comme dans le cas monodimensionnel, un préfiltrage avant le sous-échantillonnage pour la décimation, et un postfiltrage suivant le sur-échantillonnage lors de l'interpolation. Pour des filtres RIF 2-D la réponse en fréquence exprimée par rapport aux fréquences normalisées f_1 et f_2 telles que: $-1/2 < f_1 \leq 1/2$ et $-1/2 < f_2 \leq 1/2$, peut se mettre sous la forme:

$$H(f_1, f_2) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M h(n, m) \exp[-j2\pi(nf_1 + mf_2)] \quad (4)$$

où les coefficients $h(n, m)$ de la réponse impulsionnelle vérifient certaines conditions de symétrie. Du fait de sa taille, limitée à $(2N+1) \times (2M+1)$, ce filtre ne peut qu'approcher la caractéristique idéale. Dans cette caractéristique les points du domaine fréquentiel associés à la composante continue du signal sont à considérer en priorité, car ils portent l'information associée aux zones homogènes de l'image, zones auxquelles on sait que l'oeil est particulièrement sensible. Par conséquent ces fréquences, notées par une croix à la figure 2, vont être appelées fréquences critiques, et, on imposera que la caractéristique idéale soit parfaitement respectée en ces points. De ce fait si on pose:

$$f_{11}^c = \frac{2\ell_1 + 1}{2L} ; f_{12}^c = \frac{2k_1 + 1}{2K} \quad (5.a)$$

$$f_{21}^c = \frac{\ell_2}{L} ; f_{22}^c = \frac{k_2}{K} \quad (5.b)$$

où ℓ_1, k_1, ℓ_2, k_2 sont des entiers relatifs, il va en résulter 2LK contraintes indépendantes, qui sont:

$$H(f_{11}^c, f_{12}^c) = H(f_{21}^c, f_{22}^c) = 0 \quad (6.a)$$

si

$$E\left(-\frac{L+1}{2}\right) + 1 \leq \ell_1 \leq E\left(\frac{L-1}{2}\right)$$

$$E\left(-\frac{K+1}{2}\right) + 1 \leq k_1 \leq E\left(\frac{K-1}{2}\right)$$

$$E\left(-\frac{L}{2}\right) + 1 \leq \ell_2 \leq E\left(\frac{L}{2}\right), \quad E\left(-\frac{K}{2}\right) + 1 \leq k_2 \leq E\left(\frac{K}{2}\right)$$

E désignant la fonction partie entière et $\ell_2 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$,

$$\text{et } H(0,0) = G \quad (6.b)$$

IV- FORMULATION DES PROBLEMES DE SYNTHÈSE

Suivant les valeurs des paramètres L et K le filtre losange idéal sera caractérisé par une symétrie quart ($L \neq K$) ou huitième ($L = K$) de plan. Dans l'un ou l'autre cas on va imposer au filtre RIF 2-D devant approcher cette caractéristique de posséder le même type de symétrie. Dans ces conditions sa réponse en fréquence, qui est une grandeur purement réelle, peut s'écrire sous une forme simplifiée:

$$H(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^R b(i)g_i(f_1, f_2) \quad (7)$$

Le nombre de termes R , les relations entre les coefficients $b(i)$ et $h(n,m)$, l'expression des fonctions $g_i(f_1, f_2)$, dites fonctions de base, dépendent du type de symétrie considéré [4].

L'introduction d'une bande de transition et l'utilisation de la symétrie permettent, à partir de la caractéristique idéale $I(f_1, f_2)$, d'obtenir une fonction de filtrage désirée $D(f_1, f_2)$, définie et continue sur un sous-ensemble compact F de $[0, 0.5] \times [0, 0.5]$.

Le problème de la synthèse optimale, de type minimax, peut se ramener à la détermination des R coefficients $b(i)$ qui minimisent:

$$\delta = \max_{(f_1, f_2) \in F} |D(f_1, f_2) - H(f_1, f_2)| \quad (8)$$

Cette minimisation doit s'effectuer en tenant compte des contraintes fréquentielles (6), dont le nombre, NC_4 dans le cas d'une symétrie quart de plan, s'exprime par:

$$NC_4 = \begin{cases} \frac{(LK + L + K + 2)}{2} & \text{si } L \text{ et } K \text{ pairs} \\ \frac{(LK + L + K + 1)}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

Si les coefficients $h(n,m)$, et par là même les coefficients $b(i)$, peuvent prendre des valeurs réelles quelconques, le problème à résoudre est appelé **synthèse continue**.

Si par contre on désire obtenir directement des coefficients qui s'expriment avec un nombre limité de bits, il s'agit de résoudre un problème de **synthèse discrète**.

Un point commun aux deux types de méthodes de synthèse mises en oeuvre est la nécessité de procéder à une discrétisation du domaine fréquentiel F . On choisit donc K_p points de discrétisation $(f_{1k}, f_{2k}) \in F$, avec $k = 1, \dots, K_p$. Les résultats décrits au paragraphe VII ont été obtenus avec une grille de discrétisation rectangulaire et uniforme incluant également des points pris sur les contours des bandes spécifiées.

V- SYNTHÈSE CONTINUE

Après discrétisation, et en tenant compte des contraintes liées aux fréquences critiques, le problème de synthèse continue peut s'écrire sous forme d'un programme linéaire. Dans le cas de la synthèse continue pour obtenir une solution à ce programme linéaire qui soit suffisamment proche de celle du problème (8), les pas de discrétisation sur chaque axe sont définis par:

$$\Delta f_1 = \frac{0.5}{KN}; \quad \Delta f_2 = \frac{0.5}{KM} \quad (10)$$

avec généralement $10 \leq K \leq 15$. De ce fait le nombre total de contraintes d'inégalité $2(K_p + NC_4)$ est très nettement supérieur au nombre de variables $R + 1$, c'est à dire le nombre R de coefficients $b(i)$, qui est de $(N + 1)(M + 1)$ pour un filtre à symétrie quart de plan, auquel il faut ajouter la variable δ . Pour accélérer la résolution de ce problème il est donc nécessaire d'appliquer le théorème de la dualité pour passer de la forme primale initiale à la forme duale [1]. Un exemple de résultat obtenu par l'algorithme du simplexe révisé est donné au paragraphe VII.

VI- SYNTHÈSE DISCRÈTE

Si les coefficients de filtre résultant de la synthèse continue sont directement exploitables lors de simulations sur ordinateurs, dans le cas de réalisations matérielles leur quantification est nécessaire. On sait également que les valeurs arrondies des coefficients issus de cette synthèse produisent des solutions qui peuvent être sensiblement moins bonnes que celles obtenues directement sous forme quantifiée [1].

Si l'on se place dans le cas d'une quantification uniforme sur b bits (signe inclus), le pas de quantification est fixé par:

$$q = 1/2^{b-\ell-1} \quad (11)$$

où ℓ est le plus petit entier tel que $2^\ell \geq G$.

Dans ces conditions le problème de la synthèse discrète peut se formuler comme en (8), mais en imposant cette fois aux coefficients $b(i)$ de ne prendre qu'un nombre fini de valeurs discrètes, déterminées en fonction du pas de quantification q .



Les méthodes optimales que nous avons proposées sont basées sur l'utilisation de techniques de séparation et évaluation (en anglais branch and bound) associées à de la programmation linéaire. Leurs descriptions figurent dans les références [1] et [2].

VII- EXEMPLES

1- Conversion avec $L=1, K=2$, synthèse continue

A partir de l'expression (3), et après introduction d'une bande de transition, la fonction désirée retenue est définie par:

$$D(f_1, f_2) = \begin{cases} 4 & \text{si } (f_1/2) + f_2 \leq 0.15 \\ 0 & \text{si } (f_1/2) + f_2 \geq 0.3 \end{cases}$$

Pour approcher cette fonction, en imposant de plus que les contraintes (6) soient satisfaites, on résout le problème décrit en (8) pour un filtre RIF 2-D de taille 9×13 (9 points en horizontal, 13 lignes en vertical). La solution optimale correspond à une erreur normalisée (δ divisé par $2LK=4$) de 0.023, la représentation tridimensionnelle de sa réponse en fréquence est donnée à la Figure 3.

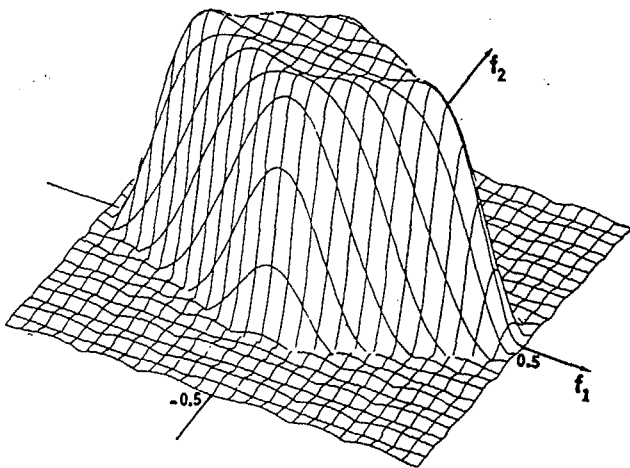


Figure 3: Réponse en fréquence d'un filtre losange RIF 2-D de taille 9×13 .

2- Conversion avec $L=K=1$, synthèse discrète

La caractéristique désirée a cette fois pour expression:

$$D(f_1, f_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_1 + f_2 \leq 0.3 \\ 0 & \text{si } f_1 + f_2 \geq 0.7 \end{cases}$$

Par ailleurs on impose encore les contraintes liées aux fréquences critiques et aussi que le filtre RIF 2-D ait une caractéristique de type "demi-bande" dans les directions diagonales. Avec un filtre de taille 13×13 et une quantification ($G=1, \ell=0$) sur 11 bits, signe compris, nous obtenons le résultat représenté à la Figure 4.

Il faut noter que pour cet exemple la synthèse discrète optimale permet un gain supérieur à 14 dB par rapport à une solution arrondie légèrement modifiée pour satisfaire les contraintes [2].

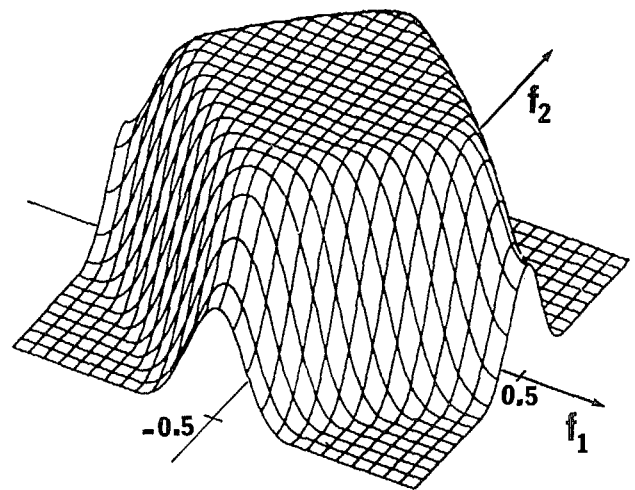


Figure 4: Réponse en fréquence d'un filtre losange RIF 2-D de type "demi-bande" et de taille 13×13 .

REFERENCES

- [1] P. SIOHAN, "Contribution à l'étude des méthodes de conception des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie et application au traitement d'images", Thèse de Doctorat de l'ENST, Mars 1989.
- [2] P. SIOHAN, A. BENSLIMANE, "Finite precision design of optimal linear phase 2-D FIR digital filters" IEEE, Trans. on CAS, Janvier 1989.
- [3] P. BERNARD, J. P. HENOT, P. ROGEL, P. SIOHAN, "HDMAC coding scheme" Picture Coding Symposium (PCS), Turin (Italie), 12-14 September 1988.
- [4] D. E. DUDGEON, R. M. MERSEREAU, "Multidimensional Digital Signal Processing", Prentice Hall, 1984.
- [5] A. ROSENFELD (Editor), "Multiresolution Processing and Analysis", Springer - Verlag, 1984.