

PERFORMANCES DES LISSAGES SPATIO-FREQUENTIEL POUR L'IDENTIFICATION DE SOURCES CORRELEES

I. Tas et J.L. Lacoume

CEPHAG, INPG/ENSIEG, URA 346 CNRS, BP 46, 38402 St Martin d'Hères Cedex

RÉSUMÉ

Il est bien connu que les interférences dégradent sévèrement les performances des méthodes à haute résolution (goniomètre, Tufts-Kumaresan,...). De nouveaux estimateurs de la matrice spectrale appelés lissage spatial et lissage fréquentiel pour les signaux large bande permettent de palier, sous certaines hypothèses, à ce problème. Nous étudions dans cet article le coefficient de corrélation et le spectre des valeurs propres (conditionnement de la matrice spectrale) dans le cas de deux sources avant et après l'utilisation des lissages spatio-fréquentiel, et nous en dégageons ainsi quelques résultats importants.

SUMMARY

It is well known that interferences destroy the performances of the high resolution methods. New estimators of the spectral matrix of the records called spatial smoothing and frequential smoothing (focusing) for the wide band signals can resolve, under certain assumptions, this problem. In this paper, we study the correlation coefficient and the conditioning of the spectral matrix in the case of two sources before and after using the spatial-frequential smoothings; thus we outline some important results.

1. INTRODUCTION

Le problème d'identification de sources rayonnantes en traitement d'antenne se rencontre dans divers domaines comme en acoustique sous-marine, en sismique, en géophysique externe et en encéphalographie. Les informations désirées (nombre, puissance, position géographique, ...) sont obtenues en exploitant les corrélations des signaux reçus sur les différents capteurs, qui dans le domaine fréquentiel sont représentées par leur matrice spectrale.

En notant $\gamma(f)$ la matrice spectrale des N signaux reçus, à une fréquence donnée f ; elle se décompose sous l'hypothèse de bruits additifs non corrélés avec les P ($P < N$) signaux émis, comme suit :

$$(1) \quad \gamma(f) = \gamma_S(f) + \gamma_B(f)$$

où $\gamma_B(f)$ est la matrice spectrale des bruits et $\gamma_S(f)$ la matrice spectrale des sources seules qui s'écrit :

$$(2) \quad \gamma_S(f) = U(f) S(f) U^H(f)$$

H désigne le transposé hermitien, $S(f)$ la matrice ($P \times P$) des corrélations des sources et $U(f)$ la matrice ($N \times P$) des vecteurs sources qui caractérise le milieu de propagation considéré

comme une matrice de fibres linéaires à P entrées (les sources) et N sorties (les capteurs).

L'hypothèse habituellement admise sur les bruits est qu'ils sont non corrélés et de même puissance $\beta(f)$ sur tous les capteurs. $\gamma_B(f)$ s'écrit alors :

$$(3) \quad \gamma_B(f) = \beta(f) \cdot I_N$$

$\gamma_B(f)$ peut-être aussi supposée pleine mais connue à une constante près, on peut alors se ramener à la forme (3) par "blanchiment spatial".

Les principales méthodes de traitement d'antenne (surtout à haute résolution) ont été établies en supposant les sources non corrélées ($\gamma_S(f)$ de rang maximal P). Elles ne sont donc pas applicables directement au cas de sources totalement ou fortement corrélées, cas assez fréquent en pratique dans certains types de propagation en présence de trajets multiples à faibles retards. L'utilisation de nouveaux estimateurs de la matrice spectrale (lissage spatial et lissage fréquentiel pour les signaux large bande) permet de restituer à la réception, sous certaines hypothèses, le rang P de $\gamma_S(f)$.

Lorsque les sources sont totalement ou fortement corrélées, la matrice $\gamma_S(f)$ est singulière; une au moins de ses valeurs propres est nulle. Il est donc intéressant d'étudier le spectre de ces valeurs propres avant et après les lissages spatio-



fréquentiel pour examiner la manière dont la singularité est évitée. Le calcul des valeurs propres pour un nombre élevé de sources étant fastidieux et complexe et d'une utilité peu évidente, nous étudierons le cas de deux sources pour mettre en évidence les effets des nombreux paramètres : écartement entre sources, nombre de capteurs, ... (le cas de plusieurs sources peut toujours se ramener à une étude des cas deux à deux).

2. CONDITIONNEMENT DE $\gamma_S(f)$: CAS DE DEUX SOURCES

Avant d'étudier les lissages spatio-fréquentiel, il est intéressant d'examiner la manière dont se dégrade le rang de $\gamma_S(f)$ en présence de sources corrélées. Pour cela, nous utilisons l'indice de conditionnement, noté I_C , de $\gamma_S(f)$ défini comme suit :

$$(4.1) \quad I_C = \frac{1}{\| \gamma_S(f) \| \cdot \| \gamma_S(f) \|^{-1}}$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme spectrale (norme matricielle induite par la norme euclidienne).

L'indice I_C prend des valeurs comprises entre 0 et 1. Il tend vers 1 quand $\gamma_S(f)$ est bien conditionnée (non singulière) et vaut 0 dans le cas contraire (matrice singulière : très mal conditionnée).

Dans le cas de deux sources ($P=2$), les 2 valeurs propres de $\gamma_S(f)$ (notées μ_1 et μ_2) sont solutions de leur polynôme caractéristique :

$$\mu^2 - \mu \operatorname{tr} [S(f)U^H(f)U(f)] + |S(f)U^H(f)U(f)| = 0$$

$\operatorname{tr} [\cdot]$ et $| \cdot |$ désignent respectivement la trace et le déterminant.

I_C s'écrit alors :

$$(4.2) \quad I_C = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{1 + \sqrt{1-a}}$$

$$\text{Avec } a = \frac{4 |S(f)U^H(f)U(f)|}{\left(\operatorname{tr} [S(f)U^H(f)U(f)] \right)^2}$$

Dans le cas d'ondes planes et d'une antenne rectiligne à capteurs équidistants, nous avons :

$$(5) \quad a = \frac{4 A_1 A_2 (1-r^2)(1-q_N^2)}{(A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2} r q_N \cos(\psi_N + \alpha))^2}$$

A_1 et A_2 sont les puissances des sources; r et α sont respectivement le module et la phase de leur coefficient de corrélation,

$$(6.1) \quad \psi_N = (N-1) \frac{\Delta\varphi}{2}$$

déphasage des deux sources au milieu de l'antenne

$$(6.2) \quad q_N = \frac{\sin\left(N \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$(\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \neq 0 \pmod{2\pi})$$

La quantité q_N dépend du nombre de capteurs et de l'écartement entre sources. Il est évident que si $r=1$, I_C vaut zéro et la matrice $\gamma_S(f)$ est singulière.

En utilisant les données directes et rétrogrades pour l'estimation de la matrice spectrale, l'indice de conditionnement est donnée par l'expression (4.2) avec :

$$(6.3) \quad a_{dr} = \frac{4 A_1 A_2 (1-r_{dr}^2)(1-q_N^2)}{(A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2} r_{dr} q_N \cos(\alpha))^2}$$

$$\text{où : } r_{dr} = r \cos(\alpha + \psi_N)$$

L'utilisation des données rétrogrades apporte donc une amélioration du conditionnement, sauf dans le cas particulier :

$$\alpha + \psi_N = 0 \pmod{\pi}$$

Notons que la matrice rétrograde se déduit de la matrice directe par symétrisation par rapport à la deuxième diagonale principale.

Nous présentons figure 1, le conditionnement de $\gamma_S(f)$ en fonction du module du coefficient de corrélation r entre les deux sources (antenne rectiligne à $N=50$ capteurs équidistants d'une demi-longueur d'onde, et $\alpha=0$); en pointillés I_C obtenu avec les données directes-rétrogrades. Nous constatons que si r augmente, le conditionnement se dégrade (tend vers zéro) et que lorsque $r=1$, $I_C \neq 0$ en utilisant les données directes-rétrogrades (courbes en pointillés). Le conditionnement, d'une façon général, dépend du nombre de capteurs, des puissances des sources (prises égales dans cet exemple), ainsi que de l'écartement entre sources (un faible nombre de capteurs et/ou des sources proches et/ou des sources à faible puissances dégradent encore le conditionnement).

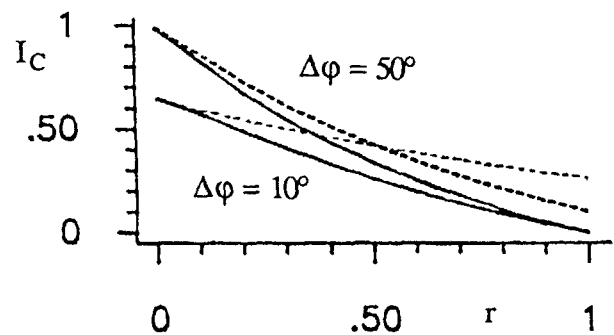


figure 1 : Effet de la corrélation sur le conditionnement

3. LISSAGE SPATIAL

Proposée par Evans et al [2], cette méthode consiste à subdiviser le réseau principal de réception (N capteurs) en M sous-réseaux (de dimension L) et à moyenner les matrices spectrales des sous-réseaux ($M=N-L+1$). En plus des hypothèses classiques sur les bruits (§.1), cette procédure suppose que l'antenne est rectiligne et à capteurs équidistants



et que les fronts d'ondes sont plans (propriétés du signal invariantes par translation dans l'espace). La matrice "lissée" est défini comme suit :

$$(7) \quad \tilde{\gamma}(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \gamma^m(f)$$

$\gamma^m(f)$ est la matrice spectrale correspondant au vecteur $\underline{R}^m(f)$ obtenu avec le $m^{\text{ième}}$ sous-réseau :

$$\underline{R}_m(f) = [R_m(f), \dots, R_{L+m-1}(f)]^T \quad ; \quad m \in [1, M]$$

où $R_m(f)$ désigne la transformée de Fourier du signal reçu sur le $m^{\text{ième}}$ capteur.

Il est aisé de voir que la matrice $\tilde{\gamma}(f)$ peut être obtenue directement à partir de $\gamma(f)$ par une moyenne glissante le long de ses diagonales. Ainsi au lieu d'estimer M sous-matrices de taille réduite ($L \times L$), on estimera qu'une seule matrice de dimension ($N \times N$).

La matrice lissée peut se réécrire :

$$\tilde{\gamma}(f) = U_L(f) \tilde{S}(f) U_L^H(f) + \beta(f) I_L$$

$U_L(f)$ est la restriction de $U(f)$ à ses L premières lignes.

L'élément général de la nouvelle matrice de corrélation s'écrit :

$$\tilde{S}_{ik}(f) = \begin{cases} S_{ik}(f) q_M e^{j\psi_M} & \text{si } i \neq k \\ S_{ik}(f) & \text{si } i = k \end{cases}$$

q_M et ψ_M sont obtenus en remplaçant N par M respectivement dans les expressions (6.2) et (6.1).

Shan et al [4] ont montré qu'en présence de P_0 ($P_0 \leq P$) sources corrélées, une condition nécessaire pour qu'elles soient décorrélées est : $N \geq (P_0 + P)$.

Après le lissage spatial, nous avons un nouveau coefficient de corrélation entre deux sources i et k :

$$(8.1) \quad \tilde{\rho}_{ik} = \tilde{r}_{ik} e^{j(\psi_M + \alpha_{ik})}$$

$$\text{où : } \tilde{r}_{ik} = r_{ik} q_M$$

L'indice de conditionnement de la matrice lissée des sources, dans le cas de deux fronts d'ondes plans et d'une antenne rectiligne à capteurs équidistants, s'obtient en substituant l'expression (5) par :

$$(8.2) \quad \tilde{a} = \frac{4 A_1 A_2 (1 - \tilde{r}^2) (1 - q_L^2)}{(A_1 + A_2 + 2 \sqrt{A_1 A_2} \tilde{r} q_L \cos(\tilde{\psi} + \alpha))^2}$$

$$\tilde{\psi} = (L+M-1) \frac{\Delta\phi}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{r} = r q_M$$

q_L est obtenue en remplaçant dans (6.2) N par L .

La quantité q_M fait intervenir le nombre de moyennes M ainsi que l'écartement entre sources.

En utilisant le lissage spatial avec les données directes-rétrogrades [1], la condition nécessaire de décorrélation des sources devient [8] : $N \geq (P + P_0/2)$ et l'indice de conditionnement est donné par (4.2) en prenant pour a l'expression (8.2) et en remplaçant :

$$\tilde{r}_{dr} = r q_M \cos(\alpha + \omega) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_{dr} = 0$$

$$\omega = (M-L) \frac{\Delta\phi}{2}$$

Nous présentons, figure 2, le conditionnement de $\gamma_S(f)$ après l'utilisations du lissage spatial (en pointillées; avec les données directes-rétrogrades) en fonction du nombre M de moyennes (même situation que fig.1, avec $r=1$: sources complètement corrélées). Nous constatons que les conditions classiques sur le nombre de capteurs sont insuffisantes dans le cas de sources proches. Si le nombre de moyenne est trop grand, le conditionnement se dégrade. A noter aussi le faible nombre de moyenne M pour avoir un meilleur conditionnement en utilisant les données directes-rétrogrades (courbes en pointillés; maximum décalé).

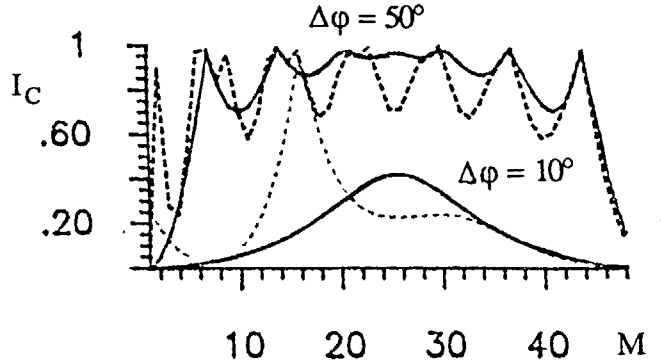


Figure 2 : Conditionnement après le lissage spatial

4. LISSAGE FREQUENTIEL

Les P sources et les bruits sont supposés avoir la même largeur de bande qui contient K fréquences :

$$f_k = f_1 + \frac{k-1}{\tau} \quad ; \quad k \in [1, K]$$

où τ est la durée totale du signal.

La procédure consiste à trouver une matrice de transformation F_k appelée matrice de focalisation, tel que :

$$F_k U(f_k) = U(f_c)$$

f_c : fréquence de focalisation ($c \in [1, K]$).

Le nouvel estimateur de la matrice spectrale (de dimension $N \times N$) est :

$$\hat{\gamma}(f_c) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F_i \gamma(f_i) F_i^H$$

La matrice de focalisation n'est pas unique [3]; si elle est unitaire et si les bruits ont même puissance dans toute la bande, alors :

$$\hat{\gamma}(f_c) = U(f_c) \hat{S}(f_c) U^H(f_c) + \beta I_N$$

$$\hat{S}(f_c) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K S(f_i)$$

Dans le cas de fronts d'ondes plans et d'une antenne rectiligne à capteurs équidistants de d , l'élément général de la nouvelle matrice de corrélation des sources (après lissage fréquentiel) est :



$$\hat{S}_{ik}(f_c) = r_{ik} e^{j\alpha_{ik}} Q_{ik}$$

$$Q_{ik} = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K (S_{ii}(f_m) S_{kk}(f_m))^{1/2} e^{-j(m-1)\Delta\omega_{ik}}$$

$$\Delta\omega_{ik} = \frac{2\pi d}{c\tau} (\sin\theta_i - \sin\theta_k)$$

c désigne la vitesse de propagation. La première fréquence est prise comme fréquence de focalisation.

Le nouveau coefficient de corrélation entre deux sources i et k devient :

$$\hat{\rho}_{ik} = \hat{r}_{ik} e^{j(\delta_{ik} + \alpha_{ik})}$$

$$\hat{r}_{ik} = r_{ik} \frac{q_{ik}^F}{(h_i h_k)^{1/2}}$$

$$h_i = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K S_{ii}(f_m)$$

q_{ik} et δ_{ik} sont respectivement le module et la phase de Q_{ik} qui fait intervenir le nombre de fréquences, l'écartement entre sources et leurs puissances dans la bande.

L'indice de conditionnement est donnée par l'expression (4.2) en prenant pour a la quantité :

$$\hat{a} = \frac{4 h_1 h_2 (1 - \hat{r}) (1 - q_N^2)}{\left(h_1 + h_2 + 2 \sqrt{h_1 h_2} \hat{r} q^F \cos(\alpha + \delta) \right)^2}$$

Dans le cas de signaux à spectre plat (sources de même puissances dans toute la bande), on retrouve les mêmes expressions que pour le lissage spatial avec les données directes, et si on focalise à la fréquence centrale (K impair), avec les données directes-rétrogrades (§.3).

Rappelons que pour la construction des matrices de focalisation, une connaissance approximative des directions des sources est nécessaire (utilisation de la formation de voies ou du lissage spatial à une fréquence donnée dans la bande).

Nous présentons, figure 3, le module de corrélation entre deux fronts plans, à spectre plat, après le lissage fréquentiel, en fonction du nombre de fréquences K (largeur de bande 20 Hz, autour de 82 Hz). Il est à noter le premier passage à zéro pour les deux cas : sources proches et sources éloignées.

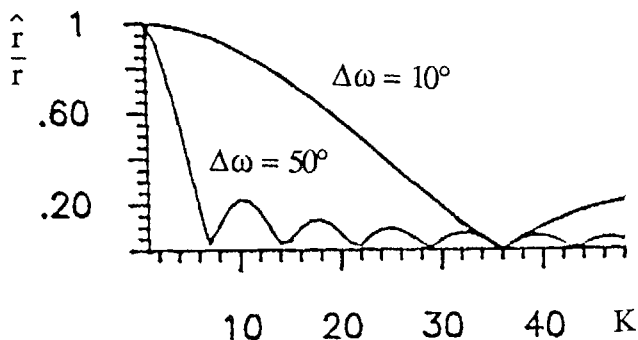


Figure 3 : Module de corrélation après le lissage fréquentiel

5. CONCLUSION

Les méthodes de traitement d'antenne cherchent à caractériser des sources rayonnantes, mais ne disposant que peu d'informations à priori, des hypothèses supplémentaires sont alors introduites parmi lesquelles celle de sources non corrélées, hypothèse indispensable pour toutes les méthodes exceptée la formation de voies (méthode de Fourier) dont le pouvoir séparateur est malheureusement limité par la longueur totale D de l'antenne (λ/D , λ : longueur d'onde). Pour appliquer les méthodes à haute résolution, de nouveaux estimateurs de la matrice spectrale qui permettent de décorrélérer les sources à la réception sont alors nécessaires.

Après avoir examiné la manière dont le rang de la matrice spectrale des sources se dégrade en présence d'excitations corrélées (cas de 2 sources, avec les données directes et directes-rétrogrades), nous avons présenté les lissages spatio-fréquentiel et étudié la manière dont le rang est restitué en fonction de nombreux paramètres. Les conditions sur le nombre de capteurs, respectivement sur le nombre de fréquences dans la bande, sont des conditions nécessaires mais généralement non suffisantes. On doit tenir compte de nombreux autres paramètres tel que (écartement entre sources, puissances respectives des sources, ...).

Notons le problème de la détection du nombre de sources après l'utilisation du lissage spatial (matrice spectrale non de Wishart); l'utilisation de critères "paramétriques" [9] devrait apporter une solution à ce problème. Quant au lissage fréquentiel, les critères classiques peuvent être adaptés [5], dans le cas d'indépendance entre fréquences dans la bande.

Pour terminer, signalons la possibilité d'utiliser le principe de la focalisation avec le lissage spatial [7], qui permet alors de s'affranchir des conditions supplémentaires sur le nombre de capteurs.

REFERENCES

- [1] Clergeot H., Ouamri A. and Tressens S., High Resolution Spectral Methods for Spatial Discrimination of Closely Correlated Sources, Proc. ICASSP, 560-563, 1985.
- [2] Evans J.E., Johnson D.R. and Sun D.F., High Resolution Angular Spectrum Estimation Techniques for Terrain Scattering Analysis and Angle of Arrival Estimation, Workshop Spectral Estimation I, Hamilton, Ontario, Canada, 134-139, 1981.
- [3] Hung H. and Kaveh M., Focusing Matrices for Coherent Signal-Subspace Processing, IEEE ASSP, 36, n°8, 1272-1281, Aug 1988.
- [4] Shan T.J., Wax M. and Kailath T., On Spatial Smoothing for Direction-of-Arrival Estimation of Coherent Signals, IEEE ASSP, 33, n°14, 806-811, Aug 1986.
- [5] Tas I., Bourennane S., Jourdain G., Faure B. and Lacoume J.L., Detection Criteria and Spatial-Frequency Smoothing, Workshop Spectral Estimation IV, Minneapolis, Minnesota, 135-140, Aug 1988.
- [6] Tas I., Latombe C. et Lacoume J.L., Localisation de sources corrélées par traitement d'antenne en utilisant le lissage spatial, TS, 5, n°5, 189-195, 1988.
- [7] Tas I. and Lacoume J.L., Localization of Coherent Signals Using Commutated Arrays, soumis à IEEE ASSP.
- [8] Williams R.T., Prasad S., Mahalanabis and Sibil L.H., An Improved Spatial Smoothing Technique for Bearing Estimation in a Multipath Environment, IEEE ASSP, 36, n°4, 425-432, April 1988.
- [9] Yin Y.Q. and Krishnaiah P.R., On some Parametric Methods for Detection of the Number of Signals, IEEE ASSP, 35, n°11, 1533-1538, Nov 1987.

Detectability Conditions of High Resolution Algorithms in the Presence of Correlated Arrivals

M. João D. Rendas *

José M. F. Moura

LASIP, Depart. Elect. and Comp. Eng., Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 15213.

RÉSUMÉ

Le problème de détection de sources arbitrairement corrélées est considéré, dans le cadre des Méthodes à Haute Résolution. Les techniques qui recourent à un lissement du signal reçu sur les capteurs, soit dans le domaine spatial, soit dans le domaine temporel, résolvent efficacement ce problème. Ici, des limites supérieures du nombre de signaux détectables par ce genre de techniques sont présentés. Traitement spatial (bande étroite), et traitement dans les deux domaines, sont considérés. On montre que le nombre de sources détectables dépend non seulement du nombre de capteurs sur l'antenne, mais aussi de la variabilité (degrés de liberté) du signal lui-même: pour le traitement spatial, cette variabilité est la caractéristique de la matrice de corrélation du vecteur source, et si on considère des signaux de bande large, aussi les degrés de liberté associés à la variation en fréquence du signal.

SUMMARY

A common and effective way of handling correlated sources in the framework of High Resolution Techniques is to use pre-processing in the form of some kind of smoothing. This paper studies bounds on the number of arbitrarily correlated sources and/or paths that can be detected using the rank of conveniently smoothed matrices. Spatial only methods, and a combination of spatial and frequency processing are considered. It is established that the number of detectable sources is a function of not only the number of sensors but also of the number of degrees of freedom present in the waveform itself. For narrow-band processing, the degrees of freedom relate to the statistical variability of the source vector, while wideband processing has further available the degrees of freedom associated with the frequency variability of the source signals.

1 Introduction

Several kinds of smoothing methods have been proposed in the literature to extend to perfectly correlated sources the High Resolution Techniques [2,6,7,8].

High Resolution Techniques (HRT) are based on the identification of the signal subspace which is P dimensional for P directive components on the received signal. This subspace must uniquely identify the set of directions of arrival (DOA's) present in the observed field. For a uniform linear array of K sensors, the condition $K > P$ assures that the signal subspaces corresponding to distinct sets of DOA's are distinct. However, their intersection has, in general, dimension $P - 1$, and consequently, knowledge of a proper subspace of the signal subspace is not enough to identify the DOA's. This fact explains why these algorithms require full (P) dimensionality of the estimated signal subspace (or equivalently, a full rank source covariance matrix), excluding the possibility of completely correlated sources.

The presence of completely correlated sources induces ambiguities, in the sense that different source configura-

tions can lead to the same (low dimensional) observed signal subspace. It is thus natural that additional degrees of freedom be required, to guarantee a one-to-one correspondence of the observed signal subspace and the P directions of arrival. In fact, the smoothing techniques proposed as pre-processing blocks for the HRT, such as the Spatial Smoothing Technique (SST)[2,6] and the Coherent Signal Subspace Method (CSSM) [7], solve this ambiguity at the expense of requiring additional degrees of freedom. The resolvability constraint that has been attributed to the first method, $K \geq 2P$ suggests a doubling in the receiver's aperture size. This bound corresponds to the limiting case when the intersection of signal subspace estimates corresponding to distinct DOA's is empty, and a single direction uniquely identifies the set of DOA's. In general, the observed signal subspace will be of dimension $1 \leq r \leq P$. These additional degrees of freedom are effectively used by the SST, and, as we prove below (see also [5]), the tighter bound $K > 2P - r$ is enough to ensure proper identification of the P DOA's.

As several authors have proposed ([3,4]) time/frequency versions of HRT are possible. Namely, if the assumption of a flat spectrum signal is made (an hypothesis that must be added to the work reported in reference [4]) a tempo-

*visiting, on leave from CAPS, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, on a fellowship from INVOTAN (Portugal).