

**TOMOGRAPHIE D'OBJETS AXISYMETRIQUES:**  
**REGULARISATION PAR DES CHAMPS MARKOVIENS**

Jean-Marc DINTEN

C.E.A, Centre d'Etudes de Vaujours, B.P n°7, 77181 Courtry

Université Paris-Sud, Laboratoire de statistique appliquée, 91405 Orsay

**RÉSUMÉ**

La reconstruction tomographique d'un objet à symétrie de révolution peut être effectuée à partir d'une seule projection [1] ; mais ce problème inverse est mal posé. Nous proposons ici une régularisation par introduction d'information locale (géométrie des matériaux dans l'objet et caractéristiques physiques de chaque milieu) au moyen d'une modélisation markovienne [3].

Cette méthode conduit à un algorithme qui est expérimenté sur un objet test.

**SUMMARY**

The tomographic reconstruction of an axially symmetric object can be obtained from only one projection [1] ; but this inverse problem is ill conditioned. We propose here a regularisation introducing local information (geometry of the materials composing the object and physical characteristics in each material) based on a markovian modelisation [3].

This method leads to an algorithm experimented on a test object.

**1. Tomographie axiale transverse :**

Les rayons arrivant sur l'objet sont supposés parallèles entre eux et de direction perpendiculaire à celle de l'axe de révolution (Cf Figure 1.a).

L'objet étant à symétrie de révolution, les isodensités sont des cercles centrés sur l'axe : ceci nous conduit à discrétiser l'objet en pixels toriques.

Par discrétisation de la transformée de Radon,

$$Y = H R \quad (1)$$

où Y est le vecteur des projections,

R est le vecteur des densités,

H la matrice des surfaces d'intersections entre les pixels et les rayons (Cf Figure 1.b)

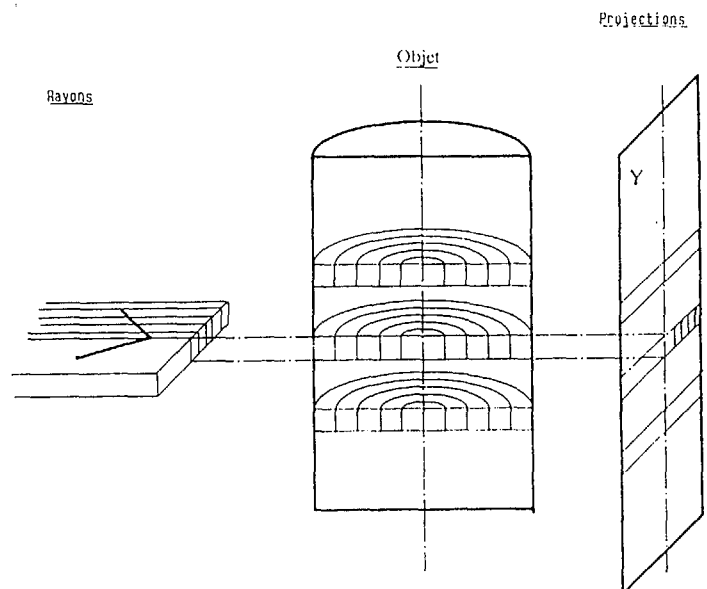


Figure 1a: Tomographie axiale transverse

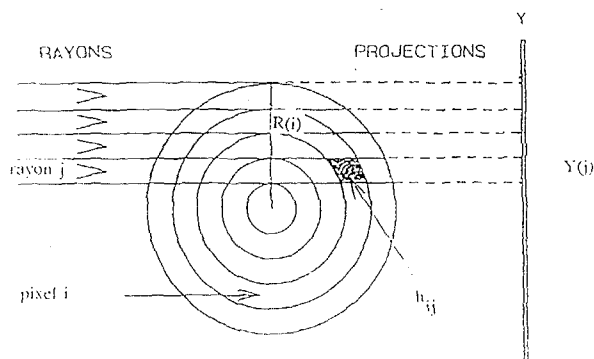


Figure 1b: Projection issue du rayon j dans une tranche

Les projections observées sont bruitées ; nous supposons le bruit blanc, additif et gaussien d'écart-type proportionnel au signal :

$$Y = H R + \varepsilon \quad (2)$$

avec  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, V_\varepsilon)$ ,  $V_\varepsilon$  diagonale.

Remarquons qu'en raison de la symétrie de l'objet, nous disposons de deux fois plus d'observations que d'inconnues dans l'équation (2).

## 2. Modélisation a priori :

Le nombre de matériaux composant l'objet est connu : à chaque pixel, nous associons une variable qualitative  $\lambda$  indiquant le matériau auquel il appartient.

Nous munissons  $\Lambda$  d'une distribution de Gibbs aux huit plus proches voisins limitée aux interactions de paires [2] :

$$P(\Lambda) = \frac{\exp [-U(\Lambda)]}{Z}$$

avec  $Z$  : constante de normalisation

$$U(\Lambda) = \sum_{(k,l)} \beta_{kl} n_{kl}$$

où  $n_{kl}$  est le nombre de couples de pixels voisins de labels respectifs  $k$  et  $l$ ,

$\beta_{kl}$  le paramètre de coût de la configuration  $(k, l)$ .

Remarquons que  $\beta_{kl} > 0$  favorise une distribution des matériaux par plage,  $\beta_{kl} = +\infty$  interdit la juxtaposition des matériaux  $k$  et  $l$ .

Ensuite nous introduisons des informations sur des caractéristiques physiques spécifiques à chaque matériau par une modélisation markovienne gaussienne [2].

Cette modélisation hiérarchique permet de construire l'énergie a priori sur les labels et les densités :  $U(\Lambda, R)$ .

## 3. Reconstruction :

La modélisation du processus de formation des projections et la modélisation a priori permettent, par la règle de Bayes, de construire l'énergie a posteriori  $U(R, \Lambda | Y)$  :

$$U(R, \Lambda | Y) = U(R, \Lambda) + \frac{1}{2} (Y - HR)^t V_\varepsilon^{-1} (Y - HR)$$

Cette énergie permet de définir différents estimateurs de  $R$  et  $\Lambda$  : MAP (Cf [4]), MPM (Cf [5]), Posterior Mean, ...

Pour des raisons de facilité d'implémentation et de temps CPU, nous avons choisi l'I.C.M. (Cf [2]).

## 4. Expérimentation :

L'objet test (Figure 2.a) est un ellipsoïde constitué de deux matériaux.

Les projections ont été calculées par  $Y_{\text{cal}} = H R$  (Cf Figure 3.a), puis bruitées par addition d'un bruit blanc gaussien d'écart-type proportionnel au signal calculé ( $K=0.0375$ ) (Cf Figure 3.b).

L'algorithme est testé sur la projection bruitée.

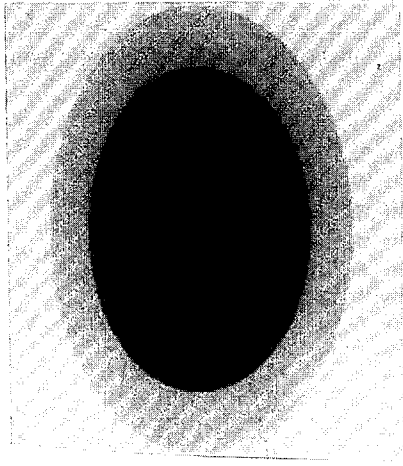


Figure 2a: Photographie du plan méridien de l'objet test

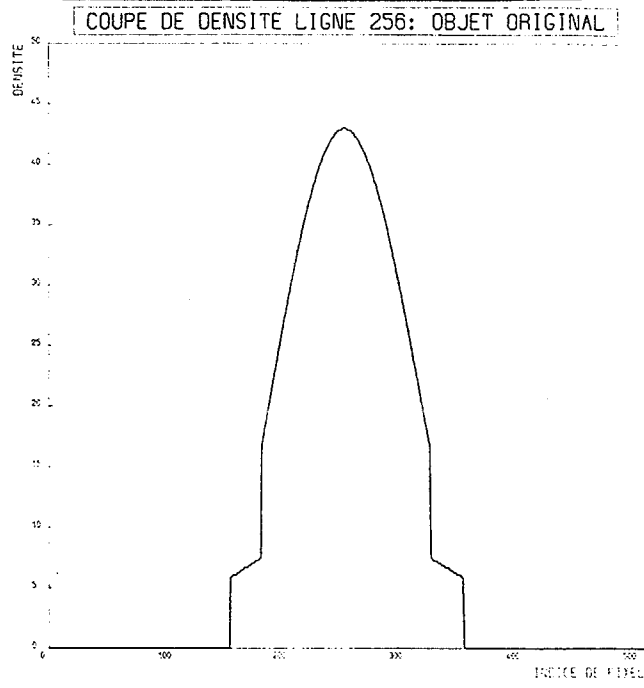


Figure 2b: Coupe de densité de l'objet test

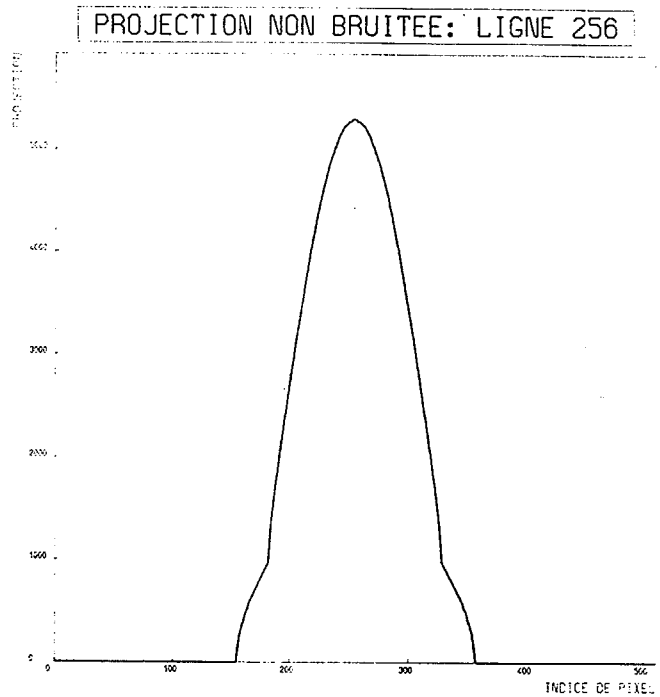


Figure 3a: Coupe de densité de la projection non bruitée

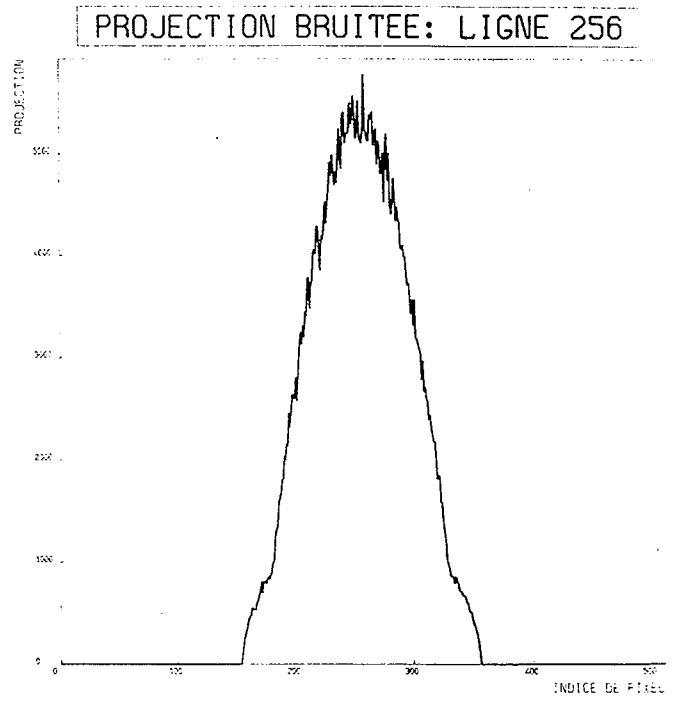


Figure 3b: Coupe de densité de la projection bruitée

Reconstruction de type inverse généralisé : par résolution du système linéaire  $Y = H R$ .

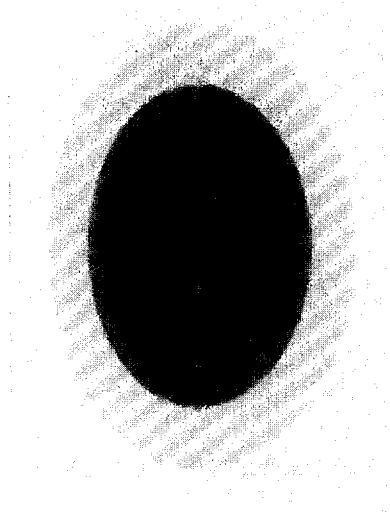


Figure 4a: Photographie du plan méridien de la reconstruction inverse généralisée

Même avec un bruit faible (Figure 3.b), la reconstruction inverse généralisée est très instable, surtout au voisinage de l'axe.

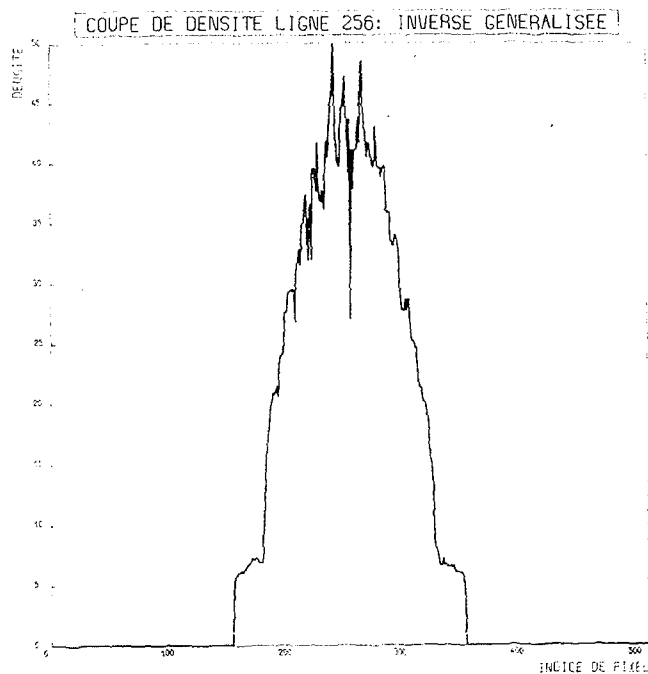


Figure 4b: Coupe de densité de la reconstruction inverse généralisée

#### Reconstruction par I.C.M. :

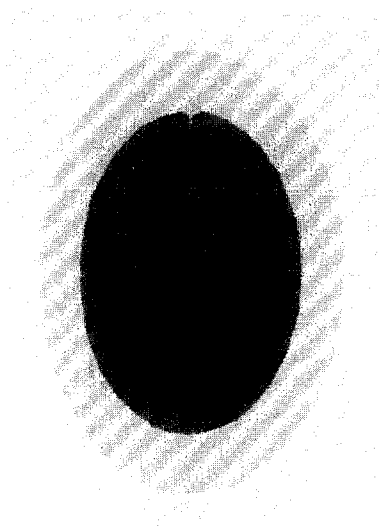


Figure 5a: Photographie du plan méridien de la reconstruction I.C.M.

Notre régularisation géométrique rend la reconstruction plus robuste au bruit : le champ de densités est continu dans chaque matériau et les interfaces entre milieux restent nettes.

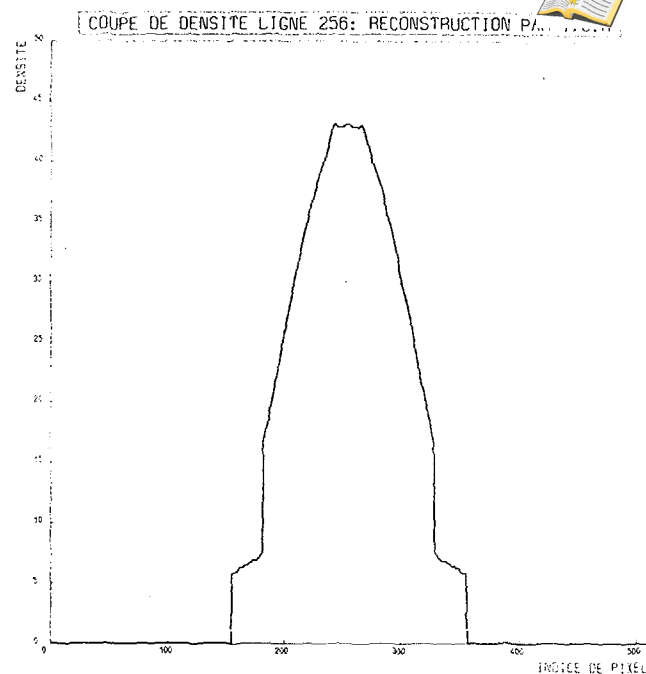


Figure 5b: Coupe de densité de la reconstruction I.C.M.

La méthode doit maintenant être validée sur des objets à géométrie plus complexe, en enrichissant éventuellement la fonction d'énergie a priori (par un processus de bord, par exemple [6]).

#### Bibliographie :

- [1] Abel N.H., "Résolution d'un problème de mécanique", J.Reine u. Ang. Math., vol 1, 153-157 (1826)
- [2] Besag J., "On the statistical analysis of dirty pictures", J.R.S.S., B48, 259-302 (1986)
- [3] Dinten J.M., "Tomographic reconstruction with a limited number of projections: regularisation using a Markov model", Préprint Univers. Paris-Sud, 88-42 (1988)
- [4] Geman D., Geman S., "Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the bayesian restoration of images" IEEE Trans. Pattern Anal Machine Intell. 6, 721-741 (1984)
- [5] Marroquin J., Mitter S., Poggio T. "Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision" J. Am. Stat. Assoc., Vol 82, 76-89 (1987)
- [6] Chalmond B., "Image restoration using an estimated Markov model" Signal Proc., vol 15, sept. 1988