

Probabilités a priori des images et réseaux causaux bouclés

Xavier Merlo

ETCA, 94114 Arcueil Cedex

RESUME

Il existe actuellement un courant de recherches sur des modélisations probabilistes des images. Les problèmes qui se posent sont essentiellement le nombre très grand de configurations possibles, ainsi qu'également l'impossibilité d'utiliser une causalité classique sur des images bidimensionnelles. Une solution rigoureuse a été récemment proposée d'une modélisation des images sous forme d'un champ markovien, à partir de techniques issues de la mécanique statistique [Geman&Geman]. Ce modèle peut être immédiatement utilisé dans une technique d'optimisation type recuit simulé.. avec malheureusement un problème de taille des calculs à accomplir (elle est actuellement praticable surtout pour des images binaires). D'autre part, la fonction d'énergie $U(I)$ présente le défaut d'être déterminée d'une manière ad hoc et "intuitive", et repose sur un certain savoir-faire humain, un léger changement pouvant faire la différence entre de bons et de mauvais résultats.

Nous proposons ici de relier directement cette fonction énergie à des propriétés statistiques élémentaires locales de l'image, en suivant une démarche simple parallèle à celle de la mécanique statistique, grâce à un algorithme présenté dans [Cheeseman], sur la détermination des probabilités a priori dans les réseaux de règles des systèmes experts. Cet algorithme repose sur la maximisation de la quantité d'information sous contraintes, grâce à l'utilisation d'un lagrangien, et peut travailler sur des réseaux présentant des boucles. Les statistiques de base pourraient être l'histogramme de longueur des sections des régions déterminées par une première segmentation standard. Une application détermine la fonction énergie pour des cliques 2×2 à partir des probabilités de transition monodimensionnelle entre deux régions.

SUMMARY

One of the research fields in image processing is about the probabilistic modelizations. The problems are the enormous amount of possible configurations, and also the impossibility of using causal models on bidimensional images. One solution has been recently suggested of a markovian field modelization, with statistical physics descriptions [Geman&Geman]. This model can be used in a simulated annealing optimization technique, although there is still a problem for intensity images. Another problem is that the energy function $U(I)$ has the defect to be often determined in a ad hoc manner, a small change leading sometimes to bad results.

We propose here to compute this energy function from elementary statistics of the image, following in a simple way the statistical physics, thanks to an algorithm used for the determination of a priori probabilities in expert systems [Cheeseman]. This algorithm is based on the bounded maximization of the information quantity with a langrangian technique, and can work out probabilities in non-causal nets with loops. The basic statistics could be the regions sections lengthes histogram, to be computed out of a standard first approximated segmentation. One application determines the energy function for 2×2 cliques from partial monodimensional probabilities of transition between two regions.

1 Introduction

Il existe actuellement un courant de recherches sur des modélisations probabilistes du type traitement du signal en traitement d'images, tant du point de vue des contours [Bouthemy], que pour l'image elle-même. Les problèmes qui se posent, surtout dans le deuxième cas, sont essentiellement le nombre très grand de configurations possibles ($2^{512 \times 512}$ pour les images binaires 512×512), mais également l'impossibilité d'utiliser une causalité classique sur des images bidimensionnelles. Une solution rigoureuse a été proposée d'une modélisation des images sous forme d'un champ markovien, à partir de techniques issues de la mécanique statistique [Geman&Geman] [Azencott]. On se définit une fonction énergie $U = \sum U_c$ sur l'ensemble C des cliques de l'image, c'est-à-dire des interactions entre pixels (dans un modèle simple, C est l'ensemble des 4-connexions). Cette énergie mesure l'écart par rapport à un état "lisse" ou "normal" d'énergie basse de l'image. La mécanique statistique nous dit alors que la distribution de probabilité des images s'écrit:

$$P(I) = \exp(-U(I)) \quad (\text{distribution de Gibbs})$$

Ce modèle peut être immédiatement utilisé dans une technique d'optimisation type recuit simulé, où $P(I) = \exp(-U(I)/T)$, et peut servir en extraction de contours, en segmentation, en restauration d'images, en détection de mouvement.. avec malheureusement un problème de taille des calculs à accomplir (elle est actuellement praticable surtout pour des images binaires). D'autre part, la fonction d'énergie présente le défaut d'être déterminée d'une manière ad hoc et "intuitive", et repose sur un certain savoir-faire humain, un léger changement pouvant faire la différence entre de bons et de mauvais résultats.

Nous proposons ici de relier directement cette fonction énergie à des propriétés statistiques élémentaires locales de l'image, en suivant une démarche simple parallèle à celle de la mécanique statistique, grâce à un algorithme présenté dans [Cheeseman], sur la détermination des probabilités a priori dans les réseaux de règles des systèmes experts. Cet algorithme repose sur la maximisation de la quantité d'information sous contraintes, grâce à l'utilisation d'un lagrangien. Cela pourrait permettre l'application de ces méthodes probabilistes d'une manière plus rigoureuse, à partir par exemple d'une analyse statistique préalable de l'image à traiter.



Si nous observons le résultat de l'application brute d'une technique standard de segmentation¹ [Gambotto & Monga] [Gagalowicz & Monga] à une image incluant des objets naturels et artificiels (image en 2.2), sans chercher à en ajuster les paramètres, nous observons que les régions sont généralement bien détectées, mais avec des erreurs de fusions ou de divisions de celle-ci, visibles par exemple dans les fenêtres ou dans le coin du bâtiment.

On peut cependant estimer que les statistiques monodimensionnelles sur les longueurs des sections de ces régions sont approximativement celles de l'image réelle, la segmentation incluant des critères globalement efficaces sur les frontières entre les régions. Nous allons donc déterminer à partir de ces statistiques monodimensionnelles une fonction énergie pour des cliques 2x2 de l'image, énergie qui pourra ultérieurement être utilisée dans un recuit simulé. La méthode permet également l'utilisation d'autres statistiques et d'autres types de cliques, mais est limitée par la complexité des calculs.

2 Application

2.1 Probabilités de la clique 2x2

Nous avons choisi d'étudier tout d'abord un modèle simple de champ markovien d'image binaire, invariant par toutes les symétries du carré. Le fait d'étudier des images binaires ne veut pas forcément dire que les images initiales seront binivaleurs: elles pourront par exemple être composées de deux régions, dans lesquelles on pourra se définir une distribution a priori des pixels. On se donne pour commencer uniquement deux paramètres de base, les deux probabilités de transition d'une région à l'autre sur une clique de 4-connexité:

p01: probabilité de passer de la région 0 à la région 1
p10: idem de 1 à 0

Soit alors une image binaire nxn. A partir des deux paramètres ci-dessus, l'algorithme présenté dans [Cheeseman] nous permet de calculer la probabilité a priori de chaque configuration. Cette maille peut être considérée comme un réseau causal lorsqu'on isole les cliques élémentaires (deux pixels adjacents), la connaissance de l'état ou de la probabilité de l'état d'un des deux pixels, à l'exclusion d'autre information, permettant de calculer la probabilité de l'état du deuxième pixel grâce à la formule des probabilités conditionnelles:

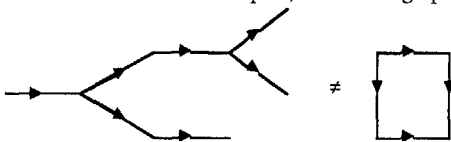
pixel X --> pixel Y

$$P(Y=1) = P(X=1) (1-p10) + P(X=0) p01$$

Bien entendu, la formule est réversible, ce qui donne une causalité biunivoque, le lien étant la probabilité conjointe de X et Y:

$$P(X \text{ et } Y) = P(Y|X) P(X) = P(X|Y) P(Y)$$

Lorsque maintenant on considère le graphe complet et qu'on veut utiliser toutes les informations, on ne peut que calculer les probabilités des chaînes simples, et non des graphes bouclés:



chaînes causales simple et bouclée

L'algorithme utilise le principe de la maximisation de la quantité d'information. Les contraintes sur les probabilités des cliques sont introduites grâce à un lagrangien:

$$L = \sum_m -p_m \text{Log}(p_m) + \mu \left(\sum_m p_m - 1 \right) + \sum_{c=(X,Y)} \mu_{c,x,y} \left(P(Y|X) \left(\sum_m p_m \right) - \left(\sum_m p_m \right) \right)$$

où X=x où X=x
y=0,1 et Y=y

où m parcourt l'ensemble des configurations de l'image, c l'ensemble des cliques, $P(0|1) = p10$, $P(1|1) = 1-p10$, $P(0|0) = 1-p01$, $P(1|0) = p01$. D'autres types de contraintes que les probabilités conditionnelles, mais que nous n'utiliserons pas ici, peuvent également être introduites [Cheeseman]. La solution est maintenant déterminée par l'annulation des dérivées partielles:

1) pour toute configuration m:

$$\partial L / \partial p_m = \text{Log}(p_m) + 1 + \mu + \sum_c \mu_{c,x_m,y_m} (P(Y_m|X_m) - 1) = 0$$

et x_m et y_m sont les valeurs des pixels X et Y de c dans m

$$2) \partial L / \partial \mu = \left(\sum_m p_m \right) - 1 = 0$$

$$3) \partial L / \partial \mu_{c,x,y} = P(Y|X) \left(\sum_m p_m \right) - \left(\sum_m p_m \right) = 0$$

où X=x où X=x
et Y=y et Y=y

On retrouve grâce à 1) une distribution de Gibbs:

$$p_m = \exp \left(-1 - \mu - \sum_c \mu_{c,x_m,y_m} (P(Y_m|X_m) - 1) \right)$$

ce qui nous détermine directement l'énergie recherchée. En fait le système d'équations donné par 1), 2) et 3), ainsi que l'ajout des considérations de symétrie, ne peut être résolu que numériquement, cette résolution n'étant praticable que pour des voisinages très petit. Mais nous verrons plus loin que nous pouvons nous ramener à la maille élémentaire 2x2. Pour celle-ci, l'ajout des équations de symétries dans le système 1) 2) 3) sous Macsyma permet de ramener le nombre de configurations de 16 à 6, et le nombre de multiplicateurs de Lagrange de 16 à 3, par triangulation de la matrice de leurs coefficients. On obtient ainsi le lagrangien réduit:

$$L = P1111 * (\text{Log}(P1111) - \mu_1 p10 - \mu_0) + P0111 * (-4 \text{Log}(P0111) + \mu_2 (p01-1) + \mu_1 (1-3p10) - 4\mu_0) + P0011 * (-4 \text{Log}(P0011) + \mu_2 (2p01-1) + \mu_1 (1-2p10) - 4\mu_0) + P0101 * (-2 \text{Log}(P0101) + \mu_2 (p01-1) + \mu_1 (1-p10) - 2\mu_0) + P0001 * (-4 \text{Log}(P0001) + \mu_2 (3p01-1) + \mu_1 (1-p10) - 4\mu_0) + P0000 * (\text{Log}(P0000) + \mu_2 p01 - \mu_0) + \mu_0$$

où P0000, P0001, P0011, P0101, P0111 et P1111 sont les probabilités des six configurations possibles, et μ_0 , μ_1 , μ_2 les nouveaux multiplicateurs de Lagrange. Une méthode numérique peut alors permettre, à partir des valeurs de p01 et p10, la détermination de ces probabilités élémentaires, et, par voie de conséquence, de leur énergie. Par exemple pour p01 = p10 = 0.01, on obtient aux erreurs numériques près:

$$P0000 = 0.4900031$$

$$P0001 = 0.0016648$$

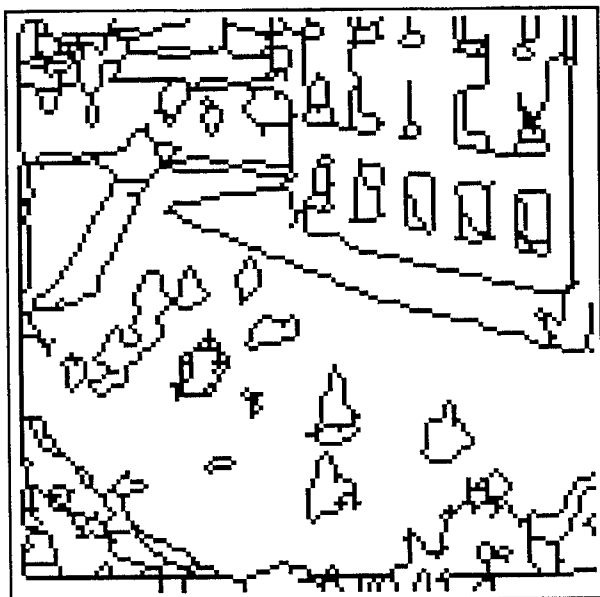
$$P0101 = 0.0000057$$

Il est intéressant de vérifier, aux erreurs numériques près, que les autres probabilités se déduisent à l'identique en fonction du nombre de transitions dans le cycle de la maille, ou par la symétrie supplémentaire $0 \leftrightarrow 1$, puisque p01 et p10 sont identiques. Les énergies des différentes configurations se déterminent à une constante additive près en prenant le logarithme des probabilités.

En théorie, ce genre de méthode pourrait se généraliser à n'importe quelle taille d'image. Les calculs deviennent malheureusement impraticables à partir de la maille 3x3. Une manière simple de résoudre ce problème est de considérer cette maille 2x2 comme une clique, l'énergie de toute l'image étant alors la somme de celles de toutes les mailles.

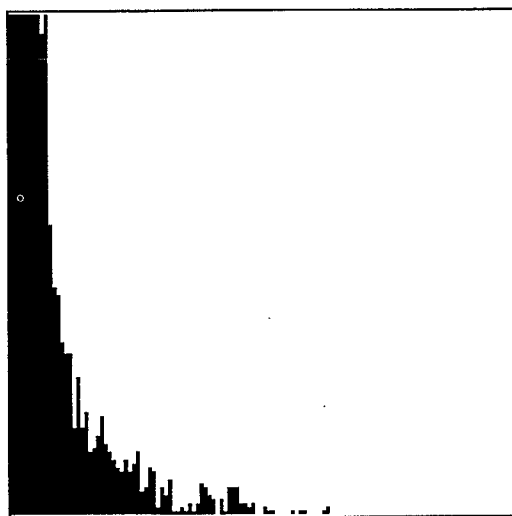
¹ Je remercie ici Christophe Thomas et Patrick Bonnin pour leur expertise en traitement d'images

2.2 Détermination des paramètres statistiques de l'image



résultat d'une segmentation standard

A partir de l'image segmentée vue dans l'introduction, on peut réaliser un histogramme des longueurs des sections des régions, et vérifier au passage l'hypothèse de l'isotropie du modèle de l'image:



Histogramme des longueurs des sections de régions

Dans le modèle simple choisi, nous ne considérons qu'un seul paramètre p de probabilité de transition entre deux régions. La distribution de probabilité des sections monodimensionnelles suit alors la loi binômiale:

$$P(L(s)=n) = p (1-p)^n$$

Où $L(s)$ est la longueur d'une section. Il s'agit alors de faire coller cette courbe à l'histogramme ci-dessus, ce qui permet de déterminer le paramètre p à rentrer dans l'énergie de la clique 2×2 élémentaire.

3 Conclusion

La segmentation complète par recuit simulé de l'image initiale multiniveaux n'a pas encore été réalisée. L'algorithme présenté paraît cependant intéressant en ce sens qu'il réduit la "distance" entre les statistiques des images et la détermination de la fonction énergie, grâce à une démarche parallèle à celle de la physique statistique, et également beaucoup plus simple. Il est intéressant à ce propos de noter que le modèle d'image binaires avec interactions en 4-connexités, appelé modèle d'Ising bidimensionnel, est parfaitement caractérisé mathématiquement [Wilson]. D'autre part, bien que l'application présentée ici soit très locale, il paraît possible d'intégrer des interactions plus éloignées, grâce à un modèle multiéchelle de l'image.

L'application qui est visée pour l'instant est la conception d'un programme de suivi des contours d'un objet: à partir de filtrage élémentaires faits en vision précoce, la connaissance des probabilités a priori des différentes configurations permettra de faire une estimation au sens du maximum de vraisemblance des points caractéristiques. Ensuite, un algorithme déterminera par des techniques d'optimisation du choix des voisinages à étudier [Merlo] le suivi du contour, à partir d'un modèle stochastique d'évolution de ce dernier.

Références

- Azencott R.
Image analysis and markov fields
Proc. ICIAM 1987 Paris
- Bouthemy P.
Estimation of edge motion based on local modeling
SPIE vol. 595, Computer Vision for Robots, Cannes
dec.85, pp 162-169
- Cheeseman P.
A method of computing generalized Bayesian probability
values for expert systems
Proc. 8th IJCAI, Karlsruhe, W. Germany, pp 198-202, 1983
- Gagalowicz A., Monga O.
A new approach for image segmentation
8th ICPR 1986
- Gambotto J.P., Monga O.
A parallel and hierarchical algorithm for region growing
CVPR 85 San Francisco
- Geman S., Geman D.
Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the bayesian
restoration of images
IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence,
PAMI-9, n°2, nov 84
- Merlo X.
Techniques probabilistes d'intégration et de contrôle de la
perception, en vue de son exploitation par le système de
décision d'un robot
Ph.D. thesis, INPL Nancy & ETCA, July 88
- Merlo X., Zavidovique B.
Subsymbolic techniques for perception systems control
ASILOMAR 88, Monterey, Ca
- Wilson K.G.
The renormalization group and bloc spins: the Boltzmann
medal address
Publishing House of the Hungarian Academy of Science

