PROPAGATION DE L'AUTOCORRELATION VERTICALE EN GUIDE D'ONDE ALEATOIRE DANS L'APPROXIMATION PARABOLIQUE*.

X. CRISTOL

THOMSON SINTRA ASM, B.P. 53, 06801 - CAGNES SUR MER

* Etude financée par la DRET

RESUME

Une équation de propagation de l'autocorrélation verticale du champ acoustique en guide d'onde aléatoire dans l'approximation de propagation paraxiale est proposée. Cette équation constitue une extension du formalisme de propagation "markovienne" introduit par Tatarskii.

ABSTRACT

An equation for the vertical coherence of a paraxial acoustic field is developped. This equation is an improved version of the equation introduced by Tatarskii and based on a Markovian propagation approximation.

INTRODUCTION

Le problème que nous nous proposons de traiter est celui de la propagation de l'autocorrélation verticale de la pression acoustique dans les guides d'ondes inhomogènes de l'acoustique sous-marine, en présence de fluctuations aléatoires de célérité du son (ondes internes ...). Notre approche, située dans la lignée inaugurée par Tatarskii et Klyastin (milieux statistiquement homogènes) et perpétuée notamment par Felsen, Mazar, Tappert, Frankenthal ..., repose sur les hypothèses de départ suivantes :

- 1 - Le carré de l'indice de réfraction est de la forme : $n^2\ (x,z) = n_s{}^2\ (z) + \mu(x,z)$ (axe horizontal : Ox ; axe vertical : Oz) où $n_s{}^2\ (z)$ désigne la moyenne de $n^2\ (x,z)$ et où la partie fluctuante $\mu(x,z)$ constitue un processus aléatoire que nous supposerons centré ($<\mu(x,z)> = 0$) et gaussien (moments d'ordre impair nuls) ; moments d'ordre pair :

$$<\mu(x_1,z_1)\ \dots\ \mu(x_{2k},z_{2k})> = \sum <\mu(x_{i_1} z_{j_1})\ \mu(x_{j_1} z_{j_1})>$$

$$<\mu(x_{i_1} z_{i_1})\ \mu(x_{j_2} z_{j_2})> \dots <\mu(x_{i_k}, z_{i_k})\ \mu(x_{j_k},\ z_{j_k})>$$

où Σ désigne la sommation sur l'ensemble des partitions de l'ensemble de points $\{(x_1,\ z_1)\ \dots$ $(x_{2k},\ z_{2k})\}$ en paires $\{((x_{i_1},\ z_{i_1}),(x_{j_1},\ z_{j_1})),\ \dots,$ $((x_{i_k},z_{i_k}),\ (x_{j_k},\ z_{j_k}))\}$.

Cette hypothèse permet d'exploiter le théorème de Novikov-Furutsu :

$$<\mu(x,z)\ \Phi[\mu]> = \int dx' \int dz' <\mu(x,z)\mu(x',z')><\frac{\delta\ \Phi[u]}{\delta\ \mu(x',z')}>$$

pour toute fonctionnelle Φ appliquée au processus $\mu(x,z)$. Nous désignerons par Γ_n une échelle de corrélation horizontale de μ ($<\mu(x,z)\ \mu(x',z')> = 0$ pour $|x-x'| > \Gamma_n$). Les fluctuations sont de faible amplitude ($<\mu^2> << 1$).

- 2 - Pour chaque réalisation de $\mu(x,z)$, le champ acoustique est supposé régi par l'équation parabolique classique :

$$2ik_o \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k_o^2(n_o^2(z) + \mu(x,z) - 1)\ \psi(x,z) = 0 \qquad (1)$$

avec :

$$p(x,z,t) \approx \frac{e^{i(k_o x-\omega t)}}{\sqrt{x}}\ \psi(x,z)$$

Nous nous intéresserons à des distances de propagation en x grandes devant des échelles spatiales de variation de toutes les fonctions entrant en jeu (ou devant leurs échelles de corrélations pour les fonctions aléatoires), en particulier devant l'échelle L_h de corrélation des fluctuations de célérité du son.

La distribution-source initiale $\psi(x_o,z) = F_s(z)$ est supposée déterministe.

Nous utiliserons la pseudo "Fonction de Green" $G(x,z;x',z')$ définie par :

$$2ik_o \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z^2} + k_o^2(n_o^2(z) + \mu\ (x,z)-1)\ G(x,z;x',z') = 0$$

et $G(x',z;x',z') = \delta(z-z')$

qui permet d'exprimer la distribution de pression acoustique en tout point (x,z) en fonction de la distribution dans un plan "initial".

$$\psi(x,z) = \int dz'\ G(x,z;x',z')\ \psi(x',z')$$

1. PROPAGATION DE LA COHERENCE VERTICALE

Une équation de propagation de la cohérence verticale Γ :

$$\Gamma(x,z_1,z_2) = <\psi(x,z_1)\psi^*(x,z_2)>$$

se construit en multipliant par $\psi^*(x,z_2)$ l'équation parabolique (1) appliquée à $\psi(x,z_1)$, puis en multipliant par $\psi(x,z_1)$ l'équation (1) appliquée à $\psi(x,z_2)$ et soumise à l'opérateur "conjugué" $(.^*)$ et enfin en appliquant à la différence entre les deux équations ainsi obtenues l'opérateur $<.>$:

$$(2) \qquad z_i k_o \frac{\partial\Gamma}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\Gamma + k_o^2(n_o^2(z_1)$$
$$- n_o^2(z_2))\Gamma\ (x,z_1,z_2) + k_o^2 < (\mu(x,z_1)$$
$$- \mu(x,z_2)\ \psi(x,z_1)\ \psi^*(x,z_2)> = 0$$

Outre la cohérence verticale Γ, cette équation fait intervenir le moment :

$$<(\mu(x,z_1)-\mu(x,z_2))\psi(x,z_1)\psi^*(x,z_2)>.$$

La relation qui, à toute réalisation de $\mu(x,z)$, associe la valeur correspondante de ψ en un point donné quelconque (x_1,z_1) est du type "Fonctionnelle" et le théorème de Novikov-Furutsu nous permet d'écrire :

$$\langle\mu(x,z_1)\psi(x,z_1)\psi^*(x,z_2)\rangle = \int dx' \int dz' \langle\mu(x,z_1)\mu(x',x')\rangle$$

$$\left(\langle \frac{\delta\psi(x,z_1)}{\delta\mu(x',z')}\psi^*(x,z_1)\rangle + \langle\psi(x,z_1)\frac{\delta\psi^*(x,z_2)}{\delta\mu(x',z')}\rangle\right)$$

La dérivée variationnelle $\frac{\delta\psi(x,z)}{\delta\mu(x',z')}$ vérifie l'équation:

$$2ik_o \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\psi(x,z)}{\delta\mu(x',z')} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\delta\psi(x,z)}{\delta\mu(x',z')}$$

$$+ k_o^2(n_o^2(z) + \mu(x,z) - 1)\frac{\partial\psi(x,z)}{\delta\mu(x',z')}$$

$$+ k_o^2\,\delta(x-x')\delta(z-z')\psi(x,z) = 0$$

qui s'identifie au système :

(3) $$2ik_o\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k_o^2\,(n_o^2(z) + \mu(x,z)-1)\,F = 0$$

avec : $F(x',z\,;x',z') = i\,\frac{k_o}{2}\,\delta(z-z')\psi(x',z')$

$$\frac{\partial\psi(x,z)}{\delta\mu(x',z')} = H(x-x')F(x,z;x',z')$$

$H(x)$ = Fonctionnelle de Heaviside

L'équation (3), est identique à l'équation de définition de la pseudo-fonction de Green G, au terme multiplicatif $i\,\frac{k_o}{2}\,\psi(x,z)$ près, d'où :

$$\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial\mu(x',z')} = i\,\frac{k_o}{2}\,H(x-x')\,\psi(x',z')\,G(x,z;x',z')$$

L'équation (2) de propagation de l'autocorrélation du champ acoustique se ramène à la forme suivante :

(4)

$$2ik_o\frac{\partial\Gamma}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\Gamma + k_o^2(n_o^2(z_1) - n_o^2(z_2)\,\Gamma(x,z_1,z_2)$$

$$+ i\,\frac{k_o^3}{2}\int_{x_o}^{x}dx'\int dz'(\langle\mu(x,z_1)\,\mu(x',z')\rangle - \langle\mu(x,z_2)\mu(x',z')\rangle)$$

$$(\langle G(x,z_1;x',z')\psi(x',z')\psi^*(x,z_2)\rangle$$

$$- \langle G^*(x,z_2;x',z')\psi(x',z')\psi(x,z_1)\rangle) = 0$$

2. APPROXIMATION HAUTE FREQUENCE

Le domaine d'intégration en x', $[x_o,x]$, peut être remplacé par $[x-L_h,x]$. L'approche de Tatarskii revient à supposer que pour toute réalisation de μ, une échelle de variation selon x de G et de ψ est grande devant L_h, de façon à pouvoir remplacer dans l'intégrale $G(x,z;x';z')$ par $G(x,z;x,z')$ $(=\delta(x-z'))$ et $\psi(x',z')$ par $\psi(x,z')$ (soit le premier terme d'un développement de Taylor de G et ψ au voisinage de x) :

(5) $$2ik_o\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\Gamma$$

$$= k_o^2(n_o^2(z_1) - n_o^2(z_1))\Gamma(x,z_1,z_2)$$

$$+ i\,\frac{k_o^3}{2}\,\Gamma(x,z_1,z_2)\int_{x_o}^{x}dx'(\langle\mu(x,z_1)\mu(x',z_1)\rangle$$

$$+ \langle(\mu(x,z_2)\mu(x',z_2)\rangle - \langle\mu(x,z_1)\mu(x',z_2)\rangle$$

$$- \langle(\mu(x,z_2)\mu(x',z_1)\rangle) = 0$$

Un simple changement de fonction inconnue permet de ramener l'équation (5) à une forme où les termes $\partial^2/\partial_z{}^2$ sont changés en termes du premier ordre ; définissons la fonction $I(x,z,\theta)$:

(6) $$I(x,z,\theta) = \frac{k_o}{2\pi}\int dz\,e^{-ik_o\theta\zeta}\,\Gamma\left(x,z-\frac{\zeta}{2}\,,\,z+\frac{\zeta}{2}\right)$$

où θ a le sens d'un angle de propagation par rapport à l'axe horizontal. Pour des angles θ "suffisamment" faibles ($\theta < 15° - 20°$), $I(x,z,\theta)$ peut être identifié à la densité angulaire de flux de puissance moyenne ("specific intensity").

Par définition (il suffit d'inverser la transformée de Fourier (6) et de se placer au point $\zeta = 0$), l'intensité moyenne apparaît comme l'intégrale selon la variable θ de I :

$$\langle|\psi(x,y)|^2\rangle = \Gamma(x,z,z) = \int d\theta\,I(x,z,\theta)$$

On vérifie qu'une équation portant sur l'intensité spécifique I, équivalente à l'équation (5), est la suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \theta\,\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{2}\,\frac{dn_o^2}{dx}\,\frac{\partial I}{\partial\theta}$$

$$= \int d\theta' I(x,z,\theta')w_{diffr}(x,z,\theta,\theta')$$

$$- \int d\theta' I(x,z,\theta')w_{diffu}(x,z,\theta,\theta')$$

Le noyau w_{diffr} de diffraction :

$$w_{diffr}(x,z,\theta)$$

$$= i\frac{k_o^2}{4\pi}\int d\,e^{ikq_oz}\left\{n_o^2\left(z-\frac{\zeta}{2}\right) - n_o^2\left(z+\frac{\zeta}{2}\right) + z\,\frac{dn_o^2}{dz}\right\}$$

s'annule dans le cas d'un $n_o{}^2(x)$ linéaire ou quadratique ; dans le cas général d'un $n_o{}^2(x)$ quelconque, le fait que w_{diffr} soit d'ordre 2 en $1/k_o$ permet de négliger le terme $\int d\theta' I(x,z,\theta')w_{diffr.}(x,z,\theta-\theta')$ devant le terme de "réfraction" $1/2\ dn_o{}^2/d_z$ I lorsque $k_o \to \infty$.

Quant au noyau de diffusion w_{diffu}, il peut être dans l'hypothèse de haute fréquence ramené à une forme "locale" :

$$w_{diffu}(x,z,q)$$

$$= \frac{k_o^3}{8\pi}\int d\,e^{ik_oqz}\int_{x_o}^{x}d\xi\Big\{\langle\mu(x,z-\frac{\zeta}{2})\mu(\xi,z+\frac{\zeta}{2})\rangle$$

$$+ \langle\mu(x,z+\frac{\zeta}{2})\rangle\mu(\xi,z+\frac{\zeta}{2})\rangle - \langle\mu(x,z-\frac{\zeta}{2})\rangle\langle\mu(x,z+\frac{\zeta}{2})\rangle$$

$$- \langle\mu(x,z+\frac{\zeta}{2})\mu(x,z-\frac{\zeta}{2})\rangle\Big\} = \sigma(x,z)\,\delta(q) - \Sigma(x,z,q)$$

Avec :

$$\begin{cases} \Sigma(x,z,q) \\ = \dfrac{k_o^3}{16\pi}\displaystyle\int d\,e^{ik_oq}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\Big\{\langle\mu\left(x,z-\frac{\zeta}{2}\right)\mu\left(\xi,z+\frac{\zeta}{2}\right)\rangle \\ + \langle\mu\left(x,z+\frac{\zeta}{2}\right)\mu\left(\xi,z+\frac{\zeta}{2}\right)\rangle\Big\}\quad \sigma(x,z) = \displaystyle\int dq\,\Sigma(x,z,q) \end{cases}$$

Le problème se ramène à la forme classique d'une équation de transport diffusif :

(7)

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \theta\,\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{dn_o^2}{dx}\,\frac{\partial I}{\partial\theta} = -\,\sigma_{(x,z)}I(x,z,\theta)$$

$$+ \int d\theta'\,\Sigma(x,z,\theta-\theta')I(x,z,\theta')$$

(l'effet d'atténuation volumique peut être introduit par l'ajout au terme de droite de $-\sigma_{att}(x,z)I(x,z,\theta)$).

La question de la validité de la série d'approximatives pratiquées ci-dessus n'est pas simple. Les conditions de validité prévues par Tatarskii dans le cas de milieux statistiquement homogènes, déjà sévères, ne peuvent être transposées dans le cas de milieux inhomogènes que de façon locale, ou dans des repères particuliers (au voisinage de rayons "moyens") ; une condition de validité de l'approximation de propagation paraxiale (Tatarskii, Hill) proposée est :

$$\frac{(x-x_o)\ \lambda_o^3}{l} \ll 1$$

(où l est la plus petite échelle spatiale de variation de μ), ce qui restreint le domaine d'application de (5) aux hautes fréquences. Une condition supplémentaire, basée sur des considérations plus phénoménologiques (Watson, Flatté), est : I varie faiblement sur des distances de l'ordre de λ_o et de L_h soit :

$$\sigma\,\lambda_o \ll 1, \quad \sigma\, L_h \ll 1.$$

3. EXTENSION AU DOMAINE DES BASSES FREQUENCES

En exploitant la relation $\psi(x',z') = \int dz''\, G^*(x,z'';x',z')\psi(x,z'')$, l'équation (4) peut être mise sous la forme suivante :

$$2ik_o\frac{\partial\,\Gamma}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\Gamma$$

$$+k_o^2(n_o^2(z_1)n_o^2(z_2))\ \Gamma(x,z_1,z_2)$$

$$+i\,\frac{k_o^3}{2}\int_{x_o}^{x} dx' \int dz'' \int dz'(\langle\mu(x,z_1)\mu(x',z')\rangle$$

$$-(\langle\mu(x,z_2)\mu(x',z')\rangle)$$

$$(\langle G(x,z_1;x',z')G^*(x,z'';x',z')\psi(x,z'')\psi^*(x,z_2)\rangle$$

$$-\ \langle G(x,z'';x',z')G^*(x,z_2;x',z')\psi(x,z_1)\psi^*(x,z'')\rangle\rangle$$

$$=0$$

En $x' = x$, la pseudo-fonction de Green G est déterministe ; pour $x-x' \geq L_h$, $G(x,z;x',z')$ et $\psi(x,z'')$ sont décorrélés ; dans les deux cas :

$$(9)\quad \langle G(x,z_1;x',z')G^*(x,z'';x',z')\psi(x,z'')\psi^*(x,z_2)\rangle = \langle G(x,z_1;x',z')G^*(x,z'';x',z')\rangle\langle\psi(x,z'')\psi^*(x,z_2)\rangle$$

Sur l'intervalle $]x-L_h,x[$, cette relation n'est pas vérifiée de façon rigoureuse ; cependant la contribution au terme intégral de l'équation (8) de la différence entre $\langle GG^*\psi\psi^*\rangle$ et $\langle GG^*\rangle\langle\psi\psi^*\rangle$ sera d'autant plus faible que l'amplitude $\langle\mu^2\rangle$ des fluctuations d'indice, l'échelle L_h d'autocorrélation horizontale et la fréquence seront petites, et pourra, selon les valeurs de ces paramètres, être considérée comme une petite perturbation ou même être négligée.

Dans ce dernier cas, nous pourrons fermer l'équation (8) et construire une équation complète (mais malheureusement non linéaire) de propagation de : $\langle G(x,z_1;x_o,z_o)\ G^*(x,z_2;x_o,z_o)\rangle$:

$$\left\{2ik_o\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + k_o^2(n_o^2(z_1) - n_o^2(z_2))\right\}$$

$$\langle G(x,z_1;x_o,z_o)G^*(x,z_2;x_o,z_o)\rangle \quad =$$

$$-\,i\,\frac{k_o^3}{z}\int_{x_o}^{x'} dx' \int dz'' \int dz'(\langle\mu(x,z_1)\mu(x',z')\rangle$$

$$-\ \langle\mu(x,z_2)\mu(x',z')\rangle)$$

$$(\langle G(x-x'+x0,z1;x0,z')G^*(x-x'+x0,z'';x0,z')\rangle$$
$$\langle G(x,z'';x0,z0)G^*(x,z2;x0,z0)\rangle$$

$$-\langle G(x-x'+x0,z'';x0,z')G^*(x-x'+x0,z2;x0,z')\rangle$$
$$\langle G(x,z1;x0,z0)G^*(x,z'';x0,z0)\rangle)$$

pour le cas d'un milieu "statistiquement stratifié" $(\langle\mu(x,z)\mu(x',z')\rangle = F(|x-x'|,z,z'))$.

Pour des valeurs "suffisamment" petites de $\langle\mu^2\rangle$, L_h et k_o, une approximation supplémentaire peut être appliquée : remplacer, sur l'intervalle $]x-L_h,x[$, le moment $\langle G(x,z_1;x',z')G^*(x,z'';x',z')\rangle$ par $G_o(x,z_1;x',z')G_o{}^*(x,z'';x',z')$ où G_o est la pseudo-fonction de Green associée au cas où $\mu = 0$, solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} 2ik_o\,\dfrac{\partial G_o}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 G_o}{\partial z_2} + k_o^2 n_o^2(z)\ G_o(x,z;x',z') \quad = 0 \\ \qquad\qquad G_o(x',z';x',z') = \delta(z-z') \end{array}\right\}$$

Une équation de propagation de $\langle\Gamma\rangle$ est alors :

$$2ik_o\,\frac{\partial\langle\Gamma\rangle}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\langle\Gamma\rangle + k_o^2(n_o^2(z_1)$$

$$-\ n_o^2(z_2))\langle\Gamma(x,z_1z_2)\rangle + i\frac{k_o^3}{2}\int dz''\ \langle\Gamma(x,z'',z_2)\rangle$$

$$\int_{x_o}^{x} dx' \int dz' \left(\langle\mu(x,z_1)\mu(x',z')\rangle - \langle\mu(x,z_2)\mu(x',z')\rangle\right)$$

$$G_o(x,z_1;x',z')G_o^*(x,z'';x',z') - i\,\frac{k_o^3}{2}\int dz''\langle\Gamma(x,z_1,z'')\rangle$$

$$\int_{x_o}^{x} dx' \int dz' \left(\langle\mu(x,z_1)\mu(x',z')\rangle - \langle\mu(x,z_1)\mu(x',z')\rangle\right)$$

$$G_o(x,z'';x',z')G_o^*(x,z_1;x',z')G_o^*(x,z_1;x',z') \simeq 0$$

Ce type d'approximation s'identifie aux procédures de fermeture du type Bourret et l'équation (9) constitue dans cette optique la plus simple de toute une série de formes approchées de l'équation (8), qui n'est elle-même que la première d'une série d'équations ("hierarchy equations") portant sur des moments d'ordre 2, 4, 16 ...

Si nous décomposons Γ et G_o sur la base des modes normaux "paraboliques" $\{U_n,\ k_n\}$ (solutions du problème de fonctions propres :

$$\frac{d^2U_n}{dz^2} + k_o^2(n_o^2(z)-1)U_n(z) = 2k_ok_nU_n(z)\ ;$$
$$+\ \text{cond. limites}$$

$$\text{orthonormalisation :}\ \int dz\ U_n(z)U_{n'}(z) = \delta_{nn'}\ :$$

$$\Gamma(x,z_1,z_2) = \sum_m \sum_{m'} A_{mm'}(x)e^{i(k_m-k_{m'})} \times U_m(z_1)\ U_{m'}(z_2)$$

$$G_o(x,z;x',z') = \sum_m U_m(z')\ U_m(z)\ e^{ik_m(x-x')}$$

l'équation (9) se ramène au système :

$$(10)\quad \frac{dA_{mm'}}{dx} = -\sum_n \sum_{n'} W_{\substack{mm'\\nn'}}(x)\ A_{nn'}(x) \quad \text{pour tout m et m'}$$

avec :

$$W_{\substack{mm'\\nn'}}(x)$$

$$\simeq \frac{k_o^2}{8} e^{i(k_{n'}-k_n)x}\Big(\sum_j e^{i(k_j-k_{m'})}\int dz_1 U_n(z_1)U_m(z_1)$$

$$\int dz_2 U_{n'}(z_2)U_j(z_2)\int dz' U_j(z')U_{m'}(z')$$

$$\mathcal{F}(k_j-k_{m'},z_1,z_2,z')\Big)$$

$$-\sum_j e^{i(k_j-k_m)x}\int dz_1 U_n(z_1)U_j(z_1)$$

$$\int dz_2 U_{n'}(z_2)U_{m'}(z_2)\int dz' U_j(z')U_m(z')$$

$$\mathcal{F}(k_j-k_{m'},z_1,z_2,z')\Big)$$

$$\mathcal{F}(k,z_1,z_2,z') = \int_{-\infty}^{+\infty}dx'\ e^{-ikx'}\Big\{\langle\mu(x,z_1)(\mu(x',z')\rangle$$

$$-\langle\mu(x,z_2\mu(x',z')\rangle\Big\}$$

A <u>haute fréquence</u>, si l'échelle L_h est suffisamment petite pour que les effets de réfraction soient négligeables, l'autocorrélation de G_o peut être approchée par :

$$G_o(x,z_1;x',z')G_o^*(x,z_2;x',z') \simeq \frac{k_o}{2\pi}\int d\theta\ e^{ik_o\theta(z_1-z_2)}$$

$$\delta\left(\frac{z_1+z_2}{z} - \theta(x-x')-z'\right)$$

et l'équation (9) peut être mise sous la forme :

$$2ik_o\frac{\partial\Gamma}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\Gamma + k_o^2(n_o^2(z_1)-n_o^2(z_1))\ \Gamma(x,z_1,z_2)$$

$$+\ i\frac{k_o^4}{4\pi}\int dz''\langle\Gamma(x,z'',z_2)\rangle\int_{x_o}^{x}dx'\int d\theta\ e^{ik_o\theta(z_1-z'')}$$

$$\Big\{\langle\mu(x,z_1)\mu(x',\frac{z_1+z''}{z} - \theta(x-x'))\rangle$$

$$-\langle\mu(x,z_2)\mu(x',\frac{z_1+z''}{z} - \theta(x-x'))\rangle\Big\}$$

(11)

$$-\ i\frac{k_o^4}{4\pi}\int dz''\langle\Gamma(x,z_1,z'')\rangle\int_{x_o}^{x}dx'$$

$$\int d\theta\ e^{ik_o\theta(z''-z_2)}$$

$$\Big\{\langle\mu(x,z_1)\mu(x',\frac{z_2+z''}{z} - \theta(x-x'))\rangle$$

$$-\langle\mu(x,z_2)\mu(x',\frac{z_2+z''}{z} - \theta(x-x'))\rangle\Big\} \simeq 0$$

Une équation de transport, équivalente à (11), est la suivante :

(11')

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \theta\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{dn_o^2}{dz}\frac{\partial I}{\partial\theta}$$

$$= \int d\theta' w_{diffr}(x,z,\theta-\theta')I(x,z,\theta')$$

$$-\int dz'\int d\theta' w_{diffu}(x,z,z',\theta')I(x,z-\frac{z'}{2},\theta')$$

où I est la densité de flux moyen défini par la relation (6) et ou le noyau de diffusion $w_{diffu.}$:

$$w_{diffu.}(x,z,z'q)$$

$$= \frac{k_o^2}{4}\int d\theta' e^{-ik_o\theta'\zeta}\int_{xo}^{x}dx'\ \Big[\frac{k_o}{2\pi}\int dq\ e^{ik_o(q-\theta')z'}$$

$$(\langle\mu(x,z-\frac{\zeta}{2})\mu(x',z+\frac{3}{2}+\frac{z'}{z}-q(x-x'))\rangle$$

$$-\langle\mu(x,z+\frac{\zeta}{2})\mu(x',z+\frac{3}{2}+\frac{z'}{2}-q(x-x'))\rangle)$$

$$-\frac{k_o}{2\pi}\int dq\ e^{ik_o(q-\theta')z'}$$

$$(\langle\mu(x,z-\frac{\zeta}{2})\mu(x',z-\frac{\zeta}{2}-\frac{z'}{z}-q(x-x')\rangle$$

$$-\langle\mu(x,z+\frac{3}{2})\mu(x',z-\frac{3}{2}-\frac{z'}{2}-q(x-x'))\rangle)\Big]$$

établit un couplage non plus local et seulement angulaire des variations de I, mais étendu à tout l'axe vertical.

CONCLUSION

L'approche classique (II) repose sur une approximation particulièrement "brutale" : il s'agit de remplacer dans une intégrale deux fonctions par leur valeur en un point particulier du domaine d'intégration ; l'opération est d'autant plus périlleuse que les fonctions en question sont des fonctions aléatoires dont on ne peut espérer connaître que des moments statistiques.

Le domaine de validité, difficile à cerner de façon vraiment convaincante dans le cas général d'un milieu inhomogène, semble se restreindre aux hautes fréquences et aux milieux faiblement fluctuants.

L'approche que nous proposons (III), basée sur des formes approchées du moment d'ordre 4 $\langle GG^*\psi\psi^*\rangle$, nous semble plus féconde. Le poster associé à cet article porte sur l'application de ce formalisme à la propagation en océan perturbé par des ondes internes (résolution numérique par des équations (5'), (10) et (11'), analyse des conditions de validité).

BIBLIOGRAPHIE

TATARSKII V.I. — The effect of the turbulent atmosphere on wave propagation. Keter (Jerusalem) 1971.

MAZAR R., FELSEN L.B. — "High frequency coherence functions propagated along ray paths in the homogeneous background of a weakly random medium". J. Acoust. Soc. Am. 81(4) (Part I) April 1987, 82(2) (Part II) August 1987.

HILL R.J. — "A stochastic parabolic wave equation and field moment equations for random media having spatial variations of mean refraction index". J. Acoust. Soc. Am. 77(5), May 1985.

WILSON H.L., TAPPERT F.D. — "Acoustic propagation in random oceans using the radiation transport equation". J. Acoust. Soc. Am. 66(1), July 1979.

Marché DRET 88/C57/182 — "Propagation dans un milieu diffusant par méthode Monté Carlo".