TREIZIÈME COLLOQUE GRETSI - JUAN-LES-PINS DU 16 AU 20 SEPTEMBRE 1991

CLASSES DE LOIS DE PROCESSUS AR NON GAUSSIENS

Jean-Yves TOURNERET - Bernard LACAZE

GAPSE / ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France

RÉSUMÉ

On admet généralement que la sortie d'un filtre autorégressif possède une loi asymptotiquement gaussienne. Cette "propriété" s'appuie généralement sur une utilisation intuitive et abusive du théorème de la limite centrale. Le but de cet article est de démontrer que cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée et d'étudier en fonction du bruit d'entrée la loi de la sortie du filtre considéré.

Dans un premier temps, on considère des excitations à support borné puis on étend cette étude au cas où le bruit d'entrée est à support non borné.

ABSTRACT

The AR filter output is generally assumed to follow a gaussian law asymptotically. This "property" is based on an intuitive utilisation of the Central Limit Theorem. The aim of this paper is to show that this hypothesis may not always be true and to study, as a function of input noise law, the AR filter output probability density.

First, independent bounded set excitations are considered. Then the case of no bounded set input noise is studied.

1- INTRODUCTION

La sortie x(n) d'un filtre linéaire causal peut se mettre sous la forme $x(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} h_k b(n-k)$, b(n) étant l'entrée du filtre considéré (Cf §2). Elle apparait donc comme étant une somme infinie de variables aléatoires indépendantes, de même loi, mais de variances différentes. Le théorème de la limite centrale ne peut donc s'appliquer. Les hypothèses des théorèmes de Liapounov ou de Lindeberg [1] n'étant pas vérifiées, nous ne possédons pas de théorème permettant de déterminer quand la loi asymptotique de la sortie du filtre est gaussienne.

Pour résoudre ce problème, nous étudions dans un premier temps les excitations à support borné et nous montrons alors que la sortie d'un filtre autorégressif ne peut jamais être asymptotiquement gaussienne. Puis nous nous intéressons aux excitations à support non borné et nous montrons que la loi de l'entrée du filtre doit vérifier des conditions très particulières pour que la sortie soit asymptotiquement gaussienne.

2- ENTREE A SUPPORT BORNE

La sortie x(n) d'un filtre AR causal d'ordre p, de transmittance $\frac{1}{A(z)}$, de réponse impulsionnelle h_k et d'entrée b(n), se présente dans le cas général sous la forme :

$$x(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} h_k b(n-k) \qquad (2.1)$$

avec :

$$h_k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{ij} k^j r_i^k \qquad (2.2)$$

r_i étant une racine de A(r)=0, et α_{ij} une constante. On notera que la convergence des p^2 séries $\sum_{k=0}^{+\infty} k^j |r_i|^k$ est immédiate si les pôles du modèle r_i sont à l'intérieur du cercle unité ce qui est indispensable pour des raisons de stabilité.

Supposons que b(n) soit un bruit à support borné [min,max]. On a alors :

$$|x(n)| \leq \max . \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{p-1} |\alpha_{ij}|\,|k^j|\,|r_i|^k \qquad (2.3)$$

Les pôles du filtre AR étant strictement à l'intérieur du cercle unité, les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} k^j \, | r_i |^k$ convergent et donc la sortie est à support borné ce qui lui interdit théoriquement d'avoir un caractère gaussien.

2.1 Entrée blanche binaire équiprobable

Soit un filtre AR d'ordre p défini par ses paramètres a_k excité par un bruit blanc binaire unité b(n) (prenant les valeurs +1 et -1) équiprobable. On note x(n) la sortie de ce filtre qui est alors définie par l'équation récursive suivante :

$$b(n) = \sum_{k=0}^{p} a_k x(n-k) \qquad \text{avec } a_0 = 1 \qquad (2.4)$$

En utilisant les coefficients h(k) de la réponse impulsionnelle du filtre considéré, on obtient en inversant le système d'équations récursives (2.4) :

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k b(n-k)} \qquad (2.5)$$

Le bruit excitateur étant blanc, les variables aléatoires b(n) sont non corrélées. On suppose de plus qu'elles sont indépendantes et on a alors :

$$E[e^{itx(n)}] = E\left[e^{it \sum_{k=0}^{+\infty} h_k b(n-k)} \right] = \prod_{k=0}^{+\infty} E[e^{ith_k b(n-k)}]$$

En notant g(t) la fonction caractéristique de x(n) et G(x) sa densité de probabilité, on obtient :

$$\boxed{g(t) = \prod_{k=0}^{+\infty} \cos(h_k t) \Leftrightarrow G(x) = \prod_{k=0}^{+\infty} * B\left(\frac{x}{h_k}\right)} \qquad (2.6)$$

avec $B(x) = \frac{1}{2}[\delta(x+1) + \delta(x-1)]$, $\delta(x)$ étant la distribution de Dirac.

La nature de la loi de la sortie du filtre AR dépend de la valeur des paramètres autorégressifs mais dans tous les cas cette sortie n'est pas gaussienne. Plus précisément, on peut donner les résultats suivants :

2.1.1 Cas de l'ordre 1

Selon les valeurs des paramètres autorégressifs, la loi de la sortie du filtre est purement singulière, ou absolument continue [2] et plus particulièrement :

Pour $0 < | a_1 | < 0.5$, G(x) est purement singulière.

Pour $0.5 \leq | a_1 | < 1$, G(x) est absolument continue.

Notons que G(x) est uniforme si et seulement si a1=0.5.

Nous avons approximé les densités de probabilité du signal x(n) dans ces différents cas par les deux méthodes suivantes :

1. Calcul de la fonction caractéristique de x(n) (avec troncature du produit infini) puis transformée de Fourier inverse
2. Simulation

Ces résultats concordent [3] et nous présentons sur la page suivante les résultats obtenus par simulation. (Fig 1.a à 1.d)

2.1.2 Cas des ordres supérieurs

De la même façon qu'à l'ordre 1, la sortie est purement singulière ou absolument continue mais on ne sait pas déterminer quels paramètres AR donnent tel type de loi. En prenant un pôle très peu amorti par rapport à tous les autres, on peut se ramener à l'ordre 1.

Théoriquement, la loi de sortie n'est jamais asymptotiquement gaussienne (cf §2) mais en pratique, la sortie du filtre autorégressif possède des lois très différentes en fonction des valeurs des paramètres AR. Par exemple, dans le cas de l'ordre 1, plus le paramètre a1 est proche de 1 et plus la sortie se rapproche d'une gaussienne (fig 1.a à 1.d)

Dans le cas d'ordres supérieurs, dès que l'un des paramètres autorégressifs s'éloigne de 0, la loi de sortie se rapproche d'une gaussienne.

2.2 Lois uniforme et binomiale

En théorie, d'après ce qui précède, la sortie d'un filtre autorégressif excité par un bruit à support borné est toujours asymptotiquement non gaussienne.

En pratique, la sortie du filtre autorégressif possède des lois très différentes en fonction des valeurs des paramètres AR. On obtient les mêmes conclusions que pour une loi d'entrée binaire. Dès que l'un des paramètres AR s'éloigne de 0, la loi de sortie se rapproche d'une gaussienne.

Les résultats de simulation suivants illustrent ces différentes propriétés. (Fig 2.a à 3.b)

Loi de la sortie du filtre AR d'ordre 1 pour une entrée <u>binaire</u>

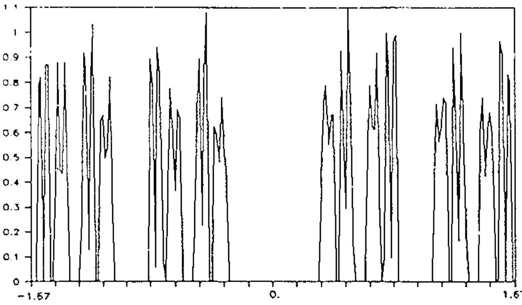

Fig 1.a : a1=0.4

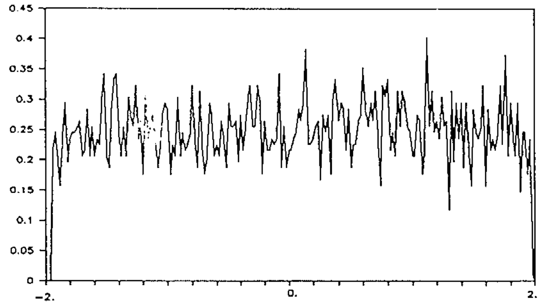

Fig 1.b : a1=0.5

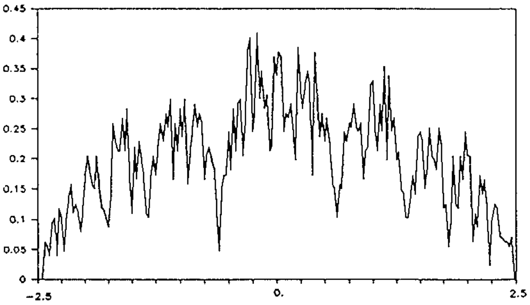

Fig 1.c : a1=0.6

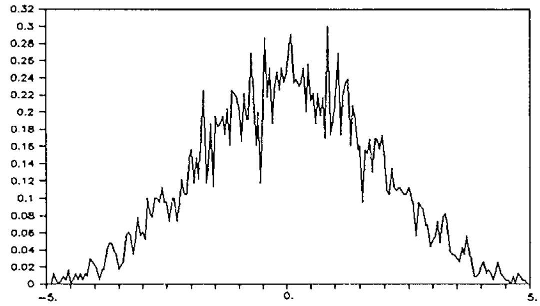

Fig 1.d : a1=0.8

Loi de la sortie du filtre AR d'ordre 3 pour une entrée <u>uniforme</u>

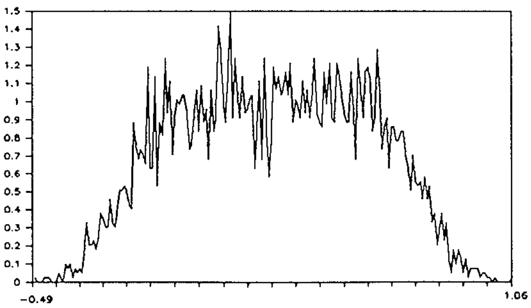

Fig 2.a : a1=0.1
a2=0.2, a3=0.3

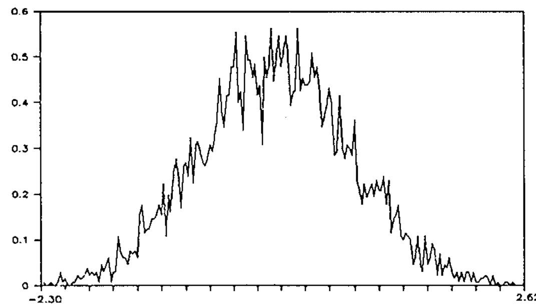

Fig 2.b : a1=0.1
a2=0.2, a3=0.9

Loi de la sortie du filtre AR d'ordre 3 pour une entrée <u>binomiale</u>

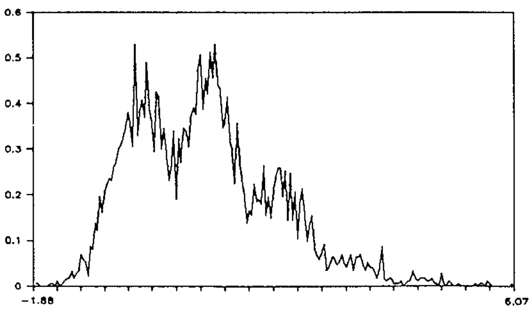

Fig 3.a : a1=0.1
a2=0.2, a3=0.3

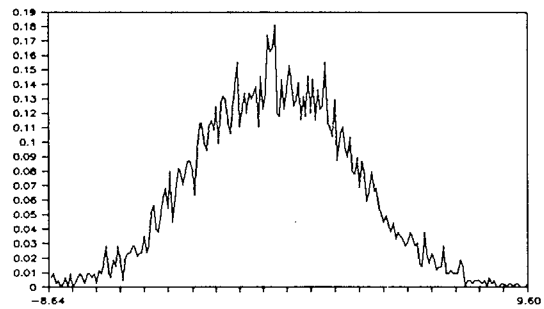

Fig 3.b : a1=0.1
a2=0.2, a3=0.9

<u>Figures 1 à 3 : Comparaison des densités de probabilité des x(n) obtenues par simulation pour différentes valeurs des paramètres autorégressifs a_k et pour différentes lois d'entrée.</u>

3- ENTREE A SUPPORT NON BORNE

Dans le cas où l'entrée est à support non borné, de moyenne nulle, la sortie est également de moyenne nulle et donc si elle suit une loi normale sa fonction caractéristique $\phi(t)$ doit vérifier :

$$\mathrm{Ln}[\phi(t)] = -\frac{\sigma^2 t^2}{2} \qquad (3.1)$$

Dans le cas le plus général d'un filtre autorégressif de réponse imlpulsionnelle $\{h_k\}$ excité par un bruit constitué d'échantillons indépendants b(n), la fonction caractéristique de la sortie du filtre est donnée par :

$$E[e^{itx(n)}] = \prod_{k=0}^{+\infty} E[e^{ith_k b(n-k)}]$$

Pour que la sortie suive une loi normale, un développement limité du logarithme de cette fonction caractéristique autour de zéro doit être de la forme $-\frac{\sigma^2 t^2}{2}$.

Dans le cas où le bruit d'entrée possède un moment d'ordre 4, sa fonction caractéristique $\phi_b(t)$ possède un développement limité de la forme :

$$\phi_b(t) = 1 - \frac{m_2}{2!}t^2 + \frac{m_4}{4!}t^4 + o(t^4) \qquad (3.2)$$

m_2 et m_4 étant les moments respectivement d'ordres 2 et 4 de la variable aléatoire b(n).

On en déduit alors un développement limité de $\mathrm{Ln}\,\phi(t)$:

$$\mathrm{Ln}\,\phi(t) = -\frac{m_2}{2!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^2\right)t^2 + \frac{c_4}{4!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^4\right)t^4 + o(t^4) \qquad (3.3)$$

c_4 étant le cumulant d'ordre 4 de b(n).

Dans la plupart des cas (lois exponentielles, Poisson..), le cumulant d'ordre 4 est non nul et donc comme $\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^4 > 0$,

le développement limité de $\phi(t)$ n'a pas la forme voulue. <u>La loi de sortie du filtre n'est donc pas asymptotiquement gaussienne.</u>

Si le cumulant d'ordre 4 de b(n) est nul, il faut alors supposer que le moment d'ordre 6 de b(n) existe et faire un dévéloppement limité de sa fonction caractéristique jusqu'à l'ordre 6. On obtient alors pour $\mathrm{Ln}\,\phi(t)$ un terme supplémentaire de la forme :

$$-\frac{c_6}{6!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^6\right)t^6$$

La généralisation se fait de façon évidente.

En pratique, on obtient des résultats analogues au cas d'une entrée à support borné. Dès que l'un des paramètres AR s'éloigne de 0, la loi de sortie du filtre se rapproche d'une gaussienne. Les résultats de simulation suivants obtenus pour une loi de Poisson illustrent cette propriété :

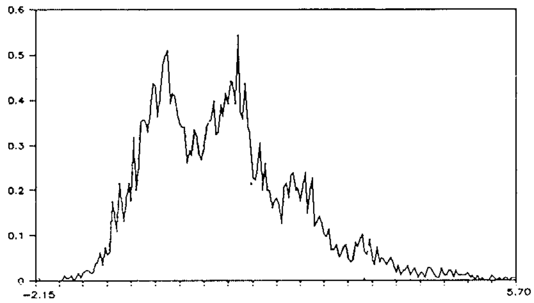

Fig 4.a : a1=0.1
a2=0.2, a3=0.3

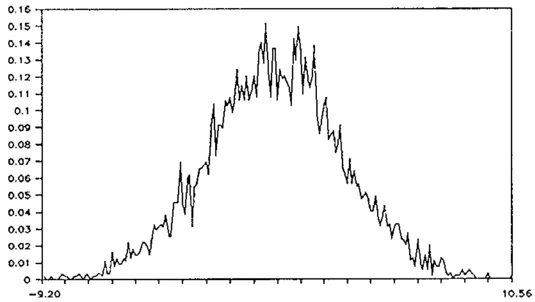

Fig 4.b : a1=0.1
a2=0.2, a3=0.9

<u>Fig 4.a et 4.b : Loi de la sortie d'un filtre AR d'ordre 3 pour une entrée possèdant une loi de poisson</u>

4- CONCLUSION

Cette étude montre que l'hypothèse, souvent admise, selon laquelle la sortie d'un filtre autorégressif suit asymptotiquement une loi gaussienne, n'est pas toujours vérifiée. Le choix des paramètres AR et de la loi d'entrée du filtre s'avèrent déterminants pour la nature de la loi de sortie. Si, dans la plupart des cas, la loi asymptotique de la sortie du filtre se rapproche d'une gaussienne, cet article montre qu'une généralisation est impossible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.Renyi, "calcul des probabilités", Dunod Paris, 1966.

[2] E.Lucaks, "Characteristic functions", Griffin London, 1970.

[3] J-Y.Tourneret, B.Lacaze, "Statistical study of an AR Filter with a binary noise excitation", Digital Signal Conference, Florence, September 1991.