TREIZIÈME COLLOQUE GRETSI - JUAN-LES-PINS DU 16 AU 20 SEPTEMBRE 1991

SUR L'INVERSIBILITÉ DE LA MATRICE DE CORRÉLATION D'UN VECTEUR ALÉATOIRE À COMPOSANTES POLYNOMIALES

P. BONDON, M. BENIDIR, B. PICINBONO

Université de Paris-Sud
Laboratoire des Signaux et Systèmes
ESE-Plateau du Moulon, 91190 Gif sur Yvette, France

RÉSUMÉ

Résumé. On considère un polynôme à plusieurs indéterminées dont les degrés partiels et le degré total sont quelconques, les indéterminées étant des variables aléatoires. Les monômes sont rangés dans un vecteur aléatoire dont on étudie la matrice de corrélation. Nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilté de cette matrice portant sur les propriétés statistiques des variables aléatoires.

ABSTRACT

Abstract. We consider a multidimensional polynomial, with arbitrary degrees and with random variables as arguments. All the terms of this polynomial are arranged to define a random vector for wich we study the correlation matrix. We establish necessary and sufficient conditions for this matrix to be invertible; these conditions are expressed in terms of the statistical properties of the random variables.

INTRODUCTION

L'utilisation des statistiques d'ordre supérieur à deux en traitement du signal s'est beaucoup développée ces dernières années, l'idée étant d'exploiter plus d'informations sur le signal aléatoire que celles contenues dans ses statistiques d'ordre deux. En pratique, on utilise certains moments ou certains cumulants supposés a priori connus ou bien estimés et ceci permet de résoudre, tout au moins partiellement, des problèmes qui sont insolubles en utilisant uniquement des moments d'ordre deux. Par exemple, on peut "quasiment" identifier, sous des conditions assez générales, la phase d'un filtre linéaire invariant dans le temps, dont l'entrée est non gaussienne, au moyen des cumulants d'ordre supérieur à deux de la sortie [1]. On peut aussi s'intéresser à l'extension aux ordres supérieurs de techniques classiques de traitement du signal telles que l'estimation linéaire en moyenne quadratique ou la détection par la méthode du contraste [2]. Les auteurs utilisent alors les mêmes critères qu'à l'ordre deux, par exemple en estimation ils minimisent la variance de l'erreur et en détection ils maximisent la même fonction de contraste et de plus ils conservent la même structure de filtre linéaire. L'unique différence réside dans l'utilisation de certains produits des observations et les auteurs adoptent la terminologie de filtre de Volterra. Ce filtrage étant toujours linéaire par rapport aux paramètres à déterminer, les méthodes de traitement sont identiques à celles mises en oeuvre à l'ordre deux.

En fait, l'étude des moments d'ordre supérieur remonte à de nombreuses années. Comme application en traitement du signal, on peut citer la référence [3] où le problème de l'estimation en moyenne quadratique d'un signal aléatoire au moyen d'un filtre de Volterra d'ordre deux continu dans le temps a été abordé. Pour ce qui concerne le domaine des statistiques, les régressions polynomiales par exemple, sont abordées dans [4]. Enfin plus largement, le problème dit des moments est traité dans [5].

Dans [2], ainsi que dans toutes leurs publications sur le sujet, les auteurs se placent dans l'hypothèse où le temps est discret. Ils définissent un vecteur aléatoire de dimension finie constitué de produits de variables aléatoires (v.a) ainsi que la matrice de covariance R de ce vecteur. Les paramètres à déterminer sont rangés dans un vecteur η et comme le problème est linéaire par rapport à ces paramètres, on aboutit naturellement à la résolution d'une équation normale du type $\psi = R\,\eta$ où ψ est un vecteur fixé. La matrice R est évidemment définie non négative mais, comme dans le cas où l'on n'utilise que des statistiques d'ordre deux, elle n'est pas nécessairement inversible. On peut d'ailleurs montrer facilement que la matrice R définie à partir du formalisme de filtre de Volterra discret utilisé dans [2] n'est pas inversible. En fait, un filtre de Volterra discret d'ordre p n'est rien d'autre qu'un polynôme à plusieurs indéterminées particulier dont le degré partiel par rapport à chaque indéterminée est égal à p et dont le degré total vaut p.

Dans cet article, on considère un polynôme à plusieurs indéterminées dont les degrés partiels et le degré total sont quelconques (le degré total est évidemment inférieur ou égal à la somme des degrés partiels). Les indéterminées sont des v.a et on range tous les monômes dans un vecteur aléatoire **X**. On construit alors la matrice de corrélation K de ce vecteur. A l'ordre deux (ce qui correspond à un polynôme de degré total égal à un), il est connu que K n'est pas inversible si et seulement si (ssi) les v.a sont liées de façon déterministe. Il est intéressant d'étudier la même question aux ordres supérieurs. On constate alors que ce type de problème, quoique formulé différemment, a déjà été abordé dans [5] pour une v.a (ce qui correspond à un polynôme à une indéterminée) et que l'étude des matrices de moments est toujours d'actualité pour les statisticiens [6] et a des applications dans les problèmes de mixture [7]. Ici, après avoir démontré simplement un résultat de [5] valable pour une v.a, nous étudions le cas de plusieurs v.a et nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilté de K portant sur les propriétés statistiques de ces v.a. Nous montrons en particulier que l'introduction de certaines hypothèses de décorrélation d'ordre supérieur à deux entre les v.a permet de caractériser simplement l'inversibilité de K mais que si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, alors il n'y a aucune raison de supposer K inversible. Enfin, on examine l'application de ces résultats aux problèmes de l'estimation polynomiale d'une v.a et d'un paramètre déterministe.

1. Modèle

Soit **x** une variable aléatoire (v.a) vectorielle réelle à n composantes,

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \triangleq (x_1, \ldots, x_n), \tag{1.1}$$

on considère un polynôme $P(\mathbf{x})$ à coefficients réels des n v.a x_i dont le degré partiel par rapport à la v.a x_i est égal à p_i et dont le degré total est au plus égal à p, $p_i \leq p \leq p_1 + \ldots + p_n$,

$$P(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq p_1 \\ i_1 + \ldots + i_n \leq p}} \ldots \sum_{0 \leq i_n \leq p_n} h_{i_1,\ldots,i_n}\, x_1^{\,i_1} \ldots x_n^{\,i_n}. \tag{1.2}$$

Dans le cas particulier où $p_1 = \ldots = p_n = p$, $P(\mathbf{x})$ est un développement de Volterra d'ordre p.
On peut concaténer les coefficients $h_{i_1,\ldots,i_n}$ en un vecteur **H** dont le nombre de composantes $\mathcal{D}(p; p_1, \ldots, p_n)$ est donné en annexe. Il existe donc $\mathcal{D}(p; p_1, \ldots, p_n)!$ possibilités et on en choisit une quelconque. Faisant de même pour les monômes $x_1^{\,i_1} \ldots x_n^{\,i_n}$, (1.2) s'écrit sous la forme,

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{X}. \tag{1.3}$$

On suppose dans la suite que

$$|\mathrm{E}[x_1^{\,i_1} \ldots x_n^{\,i_n}]| < \infty \text{ pour } 0 \leq i_1 \leq 2\,p_1, \ldots, 0 \leq i_n \leq 2\,p_n$$

$$\text{et } i_1 + \ldots + i_n \leq 2\,p. \tag{1.4}$$

***Remarque* 1.** Il est nécessaire de supposer l'existence de tous les moments définis par (1.4) car, contrairement au cas d'une v.a scalaire (n = 1), dans le cas vectoriel, l'existence d'un moment $\mathrm{E}[x_1^{\,i_1} \ldots x_n^{\,i_n}]$ n'implique pas l'existence de tous les moments $\mathrm{E}[x_1^{\,j_1} \ldots x_n^{\,j_n}]$ pour $j_k \leq i_k$, $1 \leq k \leq n$, [8]. Cependant, on peut montrer à partir de l'inégalité de Schwarz que si $0 \leq i_1 + \ldots + i_n \leq 2p$, alors

$$\mathrm{E}[x_1^{\,i_1} \ldots x_n^{\,i_n}]^{2p} \leq \mathrm{E}[x_1^{\,2p}]^{i_1} \ldots \mathrm{E}[x_n^{\,2p}]^{i_n} \tag{1.5}$$

et on en déduit donc qu'une condition suffisante pour que (1.4) soit satisfaite est donnée par

$$\mathrm{E}[x_i^{\,2p}] < \infty \text{ pour } 1 \leq i \leq n. \tag{1.6}$$

Sous l'hypothèse (1.4), les moments d'ordre un et deux de $P(\mathbf{x})$ existent et sont donnés par

$$\mathrm{E}[P(\mathbf{x})] = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{E}[\mathbf{X}], \tag{1.7}$$

$$\mathrm{E}[P(\mathbf{x})^2] = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{K}\, \mathbf{H} \text{ où } \mathrm{K} \triangleq \mathrm{E}[\mathbf{X}\, \mathbf{X}^{\mathrm{T}}]. \tag{1.8}$$

2. Conditions d'inversibilité de K

Dans le lemme 1, on étudie le cas d'une seule v.a et on donne une condition nécessaire et suffisante d'inversibilté de K. Les lemmes 2 et 3 donnent respectivement une condition suffisante et une condition nécessaire d'inversibilté de K dans le cas d'un vecteur aléatoire. Enfin la propriété est une conséquence directe des lemmes 2 et 3.

***Lemme* 1.** Soit x une v.a réelle. En prenant $n = 1$, $x_1 = x$ et $p_1 = p$, on note K la matrice définie par (1.8) à partir de x. La matrice K est non inversible ssi la v.a x est discrète et prend au plus p valeurs distinctes.

Preuve. La matrice K est non inversible ssi il existe un vecteur non nul appartenant à son noyau. D'autre part, K étant définie non négative, son noyau est égal au noyau de la forme quadratique associée et on déduit donc de (1.8) que K est non inversible ssi

$$\exists\, \mathbf{H} \neq \mathbf{0} /\, Q(x) \triangleq \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{X} \overset{\text{m.q}}{=} 0 \tag{2.1}$$

où m.q signifie moyenne quadratique.
La fonction $Q(x)$ est un polynôme en la v.a x, de degré inférieur ou égal à p et à coefficients réels non tous nuls puisque $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$. Par conséquent, $Q(x)$ admet au plus p racines réelles distinctes. Enfin la v.a $Q(x)$ est nulle en moyenne quadratique ssi elle est nulle presque-sûrement et on en déduit donc que la matrice K est non inversible ssi la v.a x est discrète et prend au plus p valeurs distinctes.

***Lemme* 2.** Soit **x** un vecteur aléatoire à n composantes réelles x_1, …, x_n et K la matrice définie par (1.8) à partir de **x**. Si il existe une v.a x_i qui est discrète et prend au plus p_i valeurs distinctes, alors K est non inversible.

Preuve. Soit x_i une v.a satisfaisant l'hypothèse, alors il existe p_i nombres réels non nécessairement distincts $r_1, \ldots, r_{p_i}$ tels que

$$S(x_i) \triangleq (x_i - r_1) \ldots (x_i - r_{p_i}) \triangleq \sum_{j=0}^{p_i} \alpha_j\, x_i^{\,j} \overset{\text{p.s}}{=} 0,\ \alpha_{p_i} \triangleq 1, \tag{2.2}$$

où p.s signifie presque-sûrement et où les α_j s'expriment en fonction des r_i. Par conséquent, les v.a $x_i^{\,j}$ pour $0 \leq j \leq p_i$, qui sont des composantes du vecteur **X** sont liées puisque $\alpha_{p_i} \neq 0$. Il en résulte que la matrice K est non inversible.

***Définition*.** Les v.a $x_1, \ldots, x_n$ sont dites décorrélées d'ordre $(q_1, \ldots, q_n)$ jusqu'à l'ordre q ssi

$$\mathrm{E}[x_1^{\,i_1} \ldots x_n^{\,i_n}] = \mathrm{E}[x_1^{\,i_1}] \ldots \mathrm{E}[x_n^{\,i_n}]$$

$$\text{pour } 0 \leq i_1 \leq q_1, \ldots, 0 \leq i_n \leq q_n \text{ et } i_1 + \ldots + i_n \leq q. \tag{2.3}$$

On peut noter que dans le cas où $q_1 = \ldots = q_n = q$, il est équivalent de dire que le vecteur aléatoire **x** est un bruit blanc du type BB[inf(q, n); q] [9].

***Lemme* 3.** Soit **x** un vecteur aléatoire réel dont les composantes $x_1, \ldots, x_n$ sont décorrélées d'ordre $(2\,p_1, \ldots, 2\,p_n)$ jusqu'à l'ordre $2\,p$ et K la matrice définie par (1.8) à partir de **x**. Si K est non inversible, alors il existe une v.a x_i qui est discrète et prend au plus p_i valeurs distinctes.

Preuve. La matrice K n'étant pas inversible, la propriété suivante est satisfaite

$$\exists\, \mathbf{H} \neq \mathbf{0} /\, R(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{X} \overset{\text{m.q}}{=} 0. \tag{2.4}$$

Le vecteur H étant non nul et satisfaisant (2.4), il existe nécessairement un indice $(i_1, \ldots, i_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $h_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0$. Soit i_j l'une des composantes non nulle de cet indice. On note $\mathbf{x}_j$ le vecteur aléatoire de dimension $(n - 1)$, déduit de $\mathbf{x}$ en enlevant la $j^{\text{ème}}$ composante. Le polynôme $R(\mathbf{x})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{p_j} x_j^{\,i}\, R_i(\mathbf{x}_j) \tag{2.5}$$

où $R_i(\mathbf{x}_j)$ est un polynôme, pouvant être nul, dont le degré partiel par rapport à chaque v.a x_i est inférieur ou égal à p_i et dont le degré total est au plus égal à $p - i$. Soit

$$i_0 \triangleq \operatorname{Max}\{i \in \{0, \ldots, p_i\} / \, R_i(\mathbf{x}_j) \neq 0\}, \tag{2.6}$$

i_0 existe puisque $h_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0$. Multipliant $R(\mathbf{x})$ par $R_{i_0}(\mathbf{x}_j)$, on obtient d'après (2.5),

$$R_{i_0}(\mathbf{x}_j)\, R(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{i_0} x_j^{\,i}\, R_{i_0}(\mathbf{x}_j)\, R_i(\mathbf{x}_j). \tag{2.7}$$

On peut maintenant distinguer deux cas:

a\ $\mathrm{E}[R_{i_0}^{\;2}(\mathbf{x}_j)] \neq 0$

On note

$$m_i \triangleq \mathrm{E}[x_j^{\,i}] \text{ pour } 0 \leq i \leq 2\,p_j,$$

$$\lambda_i \triangleq \mathrm{E}[R_{i_0}(\mathbf{x}_j)\, R_i(\mathbf{x}_j)] \text{ pour } 0 \leq i \leq i_0. \tag{2.8}$$

Multipliant (2.7) par $x_j^{\,k}$ pour $0 \leq k \leq i_0$, on obtient en prenant l'espérance mathématique

$$\mathrm{E}[x_j^{\,k}\, R_{i_0}(\mathbf{x}_j)\, R(\mathbf{x})] = \sum_{i=0}^{i_0} \mathrm{E}[x_j^{\,i+k}\, R_{i_0}(\mathbf{x}_j)\, R_i(\mathbf{x}_j)]. \tag{2.9}$$

D'après l'hypothèse (1.4), le moment d'ordre deux de chacune des v.a $x_j^{\,k}\, R_{i_0}(\mathbf{x}_j)$ et $R(\mathbf{x})$ existe et on obtient donc en appliquant l'inégalité de Schwarz

$$\mathrm{E}[x_j^{\,k}\, R_{i_0}(\mathbf{x}_j)\, R(\mathbf{x})]^2 \leq \mathrm{E}[(x_j^{\,k}\, R_{i_0}(\mathbf{x}_j))^2]\, \mathrm{E}[R(\mathbf{x})^2] \tag{2.10}$$

ce qui donne d'après (2.4), $\mathrm{E}[x_j^{\,k}\, R_{i_0}(\mathbf{x}_j)\, R(\mathbf{x})] = 0$. On déduit donc de (2.9) et (2.3) que

$$\sum_{i=0}^{i_0} m_{i+k}\, \lambda_i = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq i_0. \tag{2.11}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathrm{M}_{i_0}\, \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{2.12}$$

où M_{i_0} est la matrice de Hankel d'éléments (m_{i+j}), $0 \leq i, j \leq i_0$, et $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur de composantes $\lambda_0, \ldots, \lambda_{i_0}$. On remarque alors que l'on a

$$\mathrm{M}_{i_0} = \mathrm{E}[\mathfrak{X}_j\, \mathfrak{X}_j^{\mathrm{T}}] \text{ où } \mathfrak{X}_j^{\mathrm{T}} \triangleq (1, x_j, \ldots, x_j^{\,i_0}). \tag{2.13}$$

Comme $\lambda_{i_0} \neq 0$, l'équation (2.12) implique que la matrice M_{i_0} est non inversible. On déduit donc de (2.13), en appliquant le lemme 1, que la v.a x_j prend au plus i_0 valeurs distinctes. Comme $\operatorname{Sup}\{i_0\} = p_j$, la v.a x_j prend donc au plus p_j valeurs distinctes.

b\ $\mathrm{E}[R_{i_0}^{\;2}(\mathbf{x}_j)] = 0$

On a donc $R_{i_0}(\mathbf{x}_j) \overset{\mathrm{m.q}}{=} 0$ et d'après (2.6), $R_{i_0}(\mathbf{x}_j)$ est un polynôme non identiquement nul des $(n - 1)$ v.a x_i, $i \neq j$, dont le degré partiel par rapport à chaque v.a x_i est inférieur ou égal à p_i et dont le degré total est au plus égal à p. Le polynôme $R_{i_0}(\mathbf{x}_j)$ ne peut être égal à une constante car sinon, comme $\mathrm{E}[R_{i_0}^{\;2}(\mathbf{x}_j)] = 0$, cette constante serait nulle. Par conséquent, il contient un terme du type $\alpha\, x_1^{\,i_1} \ldots x_{j-1}^{\,i_{j-1}}\, x_{j+1}^{\,i_{j+1}} \ldots x_n^{\,i_n}$ où $(i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_n) \neq (0, \ldots, 0)$ et $\alpha \neq 0$. On est alors ramené au début de la démonstration où $R(\mathbf{x})$ est remplacé par $R_{i_0}(\mathbf{x}_j)$. Admettant que l'on se trouve toujours dans le deuxième cas, on obtient à la fin un polynôme non constant, d'une seule v.a x_k, et de degré au plus égal à p_k. Ce polynôme admet donc au plus p_k racines réelles et on en déduit que la v.a prend au plus p_k valeurs distinctes.

La propriété suivante est une conséquence directe des lemmes 2 et 3.

Propriété. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur aléatoire réel dont les composantes $x_1, \ldots, x_n$ sont décorrélées d'ordre $(2p_1, \ldots, 2p_n)$ jusqu'à l'ordre $2p$ et K la matrice définie par (1.8) à partir de $\mathbf{x}$. La matrice K est inversible ssi toute v.a x_i prend au moins $(p_i + 1)$ valeurs distinctes.

Remarque **2**. On a déjà noter que d'après (1.6), la matrice K est définie non négative et que par conséquent, la relation (2.6) est une condition nécessaire et suffisante pour que K soit non inversible, cette condition étant indépendante de l'hypothèse (2.4).

Remarque **3**. Si l'on enlève l'hypothèse de décorrélation d'ordre $(2p_1, \ldots, 2p_n)$ jusqu'à l'ordre $2p$, le lemme 2 devient faux. En effet, dans ce cas, on peut uniquement dire que la matrice K est non inversible ssi (2.6) est satisfaite. Ceci peut se produire sans que les v.a x_i soient liées ou qu'il existe une v.a discrète. Par exemple, soit x une v.a uniformément distribuée sur $[-\pi, \pi]$ et $x_1 \triangleq \cos x$, $x_2 \triangleq \sin x$. Les v.a x_1 et x_2 ne sont pas liées et sont continues sur l'intervalle $[-1, 1]$. Or $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 1$ et on en déduit donc que les matrices K obtenues pour $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$ et $p \geq 4$ ne sont pas inversibles. On vérifie que x_1 et x_2 ne sont pas décorrélées d'ordre (2, 2) jusqu'à l'ordre 4. En effet $\mathrm{E}[x_1^{\,2}\, x_2^{\,2}] = 1/8$ et $\mathrm{E}[x_1^{\,2}]\, \mathrm{E}[x_2^{\,2}] = 1/4$.

3. Application à l'estimation polynomiale

Étant données n v.a réelles $x_1, \ldots, x_n$ satisfaisant (1.4), on cherche dans l'ensemble $\mathfrak{P}_x$ des statistiques polynomiales de la forme (1.2), les estimations en moyenne quadratique d'une v.a y de carré intégrable. Une solution $P_0(\mathbf{x})$ à ce problème est donc caractérisée par l'inégalité

$$\mathrm{E}[(y - P_0(\mathbf{x}))^2] \leq \mathrm{E}[(y - P(\mathbf{x}))^2] \tag{3.1}$$

valable pour tout élément $P(\mathbf{x})$ de $\mathfrak{P}_x$. On vérifie facilement que $\mathfrak{P}_x$ est un sous-espace hilbertien de l'espace de Hilbert des v.a de carré intégrable. En appliquant le théorème de la projection sur un sous-espace hilbertien, on déduit de (3.1) que la solution $P_0(\mathbf{x})$ est unique et est caractérisée par la relation dite d'orthogonalité

$$\mathrm{E}[(y - P_0(\mathbf{x}))\, P(\mathbf{x})] = 0 \tag{3.2}$$

pour tout $P(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}_x$. Cette équation est équivalente à

$$E[y\,\mathbf{X}] = \mathbf{K}\,\mathbf{H}_0 \tag{3.3}$$

où K est définie par (1.8) et $\mathbf{H}_0$ par (1.3) où $P(\mathbf{x})$ est remplacé par $P_0(\mathbf{x})$. Comme on l'a vu dans la Section 2, la matrice K n'est pas nécessairement inversible. Néanmoins d'après ce qui précède, il existe au moins une solution $\mathbf{H}_0$ à l'équation (3.3) ce qui signifie que $E[y\,\mathbf{X}]$ appartient à l'image de K. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (3.3) est alors l' espace affine $\{\mathbf{H}_0 + \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}\}$ de sorte que si K n'est pas inversible, $\mathcal{S}$ n'est pas constitué d'un seul élément. Par contre, la solution $P_0(\mathbf{x})$ est unique dans le sens où $\mathbf{H}^T\mathbf{X} \overset{\text{p.s}}{=} 0$ pour tout $\mathbf{H} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}$.

Considérons maintenant le problème de l'estimation d'une quantité déterministe a. On peut chercher dans l'ensemble $\mathcal{P}x$ les estimateurs sans biais et à variance minimale. Par conséquent, il s'agit de chercher dans un sous-ensemble U de $\mathcal{P}x$, les vecteurs $\mathbf{H}$ minimisant pour tout a

$$\mathbf{H}^T\mathrm{K}'\,\mathbf{H} \text{ où } \mathrm{K} \triangleq E[\mathbf{X}\,\mathbf{X}^T] - E[\mathbf{X}]\,E[\mathbf{X}]^T. \tag{3.4}$$

D'après (1.7), U est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{H}$ satisfaisant

$$\mathbf{H}^T E[\mathbf{X}] = a \tag{3.5}$$

pour tout a et donc U n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}x$. D'autre part, la matrice symétrique K' ne comporte que des zéros sur la ligne correspondant à la composante déterministe et égale à 1 du vecteur $\mathbf{X}$. Éliminant la solution qui n'apporte rien où toutes les composantes de $\mathbf{H}$ sont nulles sauf $h_{0,\dots,0} = a$, le problème est équivalent à minimiser

$$\bar{\mathbf{H}}^T\bar{\mathrm{K}}\,\bar{\mathbf{H}} \text{ où } \bar{\mathrm{K}} \triangleq E[\bar{\mathbf{X}}\,\bar{\mathbf{X}}^T] - E[\bar{\mathbf{X}}]\,E[\bar{\mathbf{X}}]^T \tag{3.6}$$

et $\bar{\mathbf{H}}$ et $\bar{\mathbf{X}}$ sont les vecteurs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{X}$ dont on a enlevé respectivement la composante $h_{0,\dots,0}$ et la composante 1. Connaissant les autres composantes, $h_{0,\dots,0}$ est fixée par (3.5). Or $\bar{\mathrm{K}}$ est inversible ssi K l'est. En effet, en notant $\mathbf{X}^T = (X_0, X_1, \dots, X_D)$ où $X_0 = 1$ et $D = \mathcal{D}(p; p_1, \dots, p_n) - 1$, et C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de K, on a

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{K}| &= \det[\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_D] \\
&= \det[\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1 - E[X_1]\,\mathrm{C}_0, \dots, \mathrm{C}_D - E[X_D]\,\mathrm{C}_0]
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Le $k^{\text{ième}}$ élément de C_j est $E[X_j X_k]$ et le $k^{\text{ième}}$ élément de $\mathrm{C}_j - E[X_j]\,\mathrm{C}_0$ est $E[X_j X_k] - E[X_j]\,E[X_k]$, de sorte que d'après (3.7),

$$|\mathrm{K}| = \det\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ E[\bar{\mathbf{X}}] & \bar{\mathrm{K}} \end{bmatrix} = |\bar{\mathrm{K}}|. \tag{3.8}$$

Si $\bar{\mathrm{K}}$ n'est pas inversible, il est possible dans certains cas de trouver des solutions satisfaisant (3.5) et annulant (3.4).

ANNEXE

Le nombre de composantes $\mathcal{D}(p; p_1, \dots, p_n)$ du vecteur $\mathbf{H}$ est égal au nombre de termes du polynôme $P(\mathbf{x})$ défini par (1.2). Par conséquent $\mathcal{D}(p; p_1, \dots, p_n)$ est le nombre de solutions entières de l'inéquation

$$i_1 + \dots + i_n \le p \tag{A.1}$$

sous les contraintes

$$0 \le i_1 \le p_1, \dots, 0 \le i_n \le p_n. \tag{A.2}$$

On note qu'il est équivalent de trouver le nombre de solutions entières de l'équation

$$i_0 + i_1 + \dots + i_n = p \tag{A.3}$$

sous les contraintes

$$0 \le i_0 \le p,\ 0 \le i_1 \le p_1, \dots, 0 \le i_n \le p_n. \tag{A.4}$$

En effet, en prenant $i_0 = p - k$ pour $0 \le k \le p$, l'équation (A.3) devient

$$i_1 + \dots + i_n = k \tag{A.5}$$

et en faisant varier k de 0 à p, on obtient $\mathcal{D}(p; p_1, \dots, p_n)$. Ce problème d'analyse combinatoire se résout simplement en utilisant les fonctions génératrices et on peut montrer [10] que le nombre de solutions entières du système (A.3)-(A.4) est égal au coefficient de x^p dans la fonction génératrice

$$(1 - x)^{-p}\,(1 - x^{p_1+1}) \dots (1 - x^{p_n+1})\,(1 - x^{p+1}). \tag{A.6}$$

Dans le cas où $p_1 = \dots = p_n = p$, ce nombre peut aussi s'obtenir par un raisonnement direct sur les combinaisons avec répétition et on obtient alors la forme explicite

$$\mathcal{D}(p; p, \dots, p) = \binom{n+p}{p}. \tag{A.7}$$

RÉFÉRENCES

[1] K. S. LII and M. ROSEMBLATT, "Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-gaussian linear process", *Ann. Statist.*, vol. 10, pp. 1195-1208, 1982.

[2] B. PICINBONO and F. DUVAUT, "Optimal linear-quadratic systems for detection and estimation", *IEEE Trans. Information Theory*, vol.34, pp. 304-311, 1988.

[3] B. LEVINE, *Fondements théoriques de la radiotechnique statistique*, Edition MIR Moscou, 1973.

[4] A. M. KAGAN, YU LINNIK, C. R. RAO, *Characterization problems in mathematical statistics*, Wiley, New York, 1973.

[5] J. A. SHOHAT and J. D. TAMARKIN, *The problem of moments*, American Mathematical Society, Providence Rhode Island 02940, 1943.

[6] B. G. LINDSAY, "On the determinants of moment matrices", *Ann. Statist.*, vol. 17, pp. 711-721, 1989.

[7] B. G. LINDSAY, "Moment Matrices : Applications in mixtures", *Ann. Statist.*, vol. 17, pp. 722-740, 1989.

[8] J. STOYANOV, *Counterexamples in probability*, Wiley, 1987.

[9] P. BONDON et B. PICINBONO, "De la blancheur et de ses transformations", *Traitement du Signal*, vol 7, pp. 385–395, 1991.

[10] I. P. GOULDEN and D. M. JACKSON, *Combinatorial Enumeration*, Wiley-Interscience, 1983.