TREIZIÈME COLLOQUF GRETSI - JUAN-LES-PINS DU 16 AU 20 SEPTEMBRE 1991

UNE REPRESENTATION BILINEAIRE EN TEMPS ET ECHELLE*

B. ESCUDIÉ **A. GROSSMANN**

LTS/UA346
I.C.P.I.
25 rue du Plat
69288 Lyon Cedex 02, France

Centre de Physique Théorique
UPR 7061
CNRS - Luminy - Case 907
13288 Marseille Cedex 9, France

Résumé. Par analogie avec la représentation en temps et fréquence de WIGNER-VILLE, on définit une représentation énergétique en temps et échelle. De manière similaire à l'opérateur de parité on définit un opérateur involutif et unitaire d'inversion fréquentielle. La transformation utilise une fréquence de référence ν_M reliée à la valeur unité du paramètre d'échelle. La représentation se définit par l'interaction spectrale entre le signal changé d'échelle et le signal transformé changé d'échelle et translaté en temps. Cette représentation distribue l'énergie dans le demi-plan temps échelle ($\eta = \frac{1}{a} \geq 0$); elle se tranforme de façon naturelle pour tout signal décalé en temps et changé d'échelle. Pour les signaux modulés, l'expression "asymptotique" reliée à la phase stationnaire permet une expression analytique utilisable. Cette étude a pour objet une représentation particulière de la classe générale étudiée par P. FLANDRIN.

Abstract. By analogy with the time-frequency representation of WIGNER-VILLE, we define an energy representation in time and scale. By analogy with the parity operator, we define an unitary and involutive frequency inversion operator. The transform uses a frequency of reference ν_M, corresponding to the value one, of the scale parameter. The representation is defined by the spectral interaction between the time-shifted and dilated signal, and an "inverted" version of the signal. This representation distributes the signal energy over the scale-time half-plane ($\eta = \frac{1}{a} \geq 0$); it transforms naturally under time-shifts and changes of scale. For modulated signals, the "asymptotic" expression obtained to stationary phase methods a gives rise to a usable explicit expression. This work is concerned with a special case of the general class studied by P. FLANDRIN.

1. INTRODUCTION

Nous étudions la classe des signaux analytiques d'énergie finie : $Z(t) \rightleftharpoons z(\nu) = z(\nu)U(\nu)$ où U est la fonction d'HEAVISIDE. La représentation en temps et fréquence dite de WIGNER-VILLE s'écrit :

$$W_Z(t,\nu) = \int_R Z(t+\frac{\tau}{2})Z^\star(t-\frac{\tau}{2})e^{-2i\pi\nu t}dt$$

Divers auteurs ont montré que le lien entre $W_Z(t,\nu)$ et la fonction d'ambiguité symétrique $\chi_Z(\tau,\Phi)$ s'exprime sous deux formes différentes [1][2]. L'une fait appel à la transformée de FOURIER bidimensionnelle de noyau anti-symétrique :

$$e^{i2\pi(\nu\tau - t\Phi)}$$

tel que la transformation soit sa propre réciproque. L'autre s'exprime à l'aide de l'opérateur de PARITÉ tel que :

$$\mathbf{P}[Z(t)] = Z(-t) = Z_1(t)$$

ce qui entraine que : $z_1(\nu) = z(-\nu)$. Ceci conduit à :

$$W_Z(t,\nu) = \langle Z, \mathbf{T}_\nu \mathbf{T}_\tau \mathbf{P} \mathbf{T}_{-\tau} \mathbf{T}_{-\nu} Z\rangle$$

avec $\mathbf{T}$ opérateur de translation en temps $\mathbf{T}_\tau$ ou en fréquence $\mathbf{T}_\nu$.

Si on veut remplacer les translations fréquentielles par des changements d'échelle, ce qui est naturel pour la fonction d'ambiguité en compression :

$$\chi_Z(\tau,\eta) = \sqrt{\eta}\int_R Z(t)Z^\star(\eta(t-\tau))dt$$

on peut se demander s'il existe des représentations bilinéaires temps échelle analogues à celle de WIGNER-VILLE en temps fréquence? En remarquant que la transformation de FOURIER sur le facteur d'échelle : $\eta = \frac{1}{a} \geq 0$ ne possède pas les propriétés souhaitables, on est amené à envisager des analogues de l'opérateur de parité $\mathbf{P}$. Il existe à ce sujet, plusieurs choix possibles [3]. Nous présentons ici l'un de ces choix. Ce choix s'inscrit comme cas particulier d'une

* **Ce travail a été en partie financé par la D.R.E.T.**

étude générale de distributions de WIGNER-VILLE affines présentée dans ce colloque par P. FLANDRIN [4]. Une contribution importante à ces tentatives fut apportée depuis une dizaine d'années par P. et J. BERTRAND.

2. PROPRIETES DE L'INVERSION FREQUENTIELLE

2a. Représentation bilinéaire temps échelle

Pour définir une telle représentation B_Z il est commode de disposer d'une famille d'opérateurs $A_{t\eta}$ tels que :

$$B_Z(t,\eta) = \langle Z, A_{t\eta} Z\rangle$$

Si $A_{t\eta}$ est hermitique (autoadjoint) on a : $B_Z = B_Z^\star \in \mathbf{R}$. D'après les remarques précédentes (cf. Introduction) l'opérateur choisi $A_{t\eta}$ s'écrit à l'aide des opérateurs de translation temporelle, des opérateurs de changement d'échelle, et d'un opérateur analogue à la parité. Nous choisirons cet opérateur comme unitaire ($A^\star = A^{-1}$) et autoadjoint ($A^\star = A$) : il est nécessairement involutif ($A^2 = 1$).

L'opérateur spécifique choisi s'écrit en représentation fréquentielle :

$$[\Pi_{\nu_M} z]_{(\nu)} = \frac{\nu_M}{\nu} z\left(\frac{\nu_M^2}{\nu}\right)$$

où ν_M est une fréquence de référence.

2b. Propriétés de l'inversion fréquentielle

L'opérateur d'inversion fréquentielle $\nu \longrightarrow \frac{\nu_M^2}{\nu}$ possède des propriétés simples. En posant par commodité $\nu_M = 1$ on note que :

$$\int_0^\infty \left|z\left(\frac{1}{\nu}\right)\right|^2 \frac{d\nu}{\nu^2} = \int_0^\infty |z(\nu)|^2 d\nu = Ez$$

Il y a conservation de l'énergie du signal vu la définition adoptée. L'opérateur $\Pi_{\nu_M} : \Pi_{\nu_M} z(\nu) \longrightarrow \frac{\nu_M}{\nu} z\left(\frac{\nu_M^2}{\nu}\right)$ est donc unitaire.

Le choix de la fréquence ν_M est arbitraire et relève des contraintes rencontrées. Si $z(\nu)$ est à bande limitée : $z(\nu) = z(\nu)[U(\nu-\nu_1) - U(\nu-\nu_2)]$ un choix possible de ν_M est : $\nu_M^2 = \nu_1\nu_2$. Ce choix laisse la bande spectrale inchangée et conduit à une sorte de "retournement" spectral.

L'écriture $\frac{\nu_M^2}{\nu}$ pour cette transformation involutive traduit aussi un fait physique. L'argument de $z(\nu)$ est une fréquence. L'expression choisie assure cette propriété. Au voisinage de la fréquence ν_M soit :

$$\nu = \nu_M(1-\epsilon)\ ,\ |\epsilon| << 1$$

la transformation $\nu \longrightarrow \frac{\nu_M^2}{\nu}$ devient au premier ordre :

$$\nu' = \frac{\nu_M^2}{\nu} \simeq \nu_M(1+\epsilon) = \nu + 2\nu_M\epsilon$$

soit une translation en fréquence. Dans le cas de signaux à bande étroite autour de ν_M l'opérateur Π_{ν_M} est approximativement une translation en fréquence.

2c. Représentation bilinéaire temps échelle

Compte tenu de la définition de l'opérateur Π_{ν_M} et des opérateurs de translation $\mathbf{T}_\tau$ et de dilatation D_η :

$$(\mathbf{T}_\tau z)_{(\nu)} = z(\nu)e^{-2i\pi\nu\tau}$$
$$(D_\eta z)_{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} z(\frac{\nu}{\eta})$$

nous formons le produit scalaire de

$$z(\nu) \longrightarrow (D_\eta T_{-t} z)(\nu) = \sqrt{\eta} z(\eta\nu) e^{2i\pi\eta\nu t} = z_{\eta t}(\nu)$$

avec $\Pi_{\nu_M} z_{\eta t}$ d'où :

$$B_Z(t,\eta) = \langle z_{\eta t}, \Pi_{\nu_M} z_{\eta t}\rangle = \left\langle z, \mathbf{T}_t, D_{\frac{1}{\eta}} \Pi_{\nu_M} D_\eta \mathbf{T}_{-t} z\right\rangle$$

soit :

$$B_Z(t,\eta) = \eta\nu_M \int_0^\infty z(\eta\nu) z^\star(\eta\frac{\nu_M^2}{\nu}) e^{2i\pi\eta t(\nu - \frac{\nu_M^2}{\nu})} \frac{d\nu}{\nu}$$

qui est la représentation bilinéaire en temps et échelle que l'on étudie ci-après. L'opérateur $A_{t,\eta}$ associée à $B_Z(t,\eta)$ s'écrit : $A_{t,\eta} = \mathbf{T}_t D_{\frac{1}{\eta}} \Pi_{\nu_M} D_\eta \mathbf{T}_{-t}$.

3. PROPRIETES DE LA REPRESENTATION BILINEAIRE TEMPS ECHELLE

a) $B_Z(t,\eta)$ est à valeurs réelles :
D'après les propriétés citées en 2a. on obtient :

$$B_Z^\star(t,\eta) = B_Z(t,\eta)$$

b) $B_{Z_1}(t,\eta) = B_Z(t-t_1,\eta)$ si $Z_1(t) = Z(t-t_1)$
A tout retard t_1 du signal Z il correspond le même retard pour la représentation $B_Z(t,\eta)$, ce que l'on qualifie d'invariance par translation.

c) $B_{Z_{\eta_0}}(t,\eta) = B_Z\left(\frac{t}{\eta_0}, \eta\eta_0\right).\eta_0$
avec $Z_{\eta_0}(t) \rightleftharpoons \sqrt{\eta_0} z(\eta_0\nu)$.
De même que pour la propriété précédente on observe ici une transformation dite d'invariance par changement d'échelle.

Ces 2 propriétés sont d'un intérêt certain pour l'analyse des signaux, puisqu'elles mettent en oeuvre les opérations de décalage et d'effet DOPPLER si fréquentes dans les problèmes de communication.

d) Effet du filtrage linéaire : $z(\nu) \longrightarrow h(\nu)z(\nu) = z'(\nu)$ avec $h(\nu)$ gain complexe du filtre considéré on a :
$B_{Z'}(t,\eta) =$

$$\int_0^\infty z(\nu\eta)h(\nu\eta)z^\star\left(\eta\frac{\nu_M^2}{\nu}\right)h^\star\left(\frac{\nu_M^2}{\nu}\eta\right)e^{2i\pi\eta t(\nu - \frac{\nu_M^2}{\nu})}\frac{d\nu}{\nu}$$

Dans le cas présent la transformation envisagée est compatible avec le caractère analytique des signaux qui est conservé par la dilatation et l'inversion fréquentielle. Il n'en est pas de même pour la translation en fréquence utilisée dans les représentations temps-fréquence.

e) Répartition de l'énergie dans le plan temps échelle: en utilisant le résultat du paragraphe 2c. on a en remarquant que : $\delta(\nu - \frac{\nu_M^2}{\nu}) = \frac{1}{2}\delta(\nu - \nu_M), \nu_M > 0$, on obtient:

$$\int_0^\infty \int_\infty^{+\infty} B_Z(t,\eta) d\eta dt = \frac{1}{2} < z, z >= \frac{E_Z}{2}$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ peut être relié à la définition du signal analytique.

4. QUELQUES EXEMPLES EXPLICITES DE REPRESENTATION

Considérons le signal "ondelette" suivant :

$$G(t) \Longrightarrow g(\nu) = e^{-\frac{\nu}{\nu_0}} e^{-\frac{\nu_0}{\nu}} U(\nu)$$

La représentation $B_G(t,\eta)$ s'écrit directement :

$$B_G(t,\eta) = \nu_M^2 \eta \int_0^\infty e^{-\frac{1}{f}(i2\pi t\eta + \frac{1}{\eta} + \eta)} e^{-f(-i2\pi t\eta + \frac{1}{\eta} + \eta)} \frac{df}{f}$$

avec $f = \frac{\nu}{\nu_0}, \nu_M = \nu_0 = 1$. Il s'en suit :

$$B_G(t,\eta) = 2\nu_M^2 \eta K_0 \left(2[(\eta + \frac{1}{\eta})^2 + 4\pi^2 t^2]^{1/2} \right)$$

où $K_0(x)$ est la fonction de BESSEL modifiée de 1^{ere} espèce. Le facteur η s'interprète comme le rapport de la fréquence à une fréquence de référence, ici, prise à l'unité. Le terme t est une date réduite s'exprimant comme $\frac{t}{T_0} = t\nu_0$, $\nu_0 = 1$.

Ce résultat suggère d'utiliser ce type de représentation pour les signaux analytiques rationels étudiés par W. MARTIN [5]. En effet, le plus simple d'entre eux s'écrit : $z(\nu) = Te^{-\nu T} U(\nu)$. Il relève du calcul précédent; il en est de même pour les signaux rationnels à phase de BLASCHKE repré-sentables de manière similaire avec le procédé décrit ci-dessus.

Représentation temps échelle des signaux modulés

Nous envisageons ici les signaux fortement modulés dont le produit de GABOR $\Delta t.\Delta\nu$ est très grand :

$$\Delta t.\Delta\nu >> \frac{1}{4\pi}$$

Dans de tels cas nous avons déjà utilisé la méthode de la phase stationnaire pour divers signaux [6][7]. Nous procèderons de même pour la représentation $B_Z(t,\eta)$ écrite comme suit : $B_Z(t,\eta) =$

$$\nu_M \int_0^\infty |z(\eta\nu)||z(\eta\frac{\nu_M^2}{\nu})| e^{i\varphi(\eta\nu) - i\varphi(\frac{\nu_M^2}{\nu}\eta)} e^{+2i\pi\eta t(\nu - \frac{\nu_M^2}{\eta})} \frac{d\nu}{\nu}$$

avec $M = |z(\eta\nu)||z(\eta\nu_M^2/\nu)|$ avec $z = |z|e^{i\varphi}$. L'équation des points stationnaires est fournie par :

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\varphi(\eta\nu) - \varphi(\eta\frac{\nu_M^2}{\nu}) + 2\pi\eta t(\nu - \frac{\nu_M^2}{\nu})\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nu} = 0$$

En utilisant le retard de groupe : $\tau_g(\nu) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{d\nu}$ il vient :

$$\tau_g(\eta\nu) + \frac{\nu_M^2}{\nu^2}\tau_g(\eta\frac{\nu_M^2}{\nu}) = t\left(\frac{\nu^2 + \nu_M^2}{\nu^2}\right)$$

Le caractère analytique de $z(\nu)$ entraine que $\nu \geq 0$ et il s'en suit que $sgnt_g = sgnt$. Si ν_s est une racine de l'équation précédente alors ν_M^2/ν_s est aussi une racine. Ce fait permet d'exprimer $B_Z(t,\eta)$ de manière adéquate.
En effet :

$$B_Z(t,\eta) \simeq \nu_M \sqrt{\frac{\pi}{2|\ddot{\mathcal{L}}(\nu_s)|}} M(\nu_s) e^{i\mathcal{L}(\nu_s)} e^{i\frac{\pi}{4} sgn\ddot{\mathcal{L}}(\nu_s)} + \ldots$$

en tenant compte de la valeur associée à la racine $\frac{\nu_M^2}{\nu_s}$, on obtient $\mathcal{L}(\nu_s) = -\mathcal{L}(\frac{\nu_M^2}{\nu_s})$ et $sgn\ddot{\mathcal{L}}(\nu_s) = -sgn\ddot{\mathcal{L}}(\frac{\nu_M^2}{\nu_s})$.
Comme $\left|\ddot{\mathcal{L}}(\frac{\nu_M^2}{\nu_s})\right| = \frac{\nu_s^4}{\nu_M^4}|\ddot{\mathcal{L}}(\nu_s)|$ il vient :

$$B_Z(t,\eta) = \nu_M Re\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2|\ddot{\mathcal{L}}(\nu_s)|}} M(\nu_s) e^{i\mathcal{L}(\nu_s)} e^{+i\frac{\pi}{4} sgn\ddot{\mathcal{L}}(\nu_s)}\right\}$$

Ce résultat montre par le terme $M(\nu_s)$ que les contributions seront localisées dans la bande spectrale du signal, si celui-ci est limité au support $[\nu_1, \nu_2]$, puisque la transformation $\nu' = \frac{\nu_M^2}{\nu}$ laisse bande inchangée en position. La solution de l'équation des points stationnaires fournit une solution $\nu_s = \nu_s(t, \ldots)$ dépendant de tous les paramètres de modulation du signal et de la fréquence de référence ν_M. Rechercher les solutions $\nu_s(t, \ldots)$ est le plus souvent un problème soluble par voie numérique. Notons cependant que des signaux particuliers, telle l'ondelette ALTES-ZAKHARIA, fournissent des équations de points stationnaires explicitement solubles [8]. L'intérêt de tels cas est de dégager, à l'aide des moments d'ordre un, le retard de groupe et la fréquence instantanée réciproques l'un de l'autre [4].

CONCLUSION

Le présent travail n'envisage qu'une possibilité parmi diverses solutions de représentation bilinéaires en temps et échelle. Les propriétés obtenues semblent posséder quelque intérêt pour l'analyse des signaux modulés, plus spécialement dans le cas des signaux à grand produit durée bande. L'intérêt d'une telle analyse reste en l'état actuel encore à discuter puisque l'analyse numérique du comportement de la représentation en présence de termes d'interactions (fantômes) reste à explorer.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier P. Flandrin, J. et P. Bertrand, Th. Paul et A. Unterberger pour de profitables discussions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grossmann, E. Huguenin, Els. Phys. Acta **51** (1978) 252 ;
A. Grossmann, E. Huguenin, Comm. Math. Phys. **48** (1976) 191.

[2] A. Royer, Phys. Rev. A **15** (1977) 449-450.

[3] T. Paul, Ondelettes et Mécanique Quantique, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Aix-Marseille II, (1985).

[4] P. Flandrin, cf. Colloque GRETSI, Septembre 1991.
P. Flandrin, Rapport ICPI LTS 9001 (1990).

[5] W. Martin, B. Escudié, **I**, Colloque GRETSI 1985, 25-29.

[6] N. Delprat et al., Special Issue Wavelets IEEE Inf. Theory à paraitre (1991).

[7] B. Escudié, A. Grossmann et al., **I**, Colloque GRETSI Juan les Pins (1989) 1-4.

[8] R. Kronland, A. Grossmann, B. Escudié, en préparation soumis Colloque Sté Fr. d'Acoustique (1992).