TREIZIÈME COLLOQUE GRETSI - JUAN-LES-PINS DU 16 AU 20 SEPTEMBRE 1991

Etude des propriétés théoriques de quelques représentations temps-fréquence proposées récemment.

F. Auger - C. Doncarli

Laboratoire d'Automatique de Nantes. (URA 823 CNRS)
Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, 1, Rue de la Noë - 44072 Nantes Cedex 03.
Membres du GDR 134 CNRS "traitement du signal et des images"

Résumé :
Cet article présente une comparaison entre trois représentations temps-fréquence récentes, du point de vue tant théorique que pratique. A cette occasion, on définit un nouveau type de versions modifiées des représentations, et on montre le rapprochement entre les versions modifiées de la distribution de Rihaczek et la transformée de Fourier Court-Terme.

Abstract :
We present a theoretical and practical comparison between three Time-Frequency Representations lately proposed. We define then a new kind of modified TFR called Masked Pseudo TFR, and we also show the relationships between the modified versions of Rihaczek's distribution and the Short-Time Fourier Transform.

1) Introduction

Ces derniers mois, la revue IEEE ASSP a publié trois articles [2,3,4] proposant de nouvelles représentations temps-fréquence (RTF) du groupe de Cohen. Ces trois publications témoignent d'un intéret croissant pour les méthodes non-paramétriques d'analyse des signaux non-stationnaires, et montrent la capacité de ce groupe non seulement de rassembler la plupart des RTF connues, mais aussi d'accueillir de nouveaux membres.

Après une présentation succinte de ce groupe de Cohen (§2), on va présenter ici quelques résultats supplémentaires sur les RTF proposées dans ces articles. Pour la représentation de Choi-Williams (§3), on présente d'abord une définition précise de cette représentation, pour des signaux continus puis pour des signaux discrets. On s'intéresse ensuite à ses versions modifiées, et à leurs propriétés théoriques. On examine ensuite les propriétés théoriques de la représentation de Zhao-Atlas-Marks (§4), et on montre alors le rapprochement avec la représentation pseudo Born-Jordan. Enfin, le cinquième paragraphe concerne la représentation pseudo Margenau-Hill. On montre d'abord qu'elle peut également s'exprimer comme la partie réelle d'une version lissée de la représentation de Rihaczek, ce qui permet d'en tirer une conséquence intéressante sur la possibilité de calculer la fréquence instantanée en utilisant la transformée de Fourier Court-Terme. On étudie également les propriétés de conservation des valeurs nulles du signal et du spectre, propriétés plus fortes que les propriétés de conservation des supports, et on en donne des conditions nécessaires et suffisantes. Enfin, on présentera un exemple de calcul des représentations étudiées pour un signal synthétique, ce qui permet d'examiner également leurs qualités descriptives.

2) Représentations du groupe de Cohen

Les trois RTF étudiées s'insèrent dans un cadre théorique commun, constitué des représentations temps-fréquence du groupe de Cohen [1], dont les éléments les plus étudiés et les plus utilisés sont la distribution de Wigner-Ville [5,12,18] et le spectrogramme. Il est constitué, rappelons le, de toutes les représentations bilinéaires d'un signal x(t) (considéré ici comme déterministe) distribuant son énergie dans le plan temps-fréquence et vérifiant les propriétés d'invariance par translation et par modulation. Une des formulations possibles d'un élément de ce groupe, dont on peut déduire un algorithme de calcul, s'écrit comme la transformée de Fourier d'une "fonction d'autocorrélation instantanée" du signal, paramétrée par un noyau caractéristique [1,11] :

$$\mathrm{RTF}(x.x;\,t,\omega) = \int R(x.x;t,\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$
$$\text{avec } R(x.x;t,\tau) = \int \phi_{TR}(t-u,\tau)\, x(u+\tau/2).x^*(u-\tau/2)\, du \qquad (1)$$

De manière strictement équivalente, chaque RTF peut s'écrire comme la double transformée de Fourier d'une version pondérée de la fonction d'Ambiguïté du signal :

$$\mathrm{RTF}(x.x;t,\omega) = \iint \phi_{DR}(\xi,\tau).A(x.x;\xi,\tau)\, e^{j(\xi t-\omega\tau)}\, d\tau\, \frac{d\xi}{2\pi}$$
$$\text{avec } A(x.x;\xi,\tau) = \int x(u+\tau/2).x^*(u-\tau/2)\, e^{-j\xi u}\, du \qquad (2)$$
$$\text{et } \phi_{TR}(v,\tau) = \int \phi_{DR}(\xi,\tau)\, e^{j\xi v}\, \frac{d\xi}{2\pi}$$

Un des résultats les plus importants concernant le groupe de Cohen est l'étude des contraintes que doit vérifier le noyau caractéristique pour qu'une RTF possède certaines propriétés souhaitables pour un tel outil d'analyse [1,11,18]. L'intéret de ces résultats est de permettre non seulement d'étudier les propriétés d'une RTF donnée, mais aussi de guider l'utilisateur dans le choix de la représentation la mieux adaptée à son application. Le tableau I ci-joint regroupe succintement les principaux résultats dans ce domaine. Il est à noter que la plupart des conditions données dans ce tableau trouvent leur expression la plus simple dans le plan des ambiguïtés (c.à.d. le plan doppler-retard), ce qui fait de celui-ci un point de vue privilégié pour l'étude théorique des RTF.

3) Représentation de Choi-Williams

En examinant ce tableau, on peut constater que les conditions conviennent particulièrement bien aux noyaux du type produit :

$$\phi_{DR}(\xi,\tau) = F(\alpha\xi\tau)$$
$$\text{où } \alpha \text{ est un paramètre d'échelle.} (\alpha > 0) \qquad (3)$$

Il est très facile de voir par exemple que si F est une fonction réelle paire et vérifiant F(0)=1 et F '(0)= 0, la RTF associée vérifie alors toutes les propriétés 0-4, 6-10. Un choix possible pour F, en accord avec la géométrie des interférences de la fonction d'Ambiguïté [17], est de prendre le spectre d'un filtre passe-bas. Ce choix correspond alors dans l'équation 2 à une atténuation de la fonction d'ambiguïté pour les points (ξ,τ) éloignés des axes et de l'origine. Pour des noyau de ce type, le passage dans le plan temps-retard s'obtient alors en distinguant le cas où τ est nul :

$$\begin{cases} \phi_{TR}(v,\tau{=}0) = F(0)\, \delta(v) \\ \phi_{TR}(v,\tau{\neq}0) = \displaystyle\int F(\alpha\xi\tau)\, e^{j\xi v}\, \frac{d\xi}{2\pi} = \frac{1}{\alpha|\tau|}\, f\!\left(\frac{v}{\alpha\tau}\right) \end{cases} \qquad (4)$$

Où f est la transformée de Fourier inverse de F.

La représentation de Choi-Williams [2] est un exemple de RTF de ce type, où la fonction F choisie est une gaussienne paramétrée par sa "variance" [16], ce qui correspond donc à un filtre de réponse impulsionnelle infinie :

$$\phi_{DR}(\xi,\tau) = e^{-\xi^2\tau^2/\sigma} \quad \sigma > 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \phi_{TR}(\nu,\tau=0) = \delta(\nu) \\ \phi_{TR}(\nu,\tau\neq 0) = \dfrac{1}{(4\pi\tau^2/\sigma)^{1/2}}\, e^{-\frac{\nu^2}{4\tau^2/\sigma}} \end{cases} \quad (5)$$

On peut alors montrer que ce noyau caractéristique est continu sur la droite $\tau=0$, ce qui permet d'écrire la RTF sous la forme :

$$CW\,(x.x\,;\,t,\omega)=\iint \frac{e^{-\frac{\nu^2}{4\tau^2/\sigma}}}{(4\pi\tau^2/\sigma)^{1/2}}\, x(t+\nu+\tau/2).x^*(t+\nu-\tau/2)\, e^{-j\omega\tau}\, d\nu\, d\tau \quad (6)$$

Après un changement de variable $\tau=2\tau'$, la version discrète obtenue par application de l'opérateur de discrétisation dans le plan temps-retard et en ne conservant que la partie de période π s'écrit alors :

$$CW[x.x;t,\theta]= 2\Big[\,|x[t]|^2+ \sum_{\tau\neq 0,\mu} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{16\tau^2/\sigma}}}{(16\pi\tau^2/\sigma)^{1/2}}\, x[t+\mu+\tau].x^*[t+\mu-\tau]e^{-2j\theta\tau}\Big] \quad (7)$$

Cette expression [19] semble se justifier davantage que celle des auteurs, dans la mesure où elle ne nécessite aucun calcul approché d'intégrale, et le paramètre σ reste identique dans la version continue et la version discrète.

Pour aboutir à une version calculable de cette représentation, il est alors nécessaire de modifier cette dernière expression pour avoir des sommations de termes en nombre fini. Pour arriver à ce résultat, la première solution proposée [11] consiste à construire une représentation du signal pondéré par une fonction fenêtre h:

$$RTF_h(x.x;\,t,\omega)= RTF(x_t.x_t;\,t,\omega) \text{ avec } x_t(u)= x(u)\, h^*(t-u) \quad (8)$$

Les noyaux caractéristiques de ces versions "à fenêtre glissante" des représentations sont de la forme :

$$\phi^{FG}_{TR}(\nu,\tau)=h(\nu+\tau/2).h^*(\nu-\tau/2).\phi_{TR}(\nu,\tau) \text{ et } \phi^{FG}_{DR}(\xi,\tau)=\int A(h.h;\xi-\Omega,\tau).\phi_{DR}(\Omega,\tau)\,\frac{d\Omega}{2\pi} \quad (9)$$

Comme pour le spectrogramme, les modifications du noyau caractéristique suivant ses deux variables sont intrinsèquement liées au travers de la fonction h. Une solution naturelle permettant d'obtenir à la fois des domaines d'intégration bornés et de largeurs indépendantes consiste à remplacer la fonction d'ambiguïté de h par le produit de deux fonctions fenêtres :

$$\phi^{PM}_{TR}(\nu,\tau)= g(\nu).h(\tau).\phi_{TR}(\nu,\tau) \text{ et } \phi^{PM}_{DR}(\xi,\tau)=\int G(\xi-\Omega).h(\tau)\, \phi_{DR}(\Omega,\tau)\,\frac{d\Omega}{2\pi} \quad (10)$$

Ce raisonnement à conduit les auteurs à proposer une version modifiée de leur représentation, pour laquelle on propose l'appellation de représentation pseudo Choi-Williams masquée, par analogie avec les versions pseudo-lissées :

$$PCWM(x.x;t,\omega)=\iint \frac{g(\nu)h(\tau)\, e^{-\frac{\nu^2}{4\tau^2/\sigma}}}{(4\pi\tau^2/\sigma)^{1/2}}\, x(t+\nu+\tau/2).x^*(t+\nu-\tau/2)\, e^{-j\omega\tau}\, d\nu\, d\tau \quad (11)$$

On peut alors montrer [19] que si g et h sont des fonctions réelles paires vérifiant $g(0)=h(0)=1$ et $h'(0)=0$, cette représentation vérifie les propriétés 0,2-4,6,7,9. On obtient alors une représentation qui privilégie la représentation de la fréquence en fonction du temps, ce qui correspond, dans de nombreux cas, à l'utilisation courante des RTF. On peut donc en déduire que la version discrète obtenue en effectuant des sommes finies de termes constitue une estimation correcte de la représentation de Choi-Williams, conservant certaines qualités de la version originale.

4) Représentation de Zhao-Atlas-Marks.

L'article de MM Zhao, Atlas et Marks [3] est intéressant par leur façon d'appréhender la théorie des RTF. L'objet principal de leur étude est le respect de la conservation des supports temporels du signal, qui les conduit à proposer comme représentation temps-fréquence :

$$ZAM(x.x;t,\omega)=\int h(\tau) \int_{-|\tau|/a}^{|\tau|/a} x(t+\nu+\tau/2).x^*(t+\nu-\tau/2)\, d\nu\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \quad (12)$$

avec $a \geq 2$ (on prendra par la suite a=2, pour simplifier)

L'originalité de leurs analyses et de l'analogie avec les fonctions d'inhibition latérales des réseaux neuronaux est cependant entachée par l'abscence d'une étude classique de leur représentation. Celle-ci commence par le calcul de ses noyaux caractéristiques :

$$\phi_{TR}(\nu,\tau)= h(\tau)\, Rect(\nu,|\tau|/2) \quad \text{soit} \quad \phi_{DR}(\xi,\tau)= h(\tau)\, |\tau|\, sinc(\xi\tau/2) \quad (13)$$

On en déduit alors que si h est paire, cette RTF vérifie les propriétés 0,2-4,16, mais ne vérifie aucune des propriétés sur les marginales. En particulier, comme $\phi_{DR}(0,0)=0$, elle ne conserve pas l'énergie du signal. Au vu des analyses de signaux obtenues par cette représentation, on peut se demander alors dans quelle mesure certaines propriétés théoriques sont nécesaires pour construire des RTF ayant de bonnes qualités descriptives d'un signal. Enfin, cette représentation est de toute évidence à rapprocher à la représentation de Born-Jordan [6,17], pour laquelle $h(\tau) = 1/\,|\tau|$ correspondant au choix d'un filtre RIF passe-bas dans (3). En prenant une version lissée en fréquence de la représentation de Born-Jordan, on obtient alors une représentation très similaire, de noyaux caractéristiques :

$$\phi_{DR}(\xi,\tau)= h(\tau)\, sinc(\xi\tau/2) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_{TR}(\nu,\tau=0) = h(0)\,\delta(\nu) \\ \phi_{TR}(\nu,\tau\neq 0) = \dfrac{h(\tau)}{|\tau|} Rect(\nu,|\tau|/2) \end{cases} \quad (14)$$

Si h est une fonction paire vérifiant $h(0)=1$ et $h'(0)=0$, cette RTF vérifie alors les propriétés 0,2-4,6,7,9,16. La représentation de Zhao-Atlas-Marks apparait donc comme une version particulière de la RTF de Born-Jordan, vérifiant assez peu de propriétés théoriques mais dont les qualités descriptives semblent intéressantes.

5) Représentation de Margenau-Hill lissée.

Après s'être intéressés à la propriété de conservation des supports, on va étudier maintenant une condition plus forte de conservation des valeurs nulles du signal, traduisant le souhait d'avoir une représentation nulle aux instants où le signal est nul :

$$\text{Si } \exists\, t,\ x(t) = 0, \text{ Alors } \forall\, \omega,\ RTF(x.x;t,\omega) = 0 \quad (15)$$

On en déduit alors [19] :

$$\begin{aligned} (\forall\, \omega,\ RTF(x.x;t,\omega) = 0) &\iff \forall\, \tau,\ R(x.x;t,\tau) = 0 \\ &\iff \phi_{TR}(\nu,\tau) = h_1(\tau)\delta(\nu-\tau/2) + h_2(\tau)\delta(\nu+\tau/2) \\ &\iff \phi_{DR}(\xi,\tau)= h_1(\tau).e^{-j\xi\tau/2} + h_2(\tau).e^{j\xi\tau/2} \end{aligned}$$

De même, la propriété duale de la précédente est la conservation des valeurs nulles du spectre. Par un raisonnement analogue dans le plan doppler-fréquence, on obtient alors une condition semblable :

$$\begin{aligned} &(\text{Si } \exists\, \omega,\ X(\omega) = 0, \text{ Alors } \forall\, t,\ RTF(x.x;t,\omega) = 0) \\ &\iff (\,\phi_{DR}(\xi,\tau) = G_1(\xi).e^{-j\xi\tau/2} + G_2(\xi).e^{j\xi\tau/2}\,) \end{aligned} \quad (16)$$

La représentation pseudo Margenau-Hill est un exemple de RTF vérifiant l'équation 15. Proposée dans [4] pour réduire les termes oscillants de la représentation de Margenau-Hill [7] par un lissage spectral, elle s'obtient en prenant deux fonctions égales dans 15:

$$h_1(\tau).= h_2(\tau).= h(\tau)/2 \quad \text{soit} \quad \phi_{DR}(\xi,\tau)= h(\tau).\cos(\xi\tau/2) \quad (17)$$

$$PMH(x.x;t,\omega) = \int \frac{h(\tau)}{2}\Big[x(t).x^*(t-\tau)+x(t+\tau)x^*(t)\Big]e^{-j\omega\tau}\, d\tau \quad (18)$$

On peut démontrer alors [4] que si h est une fonction réelle paire vérifiant $h(0)=1$ et $h'(0)=0$, les propriétés 0,2-4,6,7,9,16,18 sont vérifiées. Sous ces conditions, il est intéressant de remarquer que cette représentation s'exprime en outre comme la partie réelle d'une version lissée en fréquence de la représentation de Rihaczek [9,10], qui peut s'exprimer en fonction de la transformée de Fourier Court-Terme :

$$PMH(x.x;t,\omega) = \mathcal{R}\big\{\, PRi(x.x;t,\omega)\,\big\} \text{ et } PRi(x.x;t,\omega) = x(t)\, FCT^*_h(x;t,\omega)\, e^{-j\omega t} \quad (19)$$

$$\text{avec } FCT_h(x;t,\omega) = \int x(u).h^*(t-u)\, e^{-j\omega u}\, du$$

Un conséquence de cette remarque est qu'il est en fait possible de retrouver la fréquence instantanée d'un signal à partir de sa FCT, en prenant non pas le moment spectral du spectrogramme (son module carré), mais de la représentation pseudo Margenau-Hill.

De façon duale, la représentation de Margenau-Hill lissée, obtenue en prenant deux fonctions identiques dans 16, correspond à un lissage temporel de la représentation de Margenau-Hill :

$$G_1(\xi) = G_2(\xi) = G(\xi)/2, \text{ soit } \phi_{DR}(\xi,\tau) = G(\xi).\cos(\xi\tau/2) \quad (20)$$

$$MHL(x.x;t,\omega)=\iint \frac{g(u)}{2}\left\{ x(t+u+\tau).x^*(t+u)+x(t+u).x^*(t+u-\tau) \right\} e^{-j\omega\tau}\, du\, d\tau \quad (21)$$

Si g est une fonction réelle paire, avec G(0)=1 et G'(0)=0, cette représentation vérifie alors les propriétés 0,2-4,6,8,10,17,19, et s'écrit comme la partie réelle de la représentation de Rihaczek lissée:

$$MHL(x.x;t,\omega) = \mathcal{R}\left\{ RiL(x.x;t,\omega) \right\} \text{ et } RiL(x.x;t,\omega) = FCT_g(x;t,\omega).X^*(\omega) \quad (22)$$

Comme pour la représentation Pseudo Margenau-Hill, une conséquence de ce résultat est qu'il est possible de retrouver le retard de groupe d'un signal à partir de sa FCT, en prenant non pas le moment temporel du spectrogramme, mais de la représentation de Margenau-Hill lissée.

La combinaison de ces deux paragraphes suggère alors de s'intéresser à des représentations de la forme :

$$MHS(x.x;t,\omega) = \mathcal{R}\left\{ RiS(x.x;t,\omega) \right\} \quad (23)$$

$$RiS(x.x;t,\omega) = K_{gh}^{-1}\, FCT_h(x;t,\omega).FCT_g^*(x;t,\omega) \text{ , avec } K_{gh} = \int g(u).h^*(u)\, du$$

Les deux fenêtres étant choisies telles que $K_{gh} \neq 0$. Cette famille de représentations, d'aspect très simple, englobe cependant les spectrogrammes, la représentation de Margenau-Hill et ses versions lissées en fréquence ou en temps et la représentation de Page [8]. En prenant alors des fonctions fenêtres intermédiaires entre le dirac et la fonction constante, on obtient alors, comme pour la représentation pseudo Wigner-Ville lissée [12,13,14], une RTF qui s'approche des propriétés de conservation de la fréquence instantanée, du retard de groupe et de la positivité.

Un exemple.

Pour comparer les qualités descriptives des RTF étudiées, on va comparer les différentes images obtenues pour un signal synthétique comprenant une sinusoide et deux chirps d'enveloppe gaussienne. Les figures 1 et 2 donnent la représentation de Wigner-Ville, présentant de nombreuses interférences, et la représentation pseudo Wigner-Ville lissée, (avec des fenêtres rectangulaires de 40 points pour le moyennage temporel et 210 points pour le lissage spectral) avec laquelle on obtient une description satisfaisante du signal. Les figures 3 et 4 comparent la RTF de Choi-Williams pour σ=50 et σ=5. On vérifie alors [19] que la réduction des interférences se fait au détriment de la concentration des deux chirps. Les figures 5 et 6 comparent les RTF de Zhao-Atlas-Marks et pseudo Born-Jordan. On peut constater que pour une réduction des interférences presque identique, la concentration des composantes est plus importante pour la première. Enfin, les figures 7 et 8 comparent la représentation pseudo Margenau-Hill et l'expression 23 (toutes deux avec des fenêtres de Hamming de 128 points, et 192 points pour la fenêtre supplémentaire dans la seconde). On vérifie alors [19] que les interférences de la première sont localisées sur les composantes propres, ce qui empêche son utilisation pour des signaux multi-composantes. La seconde semble possèder des caractéristiques proches du spectrogramme, non présenté ici.

Réferences :

[1] L. Cohen, Time-Frequency Distributions - A Review, Proceedings IEEE, Vol 77, No 7, pp 941-981, July 89.

[2] H.I. Choi,W.J. Williams, Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels, IEEE ASSP, Vol 37 n° 6, pp 862-871, June 89.

[3] Y. Zhao, L.E. Atlas, R.J. Marks, The Use of Cone-Shaped Kernels for Generalized Time-Frequency Representations of Non-Stationary Signals, IEEE ASSP, Vol 38, n° 7, pp 1084-1091.

[4] R.D. Hippenstiel, P.M. de Oliveira, Time Varying Spectral Estimation Using the Instantaneous Power Spectrum (IPS), IEEE ASSP, Vol 38, n° 10, pp 1752-1759, October 1990.

[5] J. Ville, Théorie et applications de la notion de signal analytique, Cables et Transmissions, Vol 2A, pp 66-74, 1948.

[6] M. Born, P. Jordan, Zur Quantenmechanik, Z. Phys, Vol 34, pp 858-888, 1925.

[7] H. Margenau, R.N. Hill, Correlation between Measurements in Quantum Theory, Prog Theor Phys, Vol 26, pp 772-738, 1961

[8] C.H. Page, Instantaneous Power Spectra, J. Appl Phys, Vol 23, pp 103-106, 1952.

[9] M.J. Levin, Instantaneous Spectra and Ambiguity Functions, IEEE Trans on Inf Theory, Vol IT13, pp 95-97, 1967.

[10] W. Rihaczek, Signal Energy Distribution in Time and Frequency, IEEE Trans on Information Theory, Vol IT14, pp 369-374, 1968.

[11] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker, The Wigner Distribution - A Tool for Time Frequency Analysis, Part I : Continuous Time Signals, Vol 35 No 3, pp 217-250; Part II : Discrete Time Signals, Vol 35, No 4/5, pp 276-300; Part III : Relations with other Time-Frequency Signal Transformations, Vol 35, n°6, pp 372-389, Philips Journal of Research, 1980.

[12] P. Flandrin, Principe et mise en oeuvre de l'analyse temps-fréquence par la représentation de Wigner-Ville, Traitement du Signal, Vol 2, n°2, pp 143-151, 1985.

[13] P. Flandrin, W. Martin, A General Class of Estimators for the Wigner-Ville Spectrum of Non-Stationary Processes, System Analysis and Optimization of Systems, Springer, pp 15-23, 1984.

[14] W. Martin, P. Flandrin, Analysis of Non-Stationary Processes : Short-Time Periodograms versus a Pseudo Wigner estimator, Eusipco 83, Shüsser Eds, North Holland.

[16] P. Flandrin, N. Martin et al, Fiches Méthodes Temps-Fréquence, GT1 du GDR CNRS 'Traitement du Signal et des Images, 1991.

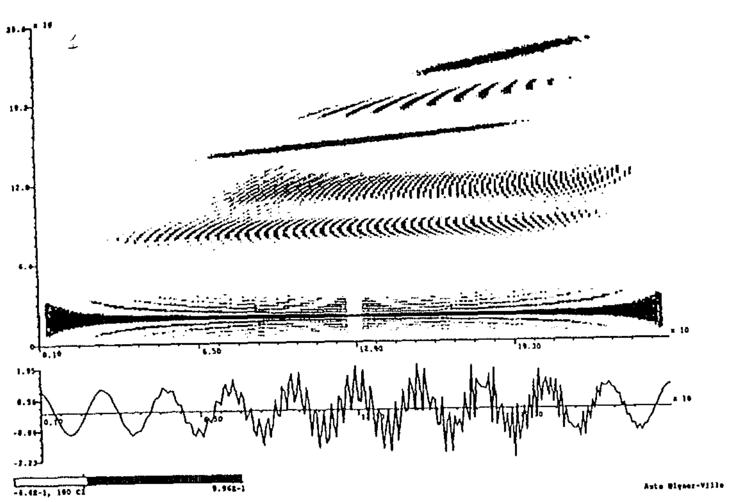
[17] P.Flandrin, some features of time-frequency representations of multicomponent Signals, Proc IEEE ICASSP, pp 41.B.4.1-4, 1984.

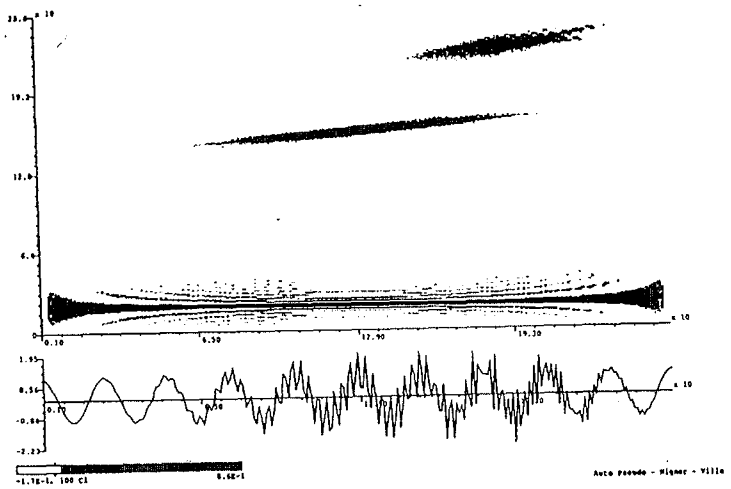
[18] P. Flandrin, Représentation Temps-Fréquence des Signaux Non-Stationnaires, thèse de doctorat d'état, INPG, 1987.

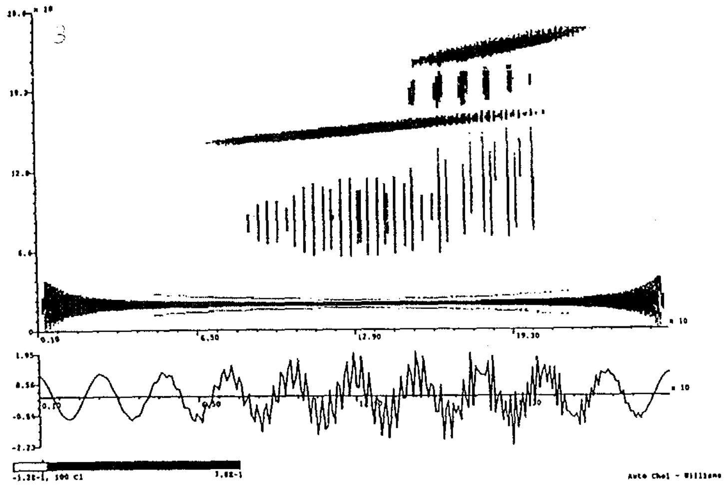
[19] F. Auger, C. Doncarli, Quelques Commentaires sur des Représentations Temps-Fréquence Proposées Récemment, RI LAN-ENSM 91.01, Janvier 91.

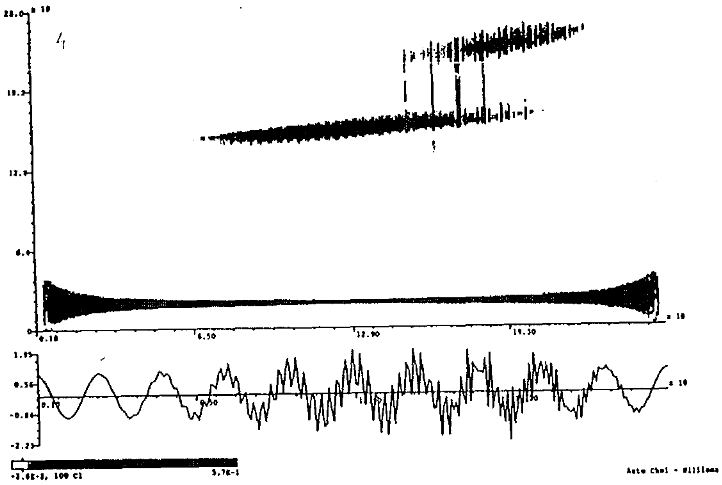
n°	Nom	condition
0	compatibilité avec les translations temporelles et fréquentielles	$\phi_{DR}(\xi,\tau)$ quelconque
1	compatibilité avec les changements d'échelle	$\forall\, b>0,\ \phi_{DR}(b\xi,\tau/b) = \phi_{DR}(\xi,\tau)$
2	compatibilité avec l'inversion temporelle	$\phi_{DR}(\xi,\tau) = \phi_{DR}(-\xi,-\tau)$
3	compatibilité avec la conjugaison complexe	$\phi_{DR}(\xi,\tau) = \phi_{DR}(\xi,-\tau)$
4	caractère réel de la RTF	$\phi_{DR}^*(\xi,\tau) = \phi_{DR}(-\xi,-\tau)$
5	causalité	$(\frac{\lvert\tau\rvert}{2} > t) \Rightarrow \phi_{TR}(t,\tau) = 0$
6	conservation de l'énergie	$\phi_{DR}(0,0) = 1$
7	conservation de l'énergie instantanée	$\phi_{DR}(\xi,0) = 1$
8	conservation du spectre	$\phi_{DR}(0,\tau) = 1$
9	conservation de la fréquence instantanée	$\phi_{DR}(\xi,0) = 1$ et $\frac{\partial\phi_{DR}}{\partial\tau}(\xi,0) = 0$
10	conservation du retard de groupe	$\phi_{DR}(0,\tau) = 1$ et $\frac{\partial\phi_{DR}}{\partial\xi}(0,\tau) = 0$
11	positivité	$\phi_{DR}(\xi,\tau) = \sum_k c_k\, A(h_k.h_k;\xi,\tau)$
12	réversibilité	$\phi_{DR}(\xi,\tau) \neq 0$
13	compatibilité avec les filtrages linéaires	$\phi_{DR}(\xi,\tau).\phi_{DR}(\xi,\tau') = \phi_{DR}(\xi,\tau+\tau')$
14	compatibilité avec les modulations de produit	$\phi_{DR}(\xi,\tau).\phi_{DR}(\xi',\tau) = \phi_{DR}(\xi+\xi',\tau)$
15	Formule de Moyal	$\lvert\phi_{DR}(\xi,\tau)\rvert^2 = 1$
16	conservation du support du signal	$(\frac{\lvert\tau\rvert}{2} < \lvert t\rvert) \Rightarrow \phi_{TR}(t,\tau) = 0$
17	conservation du support du spectre	$(\frac{\lvert\xi\rvert}{2} < \lvert\omega\rvert) \Rightarrow \phi_{DF}(\xi,\omega) = 0$
18	conservation des valeurs nulles du signal	$\phi_{DR}(\xi,\tau) = h_1(\tau).e^{-j\xi\tau/2} + h_2(\tau).e^{j\xi\tau/2}$
19	conservation des valeurs nulles du spectre	$\phi_{DR}(\xi,\tau) = G_1(\xi).e^{-j\xi\tau/2} + G_2(\xi).e^{j\xi\tau/2}$

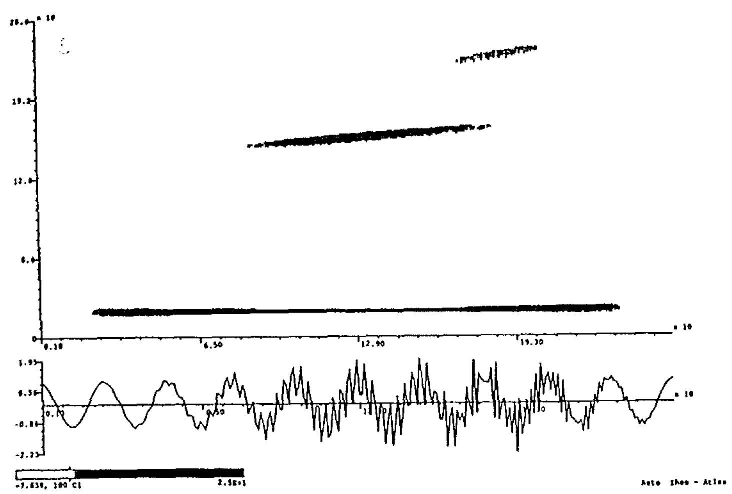
.bleau I : Propriétés théoriques d'une RTF et contraintes induites sur le noyau.

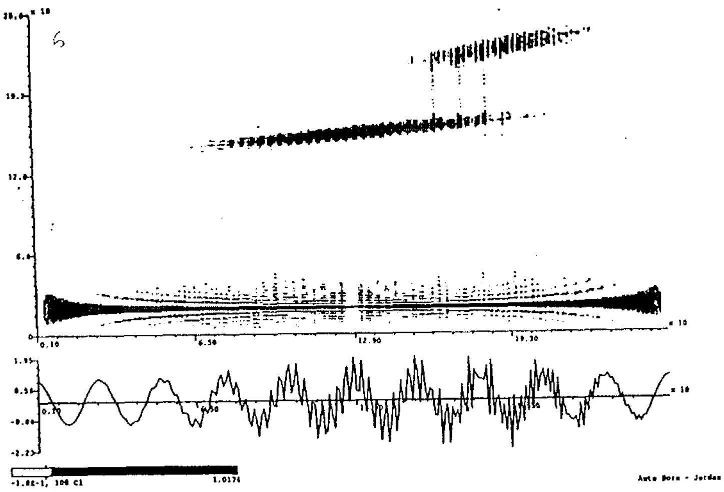

Auto Wigner-Ville

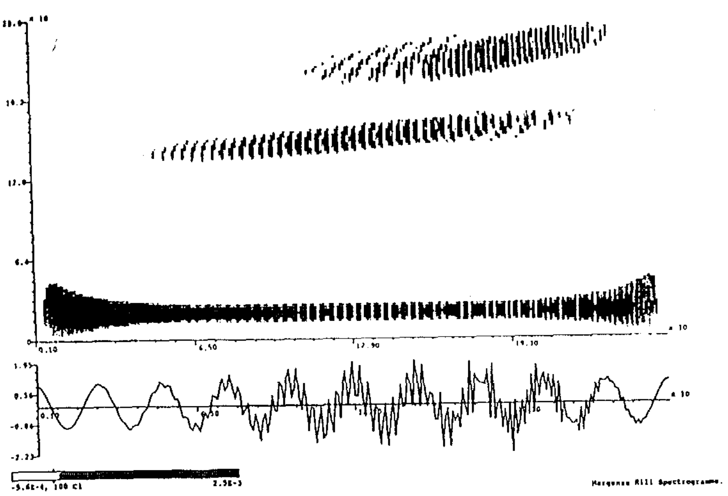

Auto Pseudo - Wigner - Ville

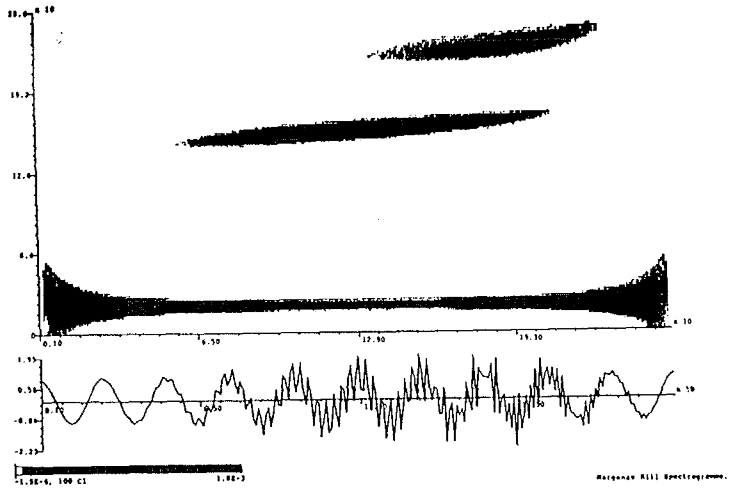

Auto Choi - Williams


Auto Choi - Williams


Auto Zhao - Atlas


Auto Born - Jordan


Margenau Hill Spectrogramme.


Margenau Hill Spectrogramme.