

EXTRAPOLATION DU SPECTRE D'UN SIGNAL A SUPPORT BORNE :
EQUIVALENCE AVEC LE FILTRAGE DE WIENER.
APPLICATION AUX ANTENNES SUPERDIRECTIVES

Didier Billon

THOMSON SINTRA Activités Sous-Marines
Route de Ste. Anne du Portzic, 29601 Brest Cédex, France

RÉSUMÉ

On montre que l'extrapolation d'énergie minimale du spectre d'un signal à support borné peut s'exprimer sous la forme d'un filtre de Wiener. On décrit les avantages de cette formulation et on donne un exemple d'application à la formation des voies des antennes réseau, pour lequel on évalue l'amélioration de directivité par rapport au traitement conventionnel.

1. INTRODUCTION

Soit un signal dont le spectre des fréquences n'est connu que dans une bande limitée. Construire à partir du spectre ainsi tronqué une estimation du signal meilleure que celle obtenue par transformée de Fourier inverse équivaut à le compléter par un spectre dont le support est en dehors de la bande des fréquences observables. Cette opération, dite extrapolation du spectre, n'a un sens qu'à condition de disposer en plus de la partie connue du spectre d'une information sur le signal permettant de l'effectuer de manière pertinente.

Ce papier traite de l'extrapolation du spectre d'un signal à support borné. C'est un problème classique qui apparaît dans la littérature le plus souvent sous sa forme duale : l'extrapolation d'un signal à bande limitée [1 à 4], i.e. dont le spectre est à support borné. La symétrie des transformées de Fourier directe et inverse ($TF^{-1} = TF^*$) rend équivalentes les deux formes, le choix de l'une ou l'autre étant dicté par l'application considérée où les notions de signal et de spectre sont en général définies sans ambiguïté.

La deuxième partie du papier est un rappel de l'exposé mathématique de l'extrapolation du spectre d'un signal à support borné, et de l'expression de la solution de norme minimale. On propose une définition du gain d'extrapolation.

On introduit dans la troisième partie un problème d'estimation linéaire optimale au sens de Wiener, i.e. qui minimise la variance

ABSTRACT

It is shown that minimal energy extrapolation of the spectrum of a bounded support signal can be formulated as a Wiener filter. Advantages of this formulation are described and an example of application to array antenna beamforming is given, the directivity improvement of which is evaluated with respect to conventional processing.

de l'erreur, d'un signal aléatoire blanc et stationnaire sur son support borné, à partir de son spectre tronqué. On montre qu'il admet la même solution que le précédent. L'intérêt de cette formulation du problème par rapport à l'extrapolation est sa plus grande généralité quant à la prise en compte du bruit d'observation et à la classe des signaux traités.

La quatrième partie est un exemple d'application dans le domaine du traitement spatial d'antenne. On considère un système actif cohérent (sonar ou radar). Le signal d'intérêt est le champ réfléchi dont le secteur angulaire est limité par le diagramme de directivité de l'émetteur. Les signaux des capteurs du réseau de réception constituent une version échantillonnée du spectre correspondant des fréquences spatiales. On fait le lien avec la formation adaptative des voies (ou des faisceaux) et on évalue le gain équivalent d'extrapolation du réseau défini dans la deuxième partie en fonction du rapport signal à bruit, de l'étendue angulaire du champ et du pas du réseau.

2. L'EXTRAPOLATION DE SPECTRE

On considère un signal $s(t)$ de support $[-T/2, T/2]$ dont on connaît le spectre sur la bande $[-B/2, B/2]$ sous la forme de N échantillons x_1, \dots, x_M . On cherche à estimer $s(t)$ sous la forme d'un signal échantillonné s_1, \dots, s_M . On a :



$$x_n = \sum_{m=1}^M s_m \exp(-j2\pi(n - \frac{N+1}{2}) \frac{B}{N} (m - \frac{M+1}{2}) \frac{T}{M}). \quad (1)$$

Dans la suite, on pose $\alpha = BT/N$. Le signal étant de durée finie T , l'échantillonnage de son spectre est correct si le pas d'échantillonnage B/N est inférieur à $1/T$, donc si on a $\alpha < 1$. M se rapportant au modèle supposé du signal, peut être choisi arbitrairement grand dès lors que la fréquence d'échantillonnage M/T de $s(t)$ est supérieure à la largeur B de la bande observée. On impose ici la condition $M > N$ qui, compte tenu de l'hypothèse $\alpha < 1$, suffit à garantir qu'on a bien $M/T > B$.

Posons $s = (s_1, \dots, s_M)'$ et $x = (x_1, \dots, x_N)'$, on peut réécrire l'équation (1) sous la forme matricielle

$$x = F_N s. \quad (2)$$

Soit \hat{s} une solution à l'équation (2) d'inconnue s . Il en existe une infinité à cause de la condition $M > N$ et de la condition $\alpha < 1$ qui garantit que F_N est non singulière. Le vecteur r de dimension $N + 2K$, K entier positif arbitraire, défini par

$$r = F_{N+2K} \hat{s} \quad (3)$$

est une extrapolation de la partie connue x du spectre de s , limitée à la bande $[-B/2, B/2]$ dans la bande $[-(1 + 2K/N)B/2, (1 + 2K/N)B/2]$ puisque, \hat{s} étant solution de (2), les N composantes centrales de r sont celles de x . Parmi les solutions de l'équation (2) on choisit celle de norme minimale dont l'expression est

$$\hat{s} = F_N^\dagger (F_N F_N^\dagger)^{-1} x, \quad (4)$$

et à laquelle correspond le spectre extrapolé

$$r = F_{N+2K} F_N^\dagger (F_N F_N^\dagger)^{-1} x. \quad (5)$$

Ce spectre ne dépend pas de la dimension M du modèle échantillonné du signal $s(t)$ dès lors que M est suffisamment grand. En effet, on calcule l'expression suivante des coefficients de la matrice $F_N F_N^\dagger$:

$$[F_N F_N^\dagger]_{n', n} = \frac{\sin(\pi(n' - n)\alpha)}{\sin(\pi(n' - n)\alpha/M)}. \quad (6)$$

On voit que $F_N F_N^\dagger$ tend vers $MA_{N,N}$ quand M tend vers l'infini, où $A_{N,N}$ est la matrice de terme général $\text{sinc}(\pi(n' - n)\alpha)$. D'où, pour M grand, l'expression de r :

$$r = A_{N+2K, N} A_{N, N}^{-1} x. \quad (7)$$

Notons enfin que pour M fixé, cette extrapolation de spectre n'a un sens que pour $N+2K < M/\alpha$ du fait de la périodisation du spectre liée à la nature discrète du signal.

L'estimation de s par transformée de Fourier inverse s'écrit

$$y = \frac{1}{N} F_N^\dagger x, \quad (8)$$

ou encore, en utilisant l'équation (1),

$$y = \frac{1}{N} F_N^\dagger F_N s. \quad (9)$$

L'équation correspondante pour l'estimation de s associée à l'extrapolation de spectre est obtenue à partir des équations (2) et (4):

$$\hat{s} = F_N^\dagger (F_N F_N^\dagger)^{-1} F_N s. \quad (10)$$

L'équation (9) s'interprète comme une équation de convolution reliant le signal s à son estimation y car la matrice $F_N^\dagger F_N/N$ est une matrice hermitienne de Toeplitz dont les coefficients de la première ligne sont les échantillons du noyau de convolution et s'écrivent

$$f_{m+1} = \frac{\sin(\pi m N \alpha / M)}{N \sin(\pi m \alpha / M)}, \quad 0 \leq m \leq M-1. \quad (11)$$

Ce n'est pas vrai en général pour l'équation (10) qui correspond à une convolution de noyau variable. Ceci nous amène à définir le gain en résolution η_m de l'extrapolation de spectre par rapport à la transformée de Fourier inverse sur l'échantillon m du signal :

$$\eta_m = \frac{f_1^{-2} \sum_{m'=1}^M f_{m'}^2}{g_{m,m}^{-2} \sum_{m'=1}^M g_{m,m'}^2} \quad (12)$$

où les $g_{m,m'}$ sont les modules des coefficients de la matrice $F_N^\dagger (F_N F_N^\dagger)^{-1} F_N$. η_m est le rapport de la largeur efficace du noyau de convolution associé à l'estimation du signal par transformée de Fourier inverse (équation (9)), à la largeur efficace au point m du noyau de convolution variable associé à l'extrapolation de spectre (équation (10)).

3. UN PROBLEME DE FILTRAGE DE WIENER

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, on considère maintenant que s est un bruit blanc stationnaire de matrice de covariance

$$E[s s^\dagger] = \gamma^2 I_M. \quad (13)$$

I_M étant la matrice identité d'ordre M . On cherche à estimer s par une transformation linéaire de matrice W^\dagger appliquée au spectre observé x , optimale au sens de Wiener, i.e. qui minimise l'erreur quadratique moyenne

$$\varepsilon^2 = E[|s - W^\dagger x|^2]. \quad (14)$$

La solution est celle donnée par l'équation dite de Wiener-Hopf :

$$W = E [x x^\dagger]^{-1} E [x s^\dagger] . \quad (15)$$

En utilisant les équations (2), (13) et (15) on obtient l'expression suivante du signal estimé :

$$\begin{aligned} \hat{s} &= W^\dagger x \\ &= F_N^\dagger (F_N F_N^\dagger)^{-1} x \end{aligned} \quad (16)$$

qui est identique à l'expression du signal estimé par extrapolation de spectre donnée par l'équation (4).

Le problème qui vient d'être exposé est donc équivalent à l'extrapolation de spectre en ce sens qu'il admet la même solution. Au delà de l'intérêt théorique qu'il peut y avoir à unifier deux aspects du traitement du signal traités classiquement de manière séparée, cette équivalence conduit à des considérations d'intérêt plus pratique sur l'emploi de l'un ou l'autre modèle d'estimation. Le modèle probabiliste qui sous-tend l'estimation par filtrage de Wiener peut être rendu plus général afin de prendre en compte un éventuel bruit d'observation. Pour ce faire, l'équation (2) est remplacée par

$$x = F_N s + z \quad (17)$$

où z est un bruit d'observation à moyenne nulle et indépendant de s . Dans le cas d'un bruit blanc de matrice de covariance $E [z z^\dagger] = \sigma^2 I_N$, on a

$$W = (F_N F_N^\dagger + \frac{\sigma^2}{\gamma^2} I_N)^{-1} F_N . \quad (18)$$

On reconnaît dans cette dernière équation une modification classique de la solution de l'extrapolation de spectre consistant à remplacer dans l'expression (4) la matrice $F_N F_N^\dagger$ par la matrice $F_N F_N^\dagger + \beta^2 I$ afin de remédier à son mauvais conditionnement [5]. β^2 est généralement choisi, dans ce cas, de façon empirique, alors qu'il est déterminé dans (18) par le rapport signal à bruit.

Une généralisation supplémentaire du modèle probabiliste, dont on verra un exemple d'intérêt dans la suite de ce papier, porte sur la matrice de covariance du signal à estimer et consiste à remplacer son expression (13) par l'expression plus générale

$$E[s s^\dagger] = \gamma^2 S \quad (19)$$

où S est une matrice (M, M) connue. Toujours dans le cas d'un bruit blanc, l'équation (15) devient alors

$$W = (F_N S F_N^\dagger + \frac{\sigma^2}{\gamma^2} I_N)^{-1} F_N S . \quad (20)$$

4. APPLICATION AUX ANTENNES SUPERDIRECTIVES

On considère un système actif d'imagerie cohérente, radar ou sonar, à deux dimensions : distance et angle. A un instant de

réception fixé, correspondant à une distance, on cherche à estimer un modèle discret s_1, \dots, s_M de l'amplitude complexe du champ rétrodiffusé correspondant à M directions d'arrivée sur l'antenne de réception qui est un réseau linéaire périodique de N capteurs espacés de L/N . Les M directions repérées par le sinus de l'angle qu'elles forment avec le plan orthogonal au réseau échantillonnent régulièrement un intervalle $[-U/2, U/2]$. Soit x_1, \dots, x_N les amplitudes complexes des signaux des capteurs à cet instant. En faisant le changement de notation $B = L/\lambda$, λ étant la longueur d'onde, et $T = U$, la relation entre x et s définis comme précédemment est exprimée, en l'absence de bruit, par les équations (1) et (2) (en prenant l'origine spatiale des phases au centre du réseau, et à condition que le système soit à bande suffisamment étroite et que l'antenne soit en champ lointain, conditions auxquelles on peut généralement se ramener dans la pratique).

U est choisi suffisamment grand pour que l'énergie émise par le système, et donc l'énergie rétrodiffusée, en dehors du secteur angulaire couvert par le modèle soit négligeable. On a, au plus, $U = 2$, ce qui correspond à une modélisation du champ sur un demi-espace. Soit S la matrice carrée diagonale d'ordre M dont les coefficients diagonaux $\sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2$ sont les valeurs du diagramme de directivité en puissance de l'émetteur. On considère que s est un vecteur aléatoire centré de matrice de covariance $\gamma^2 S$ (équation (19)). Cette modélisation est pertinente lorsqu'on n'a pas de connaissance a priori sur le champ réfléchi autre que sa modulation angulaire par le diagramme de directivité de l'émetteur.

L'équation (20) fournit l'expression de la matrice W de l'opérateur d'estimation linéaire optimale au sens de Wiener de s à partir de x en présence d'un bruit blanc z (équation (17)). L'estimation de la $m^{\text{ème}}$ composante de s s'exprime sous la forme

$$s_m = w_m^\dagger x \quad (21)$$

où w_m est le $m^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice W .

L'équation (15) permet d'écrire w_m sous la forme

$$w_m = \gamma^2 \sigma_m^2 E [x x^\dagger]^{-1} d_m \quad (22)$$

où d_m est le $m^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice F_N , soit compte tenu de la relation (2), le vecteur du réseau associé à la $m^{\text{ème}}$ direction du modèle. Cette expression de w_m est à un coefficient scalaire près celle du vecteur de formation de voie adaptative dans cette direction [6].

La différence avec l'antenne adaptative est que la matrice de covariance n'est pas estimée mais déterminée a priori par la matrice S , i.e. le diagramme de directivité de l'émetteur, et le rapport σ^2/γ^2 (cf. équation (18)) qui est l'inverse du rapport signal à bruit multiplié par la trace de S . Dans ce qui suit, nous appelons la formation des voies associée à W défini par l'équation (20) "formation des voies



adaptée" (implicitement au diagramme de directivité de l'émetteur et au rapport signal à bruit).

On revient maintenant au cas d'école où $S = I$, correspondant à un diagramme de l'émetteur rectangulaire de largeur U . La relation entre le vecteur des voies adaptées \hat{s} et le champ rétrodiffusé s est

$$\hat{s} = W^\dagger F_N s. \tag{23}$$

où W est donné par l'équation (18). Le gain de directivité relatif de la voie adaptée s_m par rapport à la voie conventionnelle y_m définie par l'équation (9), dans le secteur $[-U/2, U/2]$, est η_m exprimé par l'équation (12), les $g_{m,m}$ étant ici les carrés des modules des coefficients de la matrice $W^\dagger F_N$, leur définition donnée dans la partie 2 correspondant au cas particulier $\sigma^2 = 0$. Il est important de noter ici qu'il s'agit bien d'un gain de directivité relatif au sens de la théorie des antennes. Quand η_m est supérieur à 1, on peut donc parler d'antenne superdirective dans le secteur $[-U/2, U/2]$. Le tableau 1 donne les valeurs de η_{m_0} , m_0 étant l'indice de la voie centrale (M impair et $m_0 = (M+1)/2$) en fonction du nombre de capteurs N , du rapport UL/λ entre la largeur du secteur de l'émetteur et la largeur du diagramme de diffraction de l'antenne de réception, et du rapport signal à bruit $\rho = 10 \log (M\gamma^2/\sigma^2)$. M est choisi suffisamment grand pour ne pas avoir d'influence.

La figure 1 montre que ce gain de directivité relatif se traduit par une similitude des diagrammes de directivité de la voie adaptée et de la voie conventionnelle d'une antenne plus longue d'un facteur η_{m_0} .

N	6	9	12	25	40	60	100	$UL/\lambda = 6$
η_{m_0}	1	1.15	1.20	1.24	1.27	1.28	1.28	$\rho = 30 \text{ dB}$
UL/λ	40	20	10	8	6	5	4	$N = 40$
η_{m_0}	1	1.06	1.16	1.19	1.27	1.34	1.42	$\rho = 30 \text{ dB}$
ρ	0	6	10	20	30	∞	(dB)	$N = 40$
η_{m_0}	1.06	1.11	1.14	1.21	1.27	1.32(*)		$UL/\lambda = 6$

TABLEAU 1

(*) $N = 25$, valeur extraite de [4]

Le paramètre le plus sensible est UL/λ , le gain variant peu au-delà d'un certain rapport signal à bruit et d'un certain facteur de suréchantillonnage spatial de l'antenne $N\lambda/LU$ (i.e. α^{-1} , cf. partie 2). Bien que ce point n'ait pu être exposé ici, il est important de noter que le gain de directivité η_m est obtenu au prix d'une perte de rapport signal à bruit de la voie adaptée par rapport à la voie conventionnelle, mise en évidence par une remontée importante du diagramme de directivité de la voie adaptée en dehors du secteur $[-U/2, U/2]$ (figure 1).

5. CONCLUSION ET REMERCIEMENTS

On a montré que l'extrapolation de spectre d'un signal à support borné équivaut à un filtrage de Wiener qui peut être généralisé pour tenir compte du bruit et s'appliquer à une classe plus étendue de signaux. Le traitement d'antenne correspondant apporte dans le cas d'un système actif d'imagerie cohérente un gain de directivité sensible par rapport au traitement conventionnel, à condition que le diagramme de directivité de l'émetteur soit étroit et le rapport signal à bruit élevé.

L'auteur remercie la DRET pour le soutien qu'elle a apporté aux travaux présentés ici, et M. R. Prost de l'INSA de Lyon pour les nombreuses discussions sur la déconvolution et l'extrapolation de spectre qui ont suscité les idées à la base de ce papier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.K. Jain, S. Ranganath – Extrapolation algorithms for discrete signals with application in spectral estimation IEEE Tr. ASSP, 1981, v. 29, n° 4.
- [2] J.A. Cadzow – An extrapolation procedure for band limited signals. IEEE Tr. ASSP, 1979, v. 27, n° 1.
- [3] A. Papoulis – A new algorithm in spectral analysis and band limited extrapolation IEEE Tr. CS, 1975, v. 22, n° 9.
- [4] R. Prost – Contribution à l'élaboration d'algorithmes itératifs discrets super-résolvants de déconvolution avec contraintes. Thèse INSA Lyon, 1987.
- [5] E.J. Diethorn, D.C. Munson – A linear, time-varying system framework for noniterative discrete-time band-limited signal extrapolation, IEEE Tr. SP, v. 39, n° 1, 1991.
- [6] D. Billon – Gain asymptotique du traitement spatial adaptatif en sonar actif. GRETSI 1987.

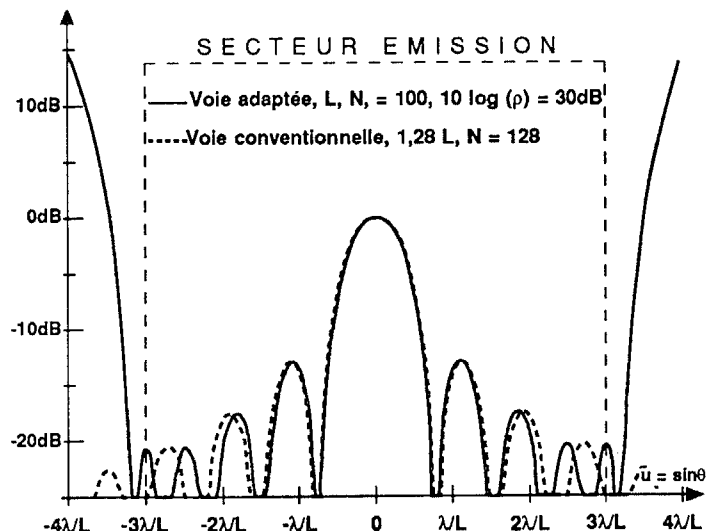


Figure 1