



# ONDELETTES À SUPPORT COMPACT D'ORDRE ÉLEVÉ.

## APPLICATIONS AUX ONDELETTES ARBORESCENTES

Jean Marie NICOLAS, Thierry LEFEBVRE

THOMSON SINTRA ASM

1, avenue Aristide Briand, 94117 ARCUEIL Cedex, FRANCE

**Résumé :** Les ondelettes à support compact, introduites par I. Daubechies, permettent de nouvelles approches en traitement de signal. Notre travail a consisté d'une part à calculer ces ondelettes à des ordres élevés (32), et, d'autre part, à utiliser ces ondelettes dans la "décomposition arborescente".

**Abstract :** Compactly supported wavelets, introduced by I. Daubechies, allow new approaches in signal processing. In this work, we have firstly computed high order wavelet filters (until 32<sup>th</sup>), then applied these wavelets in the "arborescent algorithm".

L'analyse en ondelettes est un outil récent du Traitement du Signal : depuis son introduction par Morlet pour l'analyse de signaux sismiques en 1982, mathématiciens et physiciens ont élaborés les fondements théoriques et les algorithmes propres à cette méthode. En particulier, les principes d'une catégorie particulière d'ondelettes : les "ondelettes à support compact" ont été élaborés, grâce en particulier aux travaux d'Ingrid Daubechies –qui a présenté les premières bases orthonormées d'ondelettes à support compact au premier symposium "Ondelettes" à Marseille en 1987– de sorte que de nombreuses applications de ces ondelettes peuvent être menées à bien en Traitement du Signal. A ce sujet, il est intéressant de noter qu'historiquement la première base d'ondelettes jamais élaborée fut la base de Haar (1912) qui est la base d'ondelettes à support compact d'ordre 1.

Si les travaux théoriques sur les ondelettes à support compact ont permis des avancées scientifiques décisives –outre les travaux d'I. Daubechies [Dau88], il faut mentionner les travaux de Resnikoff [Res90] et ceux d'Evangelista [Eva89] qui, selon des optiques diamétralement différentes, couvrent toutes les ondelettes à support compact possibles–, il est intéressant de noter que peu d'applications d'ondelettes à support compact à des sujets "industriels" ont réellement été effectués : on peut néanmoins relever par exemple les travaux du LEP en traitement d'images échographiques [Bon88], de Thomson Sintra ASM en classification de signaux acoustiques sous marins [LNG89], [NLL89], et de AT&T Bell Labs.

Aussi il nous a paru intéressant d'étendre la panoplie des ondelettes à support compact fournie dans l'article d'I. Daubechies [Dau88] : celui ci fournit les coefficients d'ondelettes d'ordre 1 à 10, il nous a semblé constructif de calculer et d'analyser les ondelettes à support compact d'ordre supérieur. Enfin nous avons utilisé ces ondelettes dans la "décomposition arborescente" [NDL91].

## 1 Ondelettes d'ordre élevé

Afin d'étendre les résultats d'I. Daubechies, nous avons appliqué la méthode qu'elle détaille dans son article [Dau88], en vue d'obtenir les ordres les plus élevés possibles. En fait, avec cette méthode, nous avons calculé et analysé les ondelettes de Daubechies jusqu'à l'ordre 32. Pour en calculer les coefficients, nous avons utilisé deux méthodes : des programmes FORTRAN traditionnels (qui ont nécessité des étapes en quadruple précision pour pouvoir être menés à bien) et des programmes en calcul formel (en MAPLE™). De curieuses propriétés de convergence et de non convergence d'algorithme ont ainsi été mises en évidence : en particulier nous avons noté des instabilités numériques autour de la valeur 23, et nous n'avons pu dépasser l'ordre 32, soit que la précision requise était impossible (d'où des erreurs dans la détermination des zéros d'un polynôme par un sous programme IMSL), soit que, dans le cas de MAPLE, la mémoire requise n'était pas suffisante sur notre machine.

Comme on pouvait s'y attendre, l'allure visuelle de ces



ondelettes, fractales à l'ordre 2, se lissent de plus en plus au fur et à mesure que l'ordre augmente. Ce critère peut être affiné par une analyse en fréquence : en effet, puisqu'un filtre d'ondelette peut être perçu comme un filtre passe-haut et un filtre d'échelle comme un passe bas, on observe, comme prévu, que le filtre d'ondelette est un filtre passe-haut d'autant meilleur que l'ordre est élevé et que le support temporel s'allonge.

En vue de comparer ces filtres élémentaires avec d'autres filtres connus dans le monde du Traitement du Signal, il est intéressant de constater par exemple la propriété suivante : les zéros du filtre d'échelle sont situés aux mêmes valeurs que les zéros de la fenêtre naturelle (qui est en fait l'échelle d'ordre 1), tout comme les secondaires. En particulier, on peut en déduire une loi expérimentale sur le niveau du premier lobe secondaire, qui, si l'on incrémente l'ordre du filtre, décroît grossièrement de 3db. La figure 1 présente superposés les spectres de filtre d'échelle d'ordre 1 (fenêtre naturelle) à 32.

Soulignons que nous nous sommes volontairement restreints aux ondelettes de Daubechies : il est certain que d'intéressants résultats pourraient être obtenus en utilisant le formalisme de Resnikoff et le produit de Polen.

## 2 Application aux ondelettes arborescentes

L'application de ces ondelettes de haute régularité apporte un éclairage nouveau sur les "Ondelettes arborescentes" [NDL91] : rappelons brièvement que cette décomposition, qui utilise une variante originale de l'algorithme de Mallat, conduit à une représentation "temps-échelle" non dyadique (figure 2). Notons qu'une interprétation originale peut être émise en terme d'opérateurs I (pour la convolution par l'échelle) et D (pour la convolution par l'ondelette) munis de la loi interne (non commutative)  $\clubsuit$  : sous cette optique, I est assimilable à une intégration numérique et D à une dérivation numérique (c'est le cas pour l'ordre 1). Sur la figure 3, qui correspond à une profondeur de décomposition de 2, on peut observer que l'on obtient deux opérateurs combinant les opérateurs élémentaires I et D :  $D \clubsuit I$  et  $D \clubsuit I$ . Ce sont en fait deux appréciations différentes pour une notion de dérivée : dans le premier cas, on calcule la dérivée du signal moyen, et, dans le second, la moyenne de la dérivée.

Dans le cas d'ordres élevés, on constate alors que si une base d'ondelettes arborescentes s'apparente formellement à un banc de filtre à  $\delta f = cst$ , l'allure des filtres élémentaires – en particulier l'allure des lobes secondaires – est très éloignée des standards des filtres passe-bande utilisés en traitement de signal. Pour illustrer rapidement ceci, prenons le cas d'une profondeur 5 : il y a alors 32 fonctions de base : 16 d'entre elles correspondant à l'octave la plus élevée, 8 une octave en dessous, 4 deux octaves

en dessous, 2 trois octaves en dessous, 1 quatre octave en dessous, la fonction restante correspondant au filtre passe-bas. La figure 4 se restreint aux 8 ondelettes de type  $x \clubsuit x \clubsuit x \clubsuit I \clubsuit D$  (avec  $x=I$  ou  $x=D$ ), et propose pour chaque fonction de la base la norme de son spectre (en échelle logarithmique – le paramètre "ordre fréquentiel" indiquant son classement selon la fréquence moyenne –) : on peut ainsi constater une distribution pour le moins curieuse des lobes secondaires, alors que le secondaire de l'échelle d'ordre 20 est environ à -65db.

Divers essais en classification de bruits impulsifs sous-marins de faible durée, (traités comme en [NLL89]) ont montré qu'il était préférable de se cantonner, pour ce genre d'applications, à des ondelettes d'ordre 3 à 6.

### Remerciements

Ce travail a été effectué dans le cadre d'un contrat avec le Ministère de la Recherche et de la Technologie (décision 88S1112).

Nous tenons à remercier Monsieur Eric Fabre pour sa précieuse collaboration dans le cadre de la recherche des "ordres élevés".

### Références

- [Bon88] O. Bonnefous. Wavelet decomposition and re-composition of echographic images. Dans *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1988.
- [Dau88] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLI:909–996, 1988.
- [Eva89] G. Evangelista. Wavelet transforms and wave digital filters. *Dept. of Electrical Engineering, University of California, Irvine*, to be published, 1989.
- [LNG89] A. Lemer, J.M. Nicolas, et P. Giancone. Identification automatique de bruits impulsifs sous-marins. Dans *GRETSI*, pages 403–406, 1989.
- [NDL91] JM Nicolas, JC Delvigne, et A Lemer. Automatic identification of transient biological noises in underwater acoustics using arborescent wavelets and neural network. Dans *Second colloque Ondelettes, Marseille, 29 mai- 3 juin 1989*, à paraître, 1991.
- [NLL89] JM Nicolas, A Lemer, et D. Legitimis. Identification automatique de bruits impulsifs en acoustique sous-marine par réseaux multicouches. Dans *Proc. Neuro Nimes*, pages 269–278, 1989.
- [Res90] H.L. Resnikoff. *Foundations of arithmetic analysis : Compactly supported wavelets and the wavelet group*. Preprint Aware Inc., 1990.

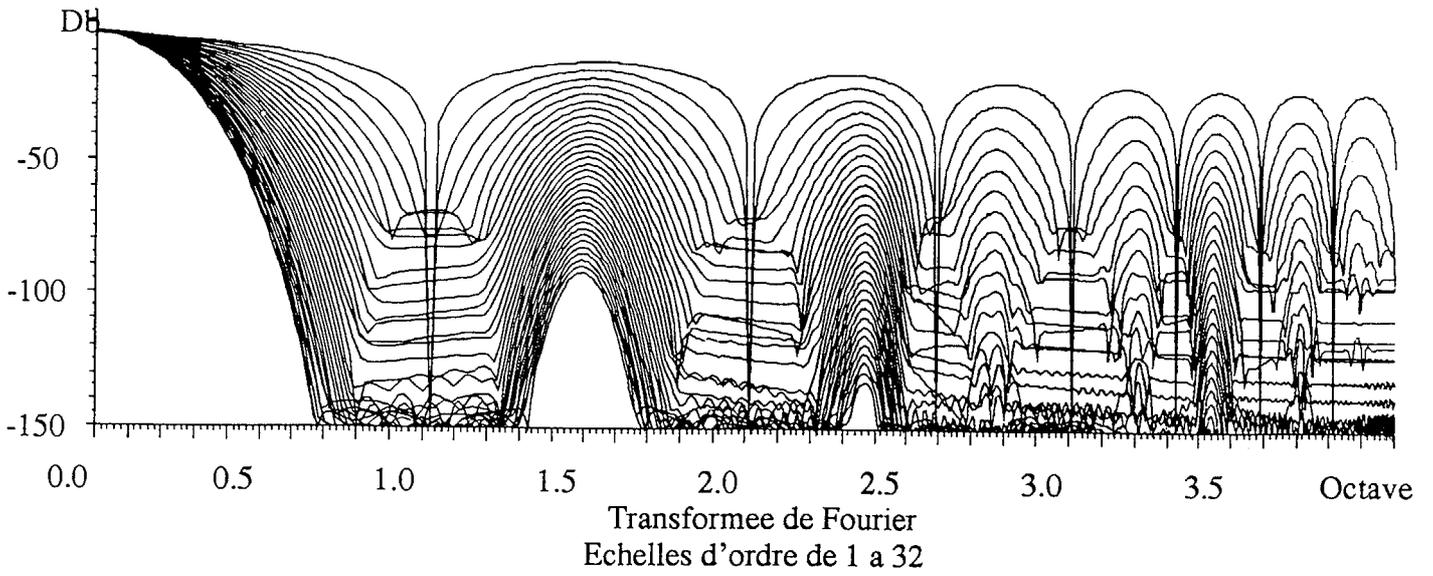


Figure 1 : Spectres comparés des filtres d'échelle

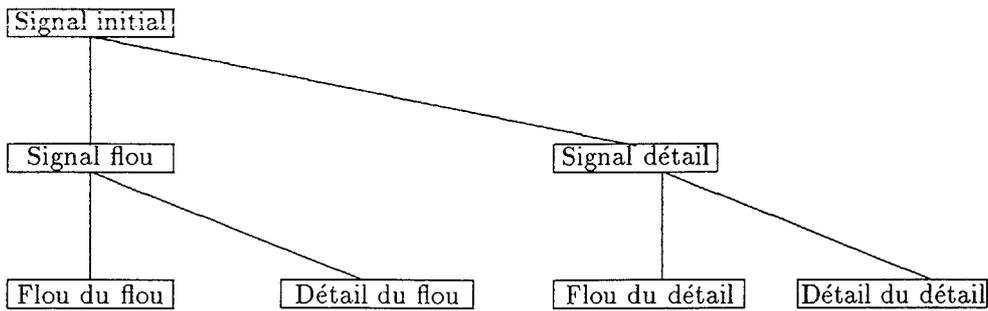


Figure 2 : Décomposition arborescente

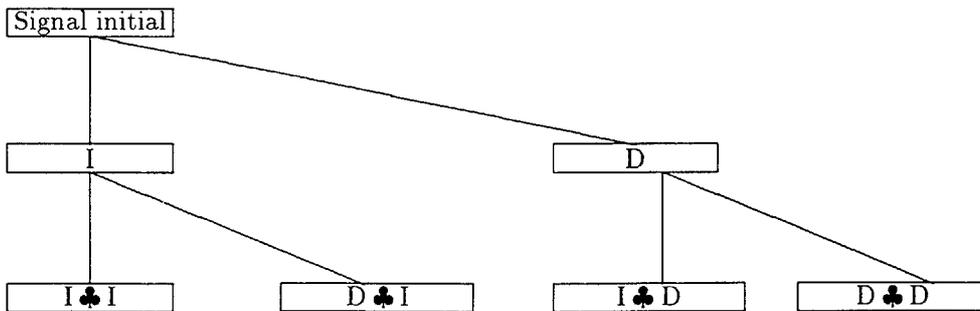


Figure 3 : Décomposition arborescente : autre interprétation



## Ondes arborescentes d'ordre :20

Profondeur 5 Nombre de bandes d'octave 8

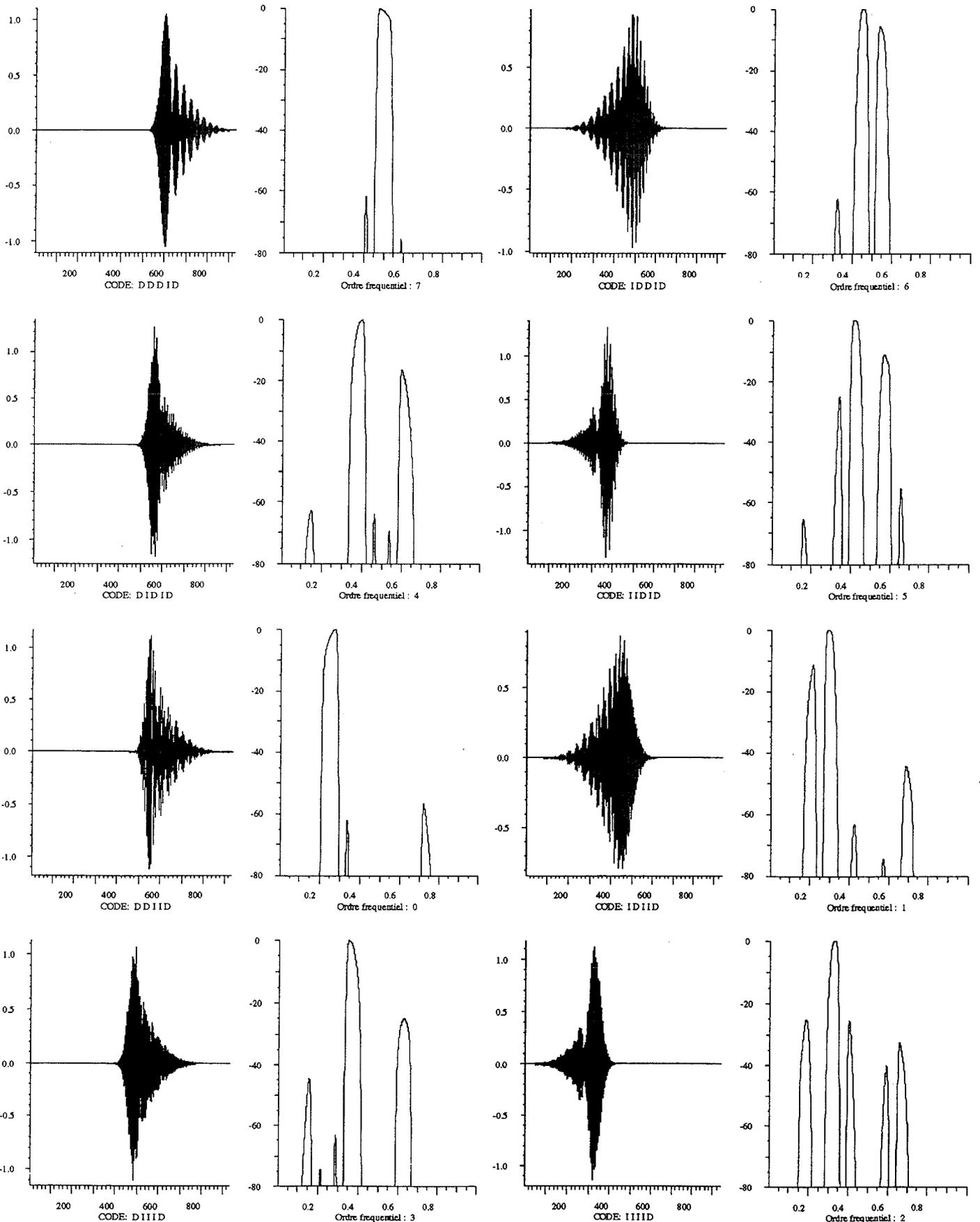


Figure 4