

**ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES
D'UN NOYAU MULTILINEAIRE.
APPLICATION A UNE NOUVELLE REPRESENTATION
TEMPS-FREQUENCE DE SIGNAUX NON GAUSSIENS**

Patrick Duvaut, Claude Jorand

**ETIS, ENSEA, 1, allée des Chênes Pourpres
95014 Cergy Pontoise cedex, France**

Résumé. Cet article introduit une nouvelle représentation temps-fréquence dite "haute résolution". Celle-ci évite le dilemme classique de la représentation de Wigner-Ville que traduit le compromis obligé entre les interférences et la résolution. Elle s'obtient après une analyse en composantes indépendantes du noyau bilinéaire de la transformation de Wigner-Ville.

Introduction

Parmi les méthodes d'étude temps-fréquence des signaux, la Transformation de Wigner-Ville (notée TWV) [1] occupe une place prépondérante car elle atteint la précision maximale dans le plan d'analyse [2]. Néanmoins, son principal défaut est de générer des interférences entre les différentes composantes temporelles et fréquentielles. L'importance de ces artefacts peut être réduite par des méthodes classiques de lissages, mais au prix d'un compromis entre la lisibilité et la résolution [3]. Ces idées sont très rapidement rappelées dans le § 1. Les techniques de lissage, traitement d'images y compris [4], peuvent être qualifiées de traitements *a posteriori*, dans la mesure où elles interviennent après une transformation de Fourier.

L'approche novatrice que nous proposons vise à éliminer les interférences à leur source c'est-à-dire au sein du noyau complexe bilinéaire des données. L'algèbre de Kronecker [5] permet tout d'abord de réécrire la TWV sous forme d'un filtrage quadratique complexe, isolant ainsi le noyau "signal" source des artefacts. Ce point est exposé dans le second paragraphe. Une analyse en composantes indépendantes de ce noyau fondée sur la diagonalisation d'un tenseur cumulant d'ordre quatre supprime les artefacts. Le théorème qui justifie ce résultat fait l'objet du paragraphe 3. Des simulations numériques destinées à illustrer l'amélioration considérable de la lisibilité de la nouvelle représentation complètent, pour finir, le § 3.

1. La Transformation de Wigner Ville simple et généralisée

La TWV associée à tout signal $x(t)$ la forme bilinéaire dépendant du temps t et de la fréquence v

Abstract. This paper introduces a new high resolution time frequency representation. It resolves the classical dilemma of the Wigner distribution : a lot of interference or a lost of resolution. It is obtained after an independent component analysis of the bilinear kernel of the Wigner distribution.

$$W_x(t,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-j2\pi v\tau} \cdot d\tau$$

où $*$ représente l'opération de conjugaison complexe. On voit immédiatement que lorsque $x(t)$ est constitué d'une somme de

signaux, soit $x(t) = \sum_{i=0}^p x_i(t)$, on peut séparer la TWV en deux sommes

$$W_x(t,v) = \sum_{i=0}^p W_{x_i}(t,v) + \sum_{j \neq i} W_{x_i x_j}(t,v)$$

avec

$$W_{x_i x_j}(t,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x_j^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-j2\pi v\tau} \cdot d\tau$$

La contribution de ce dernier terme, somme de transformées croisées, peut être réduite en tirant profit de sa structure fortement oscillatoire. En considérant des lissages temporels et/ou fréquentiels, on est amené à définir la transformation dite Pseudo Wigner Ville Lissée (PWVL) :

$$PWVL_x(t,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau,\eta) \cdot W_x(t-\tau, v-\eta) \cdot d\tau \cdot d\eta$$

La fonction $\varphi(t,v)$ peut avoir un degré de liberté, comme dans le cas du spectrogramme, ou deux (lissages séparés en temps et fréquence, fonctions bidimensionnelles) [2].

Bien que des critères d'optimisation puissent être appliqués - cf par exemple la référence [7] -, il n'en reste pas moins vrai qu'une dégradation de la résolution est inévitable.



Pour être plus complet, nous devons aussi mentionner les techniques de traitement d'images [4] qui permettent d'utiliser le fait que les interférences sont situées au centre des motifs qui leur donnent naissance. En effet, [2]

$$\left| W_{x_i, x_j}(t, v) \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t + \frac{\tau}{2}, v + \frac{\eta}{2}) \cdot W_x^*(t - \frac{\tau}{2}, v - \frac{\eta}{2}) \cdot dt \cdot d\eta$$

2. Algèbre de Kronecker et TWV

2.1 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices [5] étant abondamment utilisé dans la suite, notamment lors de l'élaboration de la TWV haute résolution, TWVHR, nous rappelons quelques identités le concernant. Tout d'abord, il se définit par :

$$C = A \otimes B$$

où

$$[C]_{i,j} = a_{i,j} : B$$

désigne l'élément de la i-ème ligne-bloc et j-ème colonne-bloc de C. Parmi les propriétés importantes de cet opérateur on a de plus

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = A \cdot C \otimes B \cdot D$$

2.2 Vecteur multilinéaire

Soit v , un vecteur de M composantes complexes. On définit le vecteur multilinéaire v_p de degré p , de taille M^p , par $p-1$ produits successifs :

$$v_p = v \otimes v^* \otimes v \otimes v^* \otimes \dots$$

Le vecteur multilinéaire jusqu'au degré p , de taille $\frac{M(M^p-1)}{M-1}$ est défini par

$$V_p = [v_1^t \ v_2^t \ \dots \ v_p^t].$$

2.3 Réécriture de la transformation de Wigner-Ville

On considère la TWV discrète [2] d'un signal $x[n]$, $n \in [-N+1, N-1]$:

$$W[n, v] = \sum_{m=-N+1}^{N-1} x[n+m] \cdot x^*[n-m] \cdot \exp(-j4\pi v m)$$

Conformément aux notations du § 2.2., on obtient :

$$W(n, v) = w_2^\dagger(v) \cdot x_2^w[n]$$

avec

$$w_2(v) = \text{vec}\{E(v)\}$$

Chaque bloc de w_2 est construit à partir de la matrice $E(v)$ telle que :

$$[E(v)]_{r,q} = \exp(j4\pi v(N-q)) \cdot \delta(r+q-2N)$$

et

$$x_2^w = x^w[n] \otimes x^w[n]$$

$$[x^w[n]]_r = x[n+N-r]$$

avec

$$1 \leq r \leq 2N-1, \quad 1 \leq q \leq 2N-1.$$

L'intérêt de cette forme est d'assimiler la TWV à un filtrage quadratique complexe, donc de séparer les données bilinéaires de l'opérateur de Fourier.

3. La TWV Haute Résolution

3.1 Théorème

Soit un vecteur x à valeurs complexes, ayant la forme doublement orthogonale

$$x = \sum_{k=1}^p a_k \cdot s_k$$

où les $\{a_k\}$ sont des variables aléatoire statistiquement indépendantes, et les $\{s_k\}$ des vecteurs orthogonaux, alors la décomposition en valeurs propres du tenseur cumulant de ses vecteurs multilinéaires associés jusqu'au degré Q , x_Q , s'écrit :

$$\text{CUM}[x_Q x_Q^\dagger] = \sum_{k=1}^p \gamma_{2Q,k} s_{Q,k} s_{Q,k}^\dagger$$

où

$$\gamma_{2Q,k} = \text{CUM}[|a_k|^{2Q}]$$

et où $s_{Q,k}$ est un vecteur multilinéaire de la forme donnée en 2.2.

Preuve : d'après la définition donnée en 2.3, on a

$$x_Q \cdot x_Q^\dagger = \sum_{i_Q} \sum_{k_Q} a_{i_1} a_{k_1}^* \dots a_{i_Q} a_{k_Q}^* (s_{i_1} \otimes \dots \otimes s_{i_Q}) \cdot (s_{k_1} \otimes \dots \otimes s_{k_Q})^\dagger$$

Il ne subsiste dans le développement de l'expression du tenseur cumulant $\text{CUM}[x_Q x_Q^\dagger]$ que les termes en $s_{Q,k} s_{Q,k}^\dagger$ car les VA a_k sont mutuellement indépendantes par hypothèse. D'autre part, la définition du produit de Kronecker et l'hypothèse d'orthogonalité euclidienne des s_k entraînent l'orthogonalité des vecteurs $s_{Q,k}$. La forme de $\text{CUM}[x_Q x_Q^\dagger]$ qui découle des remarques précédentes a donc toutes les caractéristiques d'une représentation spectrale. Celle-ci étant de plus unique, on en déduit le théorème annoncé.

3.2 La TWV Haute Résolution, TWVHR

Le point de départ se trouve contenu dans l'expression suivante donnée en 2.3 :

$$W(n, v) = w_2^\dagger(v) \cdot x_2^w[n]$$

Le noyau $x_2^w[n]$ est remplacé par une sommation de ses composantes indépendantes [8], opération notée $I[\cdot]$ qui émane du théorème du § 3.1. On a donc

$$W(n, \nu) = w_2^\dagger(\nu) \cdot I[x_2^w[n]]$$

Dans la mesure où les cumulants d'ordre supérieur à deux d'une variable aléatoire gaussienne sont nuls, la méthode préconisée ne s'adresse qu'à des sources non gaussiennes.

3.3. Simulations

Nous présentons ci-après quelques comparaisons de résultats entre la TWV non lissée et notre approche Haute Résolution qui comprend donc deux phases : l'estimation des composantes indépendantes du signal initial, réalisée par l'algorithme de Guy Desodt et Daniel Müller [10], et la transformation du type Fourier, selon 2.3.

Le premier signal est constitué d'une somme de deux sinusoïdes à fréquences modulées linéairement. Sur la TWV, (voir figure 1), on remarque les termes d'interférences au centre des motifs significatifs, c'est-à-dire les droites de modulation, alors que sur l'analyse haute résolution donnée sur la figure 2, le terme de TWV croisée est absent.

Le second signal testé conserve les composantes du premier, avec en supplément, deux autres sources : l'une modulée, l'autre non. Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures 3 et 4.

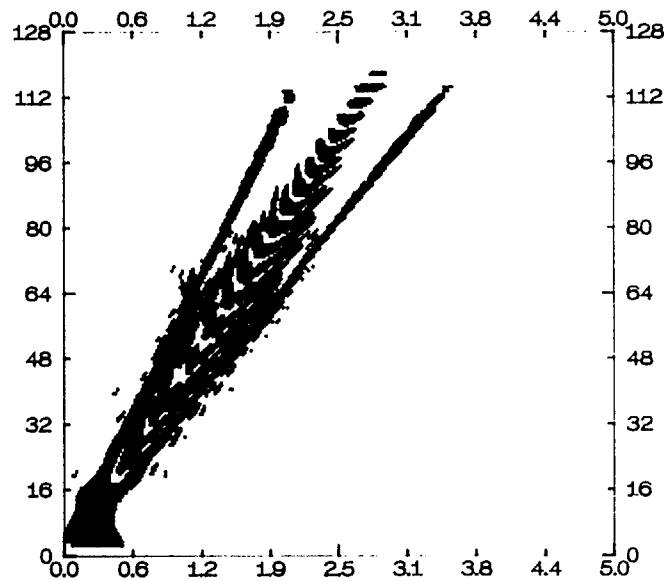


Figure 1. TWV non lissée de deux modulations linéaires de fréquence

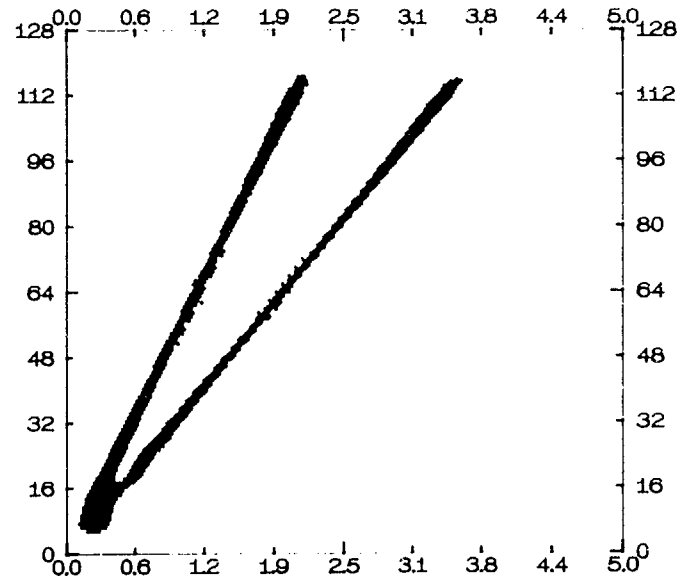


Figure 2. TWVHR de deux modulations linéaires de fréquence

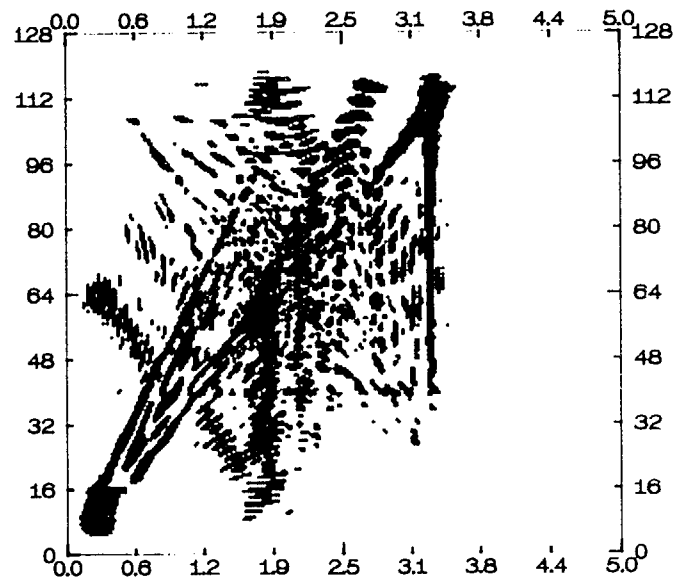


Figure 3. TWV non lissée de 3 modulations linéaires de fréquence et d'une sinusoïde

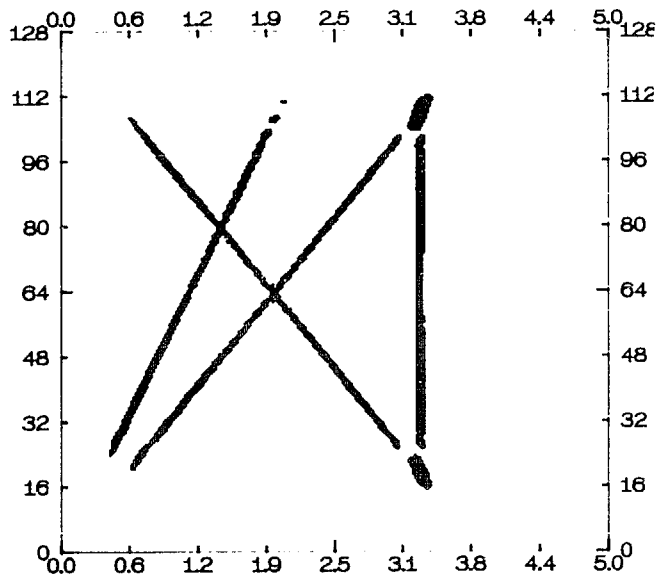


Figure 4. TWVHR de 3 modulations linéaires de fréquence et d'une sinusöide

- [7] J.C. Andrieux, M.R. Feix, G. Mourgues, P. Bertrand, B. Izrar, V.T. Nguyen, Optimum smoothing of the Wigner-Ville Distribution, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol ASSP-35, n° 6, pp 764-769, juin 1987.
- [8] P. Duvaut, Principes des méthodes de séparation fondées sur les moments d'ordre supérieur, Traitement du Signal, vol. 7, n° 5 spécial, pp 407-418.
- [9] J.F. Cardoso, P. Common, Tensor-based independent component analysis, pre-print EUSIPCO 90.
- [10] G. Desodt, D. Müller, Complex independent components analysis applied to the separation of radar signals, Signal Processing V : Theories and Applications, L. Torres, E. Masgrau, M.A. Laguñas eds, 1990.

Conclusion

Nous avons introduit dans cet article une nouvelle représentation temps-fréquence dite "haute résolution". Celle-ci évite le dilemme classique de la représentation de Wigner-Ville que traduit le compromis obligé entre les interférences et la résolution. Elle s'obtient après une analyse en composantes indépendantes du noyau bilinéaire de la transformation de Wigner-Ville.

Bibliographie

- [1] T.A.C.M Claasen, W.F.G. Mecklenbraücker, The Wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis, part I : continuous-time signals, Philips J. Res., 35, (3), 1980, pp 217-250.
- [2] P. Flandrin, Représentations temps-fréquence des signaux non stationnaires, Thèse de Doctorat d'Etat es Sciences Physiques, Université de Grenoble, 1987.
- [3] P. Flandrin, J. Sageloli, J.P. Sessarego, B. Vidale, M. Zakharia, Ondelettes, spectrogrammes et lissages de la distribution de Wigner Ville, 12^{ème} colloque GRETSI, Juan-les-Pins, 12 au 16 juin 1989.
- [4] F. Auger, C. Doncarli, Un algorithme d'élimination des termes d'interférences de la transformation de Wigner Ville discrète, 12^{ème} colloque GRETSI, Juan-les-Pins, 12 au 16 juin 1989.
- [5] A. Graham, Kronecker products and matrix calculus with applications, J. Wiley and Sons, New-York, 1981.
- [6] D.R. Brillinger, An introduction to polyspectra, Ann. Math. Stat., vol. 36, pp 1351-1374, octobre 1965.