GÉNÉRALISATION DES TESTS DE BISTRITZ ET DE ROUTH ET LIEN ENTRE LES DEUX TESTS OBTENUS

M. BENIDIR

Université de Paris-Sud

Laboratoire des Signaux et Systèmes

ESE-Plateau du Moulon, 91190 Gif sur Yvette, France

RÉSUMÉ

Pour un polynôme donné, l'algorithme de Routh et celui de Bistritz permettent de déterminer, respectivement le nombre de zéros à partie réelle positive et celui des zéros de module supérieur à un. Nous introduisons deux familles d'algorithmes qui généralisent l'algorithme de Routh et celui de Bistritz. Nous montrons ensuite que ces deux familles se déduisent l'une de l'autre par une transformation homographique et qu'elles permettent de résoudre complètement les cas singuliers qui apparaissent dans les algorithmes de Routh et Bistritz.

ABSTRACT

For a given polynomial, the Routh's and Bistritz' algorithms allow us to determine, the number of zeros with positive real part and that of zeros with modulus greater than one, respectively. We introduce two classes of algorithms which generalize Routh's and Bistritz' algorithms. We show that these classes related to each other through a bilinear transform and allow us to completely solve the singular cases appearing in Routh's and Bistritz' algorithms.

1. INTRODUCTION

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires se déduit de celle de la position des zéros d'un polynôme par rapport à l'axe imaginaire pour le temps continu et par rapport au cercle unité pour le temps discret. La résolution du problème posé revient à associer à un polynôme donné par ses coefficients une table à partir de laquelle on obtient le résultat par simple examen de cette table. Les nombreuses méthodes proposées dans la littérature [1]–[9] peuvent se rattacher à l'une des trois tables suivantes : la Table de Routh [1]–[6], la table de Jury (connue aussi sous la dénomination table de Schur-Cohn ou Jury-Marden) [7], la table de Bistritz [8]–[9]. La première permet de déterminer le nombre de zéros à partie réelle positive pour un polynôme donné et les deux autres donnent le nombre de zéros de module supérieur à un. Nous appelons algorithmes de Routh, Schur-Cohn et Bistritz, les procédés de calculs qui permettent de construire respectivement les trois tables.

Ces trois algorithmes ne pemettent pas de traiter simplement le cas de certains polynômes dits singuliers [5] [7].

Le lien existant entre l'algorithme de Schur-Cohn et celui de Bistritz a été établi dans [7].

On peut remarquer qu'il existe une grande similitude entre l'algorithme de Bistritz et celui de Routh mais qu'il n'est pas possible de passer de l'un à l'autre par transformation homographique.

Dans cet article, nous introduisons deux familles d'algorithmes qui généralisent respectivement l'algorithme de Routh et celui de Bistritz. Nous montrons ensuite que ces deux familles se correspondent dans une transformation homographique et qu'il permettent de résoudre complètement le problème des singularités classiques.

2. POLYNOMES SYMÉTRIQUES

Soit P un polynôme de degré n et à coefficients complexes a_i :

$$P(z) \triangleq a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n , \quad a_0 \neq 0. \qquad (2\text{-}1)$$

Pour tout entier fixé $m \geq n$, on peut associer au polynôme P un autre polynôme défini d'une manière unique par

$$\mathcal{R}_m(P) \triangleq z^m \overline{P}(z^{-1}) \triangleq z^m\{\overline{a}_0 z^{-n} + \overline{a}_1 z^{-n+1} + \ldots + \overline{a}_n\} \qquad (2\text{-}2)$$

où $\overline{a}_i$ dénote le complexe conjugué de a_i. L'opérateur $\mathcal{R}_m$ vérifie, d'après sa définition, $\mathcal{R}_m\{\mathcal{R}_m(P)\} = P$.

Dans le cas particulier où m est le degré de P, i.e., $d°P = m = n$, on utilisera la notation simplifiée

$$P^*(z) \triangleq \mathcal{R}_n(P) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 z^1 + \ldots + \overline{a}_n z^n \qquad (2\text{-}3)$$

et P^* est appelé *polynôme réciproque de P*. Un polynôme qui vérifie l'identité

$$P^* = \alpha P \qquad (2\text{-}4)$$

est appelé polynôme *autoréciproque*. Comme $P^{**} = P$, on en déduit que $|\alpha| = 1$. Dans le cas plus particulier où $\alpha = 1$, le polynôme est dit *symétrique* et la symétrie se traduit sur les coefficients par

$$a_i = \overline{a}_{n-i} , \; i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (2\text{-}5)$$

Un polynôme symétrique vérifie donc forcément $P(0) \neq 0$. Le couple (P, P^*) joue un grand rôle dans l'étude de la position des racines de P par rapport au cercle unité. Nous allons établir quelques propriétés des polynômes symétriques qui seront utilisées dans la suite.

Proposition 2.1 Pour tout polynôme Q vérifiant l'identité

$$\mathcal{R}_m(Q) = Q \qquad (2\text{-}6)$$

on a les équivalences suivantes

$$d°Q = m \quad ssi \quad Q(z) = Q^*(z) \quad ssi \quad Q(0) \neq 0 \qquad (2\text{-}7)$$

Preuve Si q désigne le degré de Q, la relation (2-6) s'écrit aussi

$$Q(z) \ = \ z^{m-q}Q^*(z). \qquad (2\text{-}8)$$

D'où $m = q$ *ssi* $Q(z) = Q^*(z)$ *ssi* $Q(0) \neq 0$.

Remarque 2.1 Il existe toujours un nombre complexe w de module 1 tel que le polynôme Q défini par :

$$Q(z) \ \triangleq P(wz)/P(w) \qquad (2\text{-}9)$$

vérifie

$$Q(0) + Q^*(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q(1) = \overline{Q}(1) \neq 0. \qquad (2\text{-}10)$$

Comme nous sommes intéressés par l'étude de la position des zéros de P par rapport au cercle unité, qui est identique à celle des zéros du polynôme Q défini par (2-9), sans restreindre la généralité du problème étudié, on peut toujours imposer à P de vérifie lui-même les conditions (2-10).

Proposition 2.2 Tout polynôme P de degré n vérifiant les conditions (2-10) peut s'écrire d'une manière unique sous la forme

$$P(z) = A(z) \ + (z-1)z^hB(z) \qquad (2\text{-}11)$$

où h est un entier et A et B deux polynômes symétriques dont les degrés sont donnés par :

$$d°A = n \quad ; \quad d°B = n - 2h - 1. \qquad (2\text{-}12)$$

Preuve Posons

$$P(z) + P^*(z) = 2A(z) \qquad (2\text{-}13)$$

et appliquons l'opérateur $\mathcal{R}_n$ aux deux membres de (2-13). Il vient:

$$P^*(z) + P(z) = \ 2z^n\overline{A}(z^{-1}). \qquad (2\text{-}14)$$

L'identification de (2-13) et (2-14) donne

$$A(z) = z^n\,\overline{A}(z^{-1}). \qquad (2\text{-}15)$$

Comme $P(0) + P^*(0) \neq 0$ par hypothèse, on a $A(0) \neq 0$ et la Proposition 2.1 montre que $d°A = n$ et que A est symétrique.
Le polynôme $P(z) - P^*(z)$ admet 1 comme racine puisque $P^*(1) = \overline{P}(1) = P(1)$ par hypothèse. On peut donc le mettre, d'une manière unique, sous la forme

$$P(z) - P^*(z) = 2\,(z-1)z^hB(z),\ B(z) \neq 0 \qquad (2\text{-}16)$$

L'application de l'opérateur $\mathcal{R}_n$ aux deux membres de (2-16) conduit à

$$P(z) - P^*(z) = 2\,(z-1)z^{n-h-1}\overline{B}(z^{-1}) \qquad (2\text{-}17)$$

et l'identification de (2-16) et (2-17) donne

$$B(z) = z^{n-2h-1}\overline{B}(z^{-1}). \qquad (2\text{-}18)$$

La Proposition 2.1 montre que B est symétrique et que $d°B = n - 2h - 1$. Finalement, l'addition membres à membres de (2-13) et (2-16) donne immédiatement (2-11).

Proposition 2.3 Soient P et Q deux polynômes symétriques de degrés respectifs m et $m-1$ et $\rho \in [0,\,1]$ tel que $Q(z_0) \neq 0$ pour z_0 vérifiant $\rho\,(z^2+1) - 2z = 0$. Alors il existe un entier $h \geq 0$, un complexe v et un polynôme R uniques vérifiant la relation

$$P(z) = \ (vz + \overline{v})Q(z) - [2z - \rho\,(z^2+1)]z^hR(z),\ R(0) \neq 0 \qquad (2\text{-}19)$$

alors, on a $d°R = m - 2h - 1$ et R est un polynôme symétrique.

Preuve L'application de l'opérateur $\mathcal{R}_m$ aux deux membres de (2-19) conduit à la relation équivalente

$$P(z) = \ (vz + \overline{v})Q(z) - [2z - \rho\,(z^2+1)]z^{m-1-h}\,\overline{R}(z^{-1}) \qquad (2\text{-}20)$$

L'identification de (2-19) et (2-20) conduit à

$$R(z) = z^{p-1-2h}\,\overline{R}(z^{-1}) \qquad (2\text{-}21)$$

Comme $R(0) \neq 0$, on a $d°R = p - 1 - 2h$ et R est symétrique en vertu de la Proposition 2.1.

Proposition 2.4 Si Q est un polynôme symétrique de degré p et Q' sa dérivée, alors le polynôme défini par

$$\hat{Q}(z) \triangleq \ pQ(z) + (1-z)Q(z)' \qquad (2\text{-}22)$$

est symétrique.

Preuve On explicite les coefficients de $\hat{Q}(z)$.

3. ALGORITHME DE BISTRITZ GÉNÉRALISÉ

A tout polynôme mis sous la forme (2-11), nous allons associer une suite de polynômes symétriques F_p de degré p, $p = n, n-1, \ldots, 0$, calculés à l'aide de l'algorithme suivant dénommé "*algorithme de Bistritz généralisé*".

A. Forme polynômiale de l'algorithme

1. Conditions initiales :

$$F_n \ = A \qquad (3\text{-}1)$$

$$F_{n-1} = \hat{A}(z) \qquad \text{si } B = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

$$= [2z^h - (z^{2h}+1)]B \qquad \text{si } d°B = n - 2h - 1. \qquad (3\text{-}3)$$

2. Pour $p = n, n-1, \ldots, 2$:
calculer z_0, racine positive de $\rho\,(z^2+z) - 2z = 0$ en choisissant ρ dans $[0,\,1]$ tel que $F_{p-1}(z_0) \neq 0$; calculer ensuite v_p à l'aide de

$$v_p z_0 + \bar{v}_p = F_p(z_0) / F_{p-1}(z_0) \tag{3-4}$$

calculer F_{p-2} à partir de F_{p-1} et R, $R(0) \neq 0$, comme suit

$$\begin{aligned} F_p(z) &= (v_p z + \bar{v}_p)F_{p-1}(z) - [2z - \rho(z^2+1)]z^h R(z) && (3\text{-}5)\\ F_{p-2}(z) &= \hat{F}_{p-1}(z) \qquad \text{si } R = 0 && (3\text{-}6)\\ &= [2z^h - \sigma(z^{2h}+1)]R(z) \qquad \text{si } d^\circ R = p - 2h - 2. && (3\text{-}7) \end{aligned}$$

3. On choisit $\sigma \in\ ]0, 1]$ pour $h \neq 0$. On peut aussi choisir ρ pour avoir $R = 0$ ou $d^\circ R = p - 2$ ($h = 0$) et prendre alors $\sigma = 0$.

Remarque 3.1 Les cas intéressants du point de vue calculs correspondent à $\rho = 0$ ou $\rho = 1$. Si l'on prend $\rho = 0$ (donc $z_0 = 0$) pour $p = n, n-1, \ldots, 0$ et que l'on a $h = 0$ à chaque étape de l'algorithme, on obtient l'algorithme de Bistritz [9]. Si l'on prend $\rho = 1$ (donc $z_0 = 1$) pour $p = n, n-1, \ldots, 0$ et que l'on a $h = 0$ à chaque étape de l'algorithme, on obtient l'algorithme fondé sur le développent en fractions continues [7]. L'algorithme ci-dessus montre que l'on peut changer la valeur de ρ à chaque étape, les valeurs intéressantes du point de vue calculs étant 0 et 1. Mais pour certains polynômes, ces valeurs ne permettent pas de continuer l'algorithme jusqu'à la détermination complète des polynômes $F_p, p = n, n-1, \ldots, 0$.

B. Nombre de zéros à l'extérieur du cercle unité

Théorème 3.1 L'algorithme ci-dessus permet d'associer à P une suite de polynômes *symétriques* F_p de degré p, $p = n, n-1, \ldots, 0$ et le nombre de racines de P de module strictement supérieur à 1 est donné par

$$n_e(P) = V[F_n(1), F_{n-1}(1), \ldots, F_0(1)] \tag{3-8}$$

où $V(.)$ désigne le nombre de changements de signe dans la suite.

Remarque 3.2 On peut toujours choisir les valeurs de ρ pour avoir :

$$F_p(1) \neq 0, \quad p = n, n-1, \ldots, 0. \tag{3-9}$$

Démonstration du théorème 3.1 Voir Section 5.

C. Simplification dans le cas réel

Si P est à coefficients réels, il en est de même pour F_p et F_{p-1}. Le coefficient v_p est alors réel et le polynôme R défini par (3-5) est lui aussi réel. On obtient la version de l'algorithme en remplaçant les relations (3-5) et (3-6) par

$$v_p = F_p(z_0) / \{(z_0 + 1) F_{p-1}(z_0)\} \tag{3-10}$$

et

$$F_p(z) = v_p(z+1)F_{p-1}(z) + [2z - \rho(z^2+1)]z^h R(z). \tag{3-11}$$

4. ALGORITHME DE ROUTH GÉNÉRALISÉ

Tout polynôme $g(s)$ de degré n et à coefficients complexes peut s'écrire d'une manière unique sous la forme

$$g(s) \triangleq a(s) - \mathrm{i}\, b(s) \tag{4-1}$$

où $a(s)$ et $b(s)$ sont des polynômes réels. Nous allons associer à g une suite de polynômes réels f_p, de degré p, $p = n, n-1, \ldots, 0$, calculés à partir de $a(s)$ et $b(s)$ à l'aide de l'algorithme suivant dénommé "*algorithme de Routh généralisé*". On peut toujours se ramener au cas $d^\circ g = d^\circ a$ et $d^\circ a - d^\circ b = 2h + 1$ (voir [6]).

A. Forme polynômiale de l'algorithme

1. Conditions initiales : $f_n = a$,

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= a' \qquad \text{si } b = 0 && (4\text{-}2)\\ &= [1 + s^{2h}]b \qquad \text{si } d^\circ b = n - 1 - 2h && (4\text{-}3) \end{aligned}$$

2. Pour $p = n, n-1, \ldots, 2$, choisir $\tau \geq 0$ tel que $f_{p-1}(\mathrm{i}\tau^{-1}) \neq 0$ et calculer α_p et β_p à l'aide de

$$\alpha_p \mathrm{i}\tau + \beta_p \triangleq f_p(\mathrm{i}\tau^{-1}) / f_{p-1}(\mathrm{i}\tau^{-1}) \tag{4-4}$$

calculer F_{p-2} comme suit

$$\begin{aligned} f_p(s) &= (\alpha_p s + \beta_p)f_{p-1}(s) - (1 + \tau^2 s^2)r(s) && (4\text{-}5)\\ f_{p-2}(s) &= f_{p-1}'(s) \qquad \text{si } r = 0 && (4\text{-}6)\\ &= r(s)\,[1 + \sigma^2 s^2]^h \qquad \text{si } d^\circ r = p - 2h - 2. && (4\text{-}7) \end{aligned}$$

3. On choisit $\sigma > 0$ si $h \neq 0$. On peut aussi choisir τ pour avoir $r = 0$ ou $d^\circ r = p - 2$ ($h = 0$) et prendre alors $\sigma = 0$.

B. Nombre de zéros à partie réelle positive

Théorème 4.1 L'algorithme ci-dessus permet d'associer à g une suite de polynômes réels f_p de degré p, $p = n, n-1, \ldots, 0$ et le nombre de racines de g à *partie imaginaire positive* est alors donné par

$$m^+(g) = V[c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0] \tag{4-8}$$

où c_j désigne le coefficient du terme de plus haut degré de f_j.

Remarque 4.1 Dans les problèmes pratiques, on doit déterminer le nombre $n^+(g)$ de zéros de g à *partie réelle positive*. On introduit pour cela le polynôme défini par

$$\tilde{g}(s) \triangleq (\mathrm{i})^{-n} g(\mathrm{i}s). \tag{4-9}$$

Comme le nombre cherché $n^+(g)$ est égal au nombre $m^+(\tilde{g})$ de racines de $\tilde{g}$ à *partie imaginaire positive*, on applique l'algorithme à $\tilde{g}$.

Démonstration La même méthode que celle utilisée dans [6] permet d'établir le résultat suivant.

Lemme 4.1 Soient A, B et C trois polynômes réels tels que $d^\circ C \leq d^\circ B$, $d^\circ A - 1 \leq d^\circ B \leq d^\circ A$ et D un polynôme qui n'admet aucun zéro réel et qui vérifie la relation

$$A(s) = (\alpha s + \beta)B(s) - D(s)C(s). \tag{4-10}$$

Alors pour tout polynôme réel E n'admettant aucun zéro réel et tel que $d^\circ EC \leq d^\circ B$, on a

$$m^-(A - \mathrm{i}B) = m^-(B - \mathrm{i}EC) = [d^\circ A - d^\circ B - \mathrm{Sg}(\tfrac{c_p}{c_q})] / 2 \tag{4-11}$$

où c_p et c_q sont les coefficients des termes de plus haut degré dans A et B respectivement et

$$\mathrm{Sg}(x) = x / |x|, x \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Sg}(0) = 0. \tag{4-12}$$

Lemme 4.2 [6] Si $B = A'$ désigne la dérivée d'un polynôme réel A, on a

$$m^{-}(A) = m^{-}(A - \mathrm{i}\, B) = [d°A - dB - \mathrm{Sg}(\frac{c_p}{c_q})] / 2. \tag{4-13}$$

L'application de (4-11) et (4-12) pour

$$\{A, B, C, D\} = \{f_k, f_{k-1}, r, (1 + \tau^2 s^2)\} \tag{4-14}$$

et l'itération du résultat obtenu conduit à (4-8).

C. *Simplification dans le cas réel*

Si le polynôme g est à coefficients réels, on applique l'algorithme au polynôme défini par (4-9). Dans ce cas, les polynômes $a(s)$ et $b(s)$ associés à $\bar{g}(s)$ sont pair-impair [5] et l'on a $d°a = d°b + 1 + 2h$, $h \geq 0$. Le coefficient β_p apparaissant dans (4-5) est nul et cette relation s'écrit

$$f_p(s) = \alpha_p s f_{p-1}(s) - (1 + \tau^2 s^2) r(s). \tag{4-16}$$

Comme le théorème 4.1 ne fait intervenir que les les coefficients des termes de plus hauts degrés des f_p, on peut remplacer la suite : $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_0$ par la suite : $\mathfrak{f}_n, \mathfrak{f}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{f}_0$. En effet, les polynômes f_p et $\mathfrak{f}_p$ ont les mêmes termes de plus haut degré. Il est facile de vérifier que les conditions initiales $\mathfrak{f}_n$ et $\mathfrak{f}_{n-1}$ sont tout simplement les parties paire et impaire du polynôme donné g et que la récurrence qui permet de construire les $\mathfrak{f}_p$ se déduit de (4-16) en remplaçant s par is, ce qui donne

$$\mathfrak{f}_p(s) = \alpha_p s \mathfrak{f}_{p-1}(s) + (1 - \tau^2 s^2) d(s). \tag{4-17}$$

5. LIEN ENTRE LES DEUX ALGORITHMES GÉNÉRALISÉS

On considère la transformation qui associe à tout nombre complexe s le nombre z défini par

$$z = \frac{s - \mathrm{i}}{s + \mathrm{i}} \quad \text{—>} \quad s \triangleq \frac{z + 1}{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}. \tag{5-1}$$

et à tout polynôme P, le polynôme défini par

$$g(s) \triangleq (s + \mathrm{i})^n P(\frac{s - \mathrm{i}}{s + \mathrm{i}}) \triangleq \mathcal{H}_n\{P\} \tag{5-2}$$

Propriété 5.1 Le degré de $g(s)$ est au plus n et le coefficient de s^n dans $g(s)$ est égal à $P(1)$.

Propriété 5.2 Si P est un polynôme symétrique, le polynôme g défini par (5-2) est à coefficients réels.

Propriété 5.3 Pour tout polynôme P, mis sous la forme (2-11), on a

$$\mathcal{H}_n(A + (z - 1)z^h B) = a(s) - 2\mathrm{i}(1 + s^2)^h b(s) \tag{5-3}$$

où

$$a(s) \triangleq \mathcal{H}_n(A) \text{ et } b(s) \triangleq \mathcal{H}_{n-1}(B). \tag{5-5}$$

Propriété 5.4 Pour tout $\sigma \in [0, 1[$, on a

$$\mathcal{H}_{2h}[2z^h - \sigma(z^{2h} + 1)] = v(s)(1 + s^2)^h \tag{5-6}$$

où $v(s)$ est une fraction rationnelle vérifiant $v(x) > 0$ pour x réel.

Propriété 5.5. La relation (4-5) se transforme dans $\mathcal{H}_p$ en la relation suivante :

$$f_p(s) = (\alpha_p s + \beta_p) f_{p-1}(s) - (1 + \tau^2 s^2)(1 + s^2)^h r(s) \tag{5-7}$$

où

$$f_j \triangleq \mathcal{H}_j\{F_j\}, \quad r \triangleq 2(1 + \rho)\mathcal{H}_p\{R\} \tag{5-8}$$

et

$$\tau^2 \triangleq (1 - \rho)/(1 + \rho). \tag{5-9}$$

Démonstration du Théorème 1. Tenant compte des propriétés ci-dessus, on peut vérifier que la suite $\{F_n, F_{n-1}, \ldots, F_0\}$ se transforme par les $\mathcal{H}_p$ en la suite $\{f_n, f_{n-1}, \ldots, f_0\}$. Les propriétés classiques de la transformation $\mathcal{H}_p$ et la Proposition 5.1 permettent de déduire le Théorème 1 du Théorème 2.

Conclusion L'algorithme de Bistritz correspond à la relation (3-5) pour $h = \rho = 0$ et celui de Routh correspond à (4-5) pour $h = \tau = 0$. La famille des récurrences, introduites par (3-5) et indexées par $\rho \in [0, 1]$, se transforme par homographie en la famille de récurrences, définies par (4-5) et indexées par $\tau \geq 0$. Les deux paramètres τ et ρ sont reliés par (5-9). Mais dans cette transformation, la valeur de τ qui correspond à $\rho = 0$ est $\tau = 1$. L'introduction des deux paramètres arbitraires ρ et τ permet d'améliorer la décision lorsqu'on obtient un coefficient voisin de zéro dan (3-8) ou (4-8).

RÉFÉRENCES

[1] E. I. Jury, "The theory and applications of the inners", Proceedings of the IEEE, Vol. 63, No. 7, July 1975.

[2] P. Delsarte, Y.V. Genin, and Y. Kamp, " Pseudo-lossless functions with application to the problem of locating the zeros of a polynomial", IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. CAS-32, pp.373-381, April 1985.

[3] S.D. Agashe, "A new general Routh-like algorithm to determine the number of RHP roots of a real or complex polynomial", IEEE Trans. 1985, AC-30, 406-407 (1985).

[4] K.S. Yeung, "Addendum to 'Routh-Hurwitz test under vanishing leading array elements'", IEEE Trans. Autom., Contr., Vol. AC-30, p. 1036, October 1985.

[5] M. Benidir and B. Picinbono, "Extended Routh's array for eliminating the ε-method in the Routh's table", IEEE Trans. Autom., Contr., Vol. 35, No. 2, pp. 218-222, February 1990.

[6] M. Benidir and B. Picinbono, "The extended Routh's table in the complex case", IEEE Trans. Autom., Contr., Vol. 36, No. 2, pp. 253-256, February 1991.

[7] M. Benidir and B. Picinbono, " Comparison between some stability criteria of discrete-time filters", IEEE Trans. ASSP, Vol. 36, No. 7, July 1988, pp. 993-1001.

[8] Y. Bistritz, " Zero Location with Respect to the Unit Circle of Discrete-Time Linear System Polynomials", Proceedings of the IEEE, vol. 72, no.9, Sep. 1984.

[9] Y. Bistritz, "A circular stability test for general polynomials", System & Control Letters 7, pp. 89-97, 1986.