



Remarques sur la Reconstitution d'un Signal Echantillonné à Partir de son Bispectre

Joël Le Roux

I3S, Université de Nice, CNRS, Bat. 4, 250 Rue A. Einstein
Sophia Antipolis, 06560 Valbonne, France

RÉSUMÉ

La communication présente quelques résultats sur l'analyse bispectrale fondés sur une propriété des signaux échantillonnés, la périodicité de leur transformée de Fourier : une remarque sur le support spectral du signal (avant échantillonnage) montrant les conditions autorisant la comparaison des triples corrélations des signaux avant et après échantillonnage et trois méthodes de reconstitution : une technique de projection donnant la reconstitution optimale au sens des moindres carrés ; une variante des techniques récursives classiques ; un nouvel algorithme utilisant la valeur du bispectre sur une diagonale.

1. INTRODUCTION

L'analyse bispectrale devient un outil important en reconstitution d'images en astronomie. Grâce au théorème sur la clôture de phase, il est possible de reconstruire des images en éliminant l'effet de miroitement dû aux turbulences atmosphériques ("speckles") [13], [14]. C'est maintenant un outil bien connu des astrophysiciens [4], [7], [8], [17] et actuellement très en vogue chez les spécialistes de la modélisation dans différents domaines ([1], [2], [3], [6], [9], [10], [11], [15], [16]). Cependant, bien que les développements et les applications soient réalisés par des traitements numériques, la plupart de ces travaux n'utilisent pas de manière exhaustive une propriété fondamentale des signaux échantillonnés : la périodicité de leur transformée de Fourier et de leur bispectre. Notre objectif est donc de formaliser certains problèmes d'analyse bispectrale dans ce contexte, ce qui amène à quelques résultats intéressants qui ne sont pas mentionnés dans les articles de synthèse de Mendel [10] ou de Nikias et Raghuvver [11]. (Les développements sont exposés dans le cas des signaux monodimensionnels mais leur extension au cas des signaux bidimensionnels est immédiate [5]).

La *triple correlation* (T.C.) d'un signal "analogique" $f_a(t)$ est

$$r_a(x, y) = \int_{\Delta} f_a(t) f_a(t+x) f_a(t+y) dt \quad (1)$$

où Δ est le support of $f_a(t)$. Sa transformée de Fourier est le *bispectre* qui se déduit de la transformée de Fourier $F_a(u)$ de $f_a(t)$

$$B_a(u, v) = F_a(u) F_a(v) F_a(-u-v) \quad (2)$$

Leurs phases sont reliées par

$$\varphi_B(u, v) = \varphi_F(u) + \varphi_F(v) + \varphi_F(-u-v) \quad (3)$$

On a une relation similaire sur les logarithmes des modules.

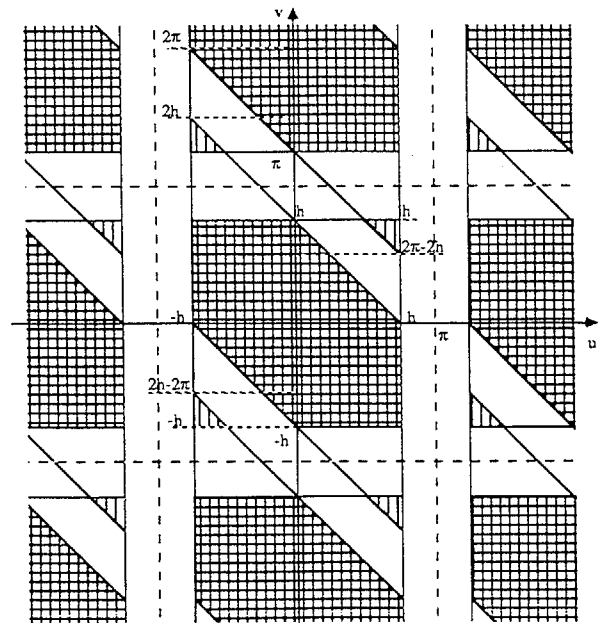
ABSTRACT


The communication gives several results on bispectral analysis when applied to sampled signals, that is to periodic Fourier transforms : a condition on the spectral support of the analysed signal ensuring a correct comparison of the bispectral representations of analog and sampled signals and three reconstruction techniques, a projection yielding the best least-squares estimate ; a variant of classical recursive reconstruction techniques ; a reconstruction from the bispectrum diagonal slice. The phase unwrapping problems raised by the proposed recursions are discussed.

2. ECHANTILLONNAGE DE LA T. C. ET T. C. D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE

Le bispectre $B_s(u, v)$ du signal échantillonné $f_s(t)$ est

$$B_s(u, v) = \left[\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} F_a(u-2m_1\pi) \right] \times \left[\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} F_a(v-2m_2\pi) \right] \left[\sum_{m_3=-\infty}^{\infty} F_a(-u-v-2m_3\pi) \right] \quad (4)$$



 Support de la transformée de Fourier périodisée de la triple corrélation du signal continu


 Support du bispectre du signal échantillonné

Fig. 1. Effet de repliement dans le bispectre d'un signal échantillonné



où les sommes sur m_1, m_2 et m_3 correspondent à la transformée de Fourier de $f_s(t)$ obtenue par périodisation. Alors, $B_s(u,v)$ est égal au résultat de la périodisation du bispectre de $f_a(t)$.

$$B_s(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_a(u-2m\pi)F_a(v-2n\pi)F_a(-u-v-2m\pi-2n\pi) \quad (5)$$

si et seulement si le support de $F_a(u)$ est (fig. 1)

$$|u| < 2\pi/3 \quad (6)$$

Lorsque (6) est vérifiée, la triple corrélation de $f_s(t)$ s'obtient par échantillonnage de la triple corrélation de $f_a(t)$. Cependant, si (6) n'est pas vérifiée, les deux bispectres coïncident à l'intérieur de l'hexagone $-\pi < |u|, |v|, |u+v| < \pi$ mais pas dans les deux "coins" du carré $-\pi < |u|, |v| < \pi, |u+v| > \pi$. Ce résultat montre qu'il faut prendre quelques précautions dans l'interprétation de résultats de simulations.

Remarques : 1. Du fait de cette différence entre les bispectres des signaux continus et échantillonnés, les résultats présentés dans les paragraphes suivants ne sont pas applicables directement à la reconstruction des T.F. des signaux

2. La comparaison des deux triples corrélations n'est possible que si l'échantillonnage de la triple corrélation "continue" se fait selon un motif carré ; cet échantillonnage ne peut pas respecter la géométrie optimale qui est le parallélogramme (10/9, 10/9 ; 8/9, -4/9).

3. RECONSTITUTION DE LA T. F. DU SIGNAL ECHANTILLONNE A PARTIR DU BISPECTRE

3.1. Reconstruction exacte

On considère la phase (ou le logarithme du module) du bispectre $\varphi_B(u,v)$ de période 2π en u et en v . D'après (3), on peut écrire

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(u,v)dv = 2\pi\varphi_F(u) + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_F(v)dv + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_F(-u-v)dv \quad (7)$$

En tenant compte des symétries de $\varphi_B(u,v)$ et comme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(u,v)dudv = 6\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_F(u)du \quad (8)$$

on a

$$\varphi_F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(u,v)dv - \frac{1}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(w,v)dwdv \quad (9)$$

C'est une justification élémentaire de la technique de reconstruction de la phase déjà proposée en [15], [16].

3.2. Reconstruction optimale au sens des moindres carrés

On considère la projection d'une fonction périodique $\varphi_B(u,v)$ sur une base orthonormée $e_k(u,v)$ de l'espace des fonctions de la forme

$$\Phi(u,v) = \varphi_F(u) + \varphi_F(v) + \varphi_F(-u-v) \quad (10)$$

où $\varphi_F(u)$ est périodique :

$$e_k(u,v) = \left[\frac{1-\delta(k)}{3} + \frac{\delta(k)}{\sqrt{3}} \right] [\exp(jku) + \exp(jkv) + \exp(-jku-jkv)] \quad (11)$$

Les composantes $h_{\Phi}(k)$ de $\Phi(u,v)$ sur cette base sont liés aux coefficients de Fourier de $\varphi_F(u)$, soit $h_{\Phi}(k)$ par

$$h_{\Phi}(k) = \left[\frac{1-\delta(k)}{3} + \frac{\delta(k)}{\sqrt{3}} \right] h_{\Phi}(k) \quad (12)$$

Il est ainsi possible de reconstruire $\varphi_F(u)$ en connaissant $h_{\Phi}(k)$. Donc compte tenu du théorème de projection, la meilleure estimation de $\varphi_F(u)$ au sens des moindres carrés connaissant $\varphi_B(u,v)$ est

$$\begin{aligned} \varphi_F(u) = & \frac{1}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(u,v)dv + \frac{1}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(v,u)dv \\ & + \frac{1}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(v,-v-u)dv - \frac{1}{6\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_B(w,v)dwdv \end{aligned} \quad (13)$$

Cette relation se simplifie en (9) lorsque $\varphi_B(u,v)$ vérifie les symétries bispectrales. Ce résultat est lié à ceux obtenus par A. Lannes dans un contexte différent [4] ; on peut aussi l'obtenir dans le cas des transformées de Fourier et des bispectres *discrétisés* [5]. L'extension de ce résultat au cas des signaux multidimensionnels et aux polyspectres est directe.

Comme (9) et (13) contiennent des divisions, cette technique de reconstitution pose un problème de détermination de phase qui sera brièvement discuté dans le cinquième paragraphe.

4. ESTIMATION RECURSIVE DE LA T. F.

Dans la suite de la communication, nous considérerons uniquement les bispectres discrétisés définis pour $N \times N$ couples de fréquences

$$u, v = -\pi, -\pi(1-1/2N), \dots, \pi n/2N, \dots, \pi(1-1/2N)$$

4.1. Extension des récurrences classiques

Les techniques récurrentes ([6], [7], [8], [17]) permettant de reconstruire $\varphi_F(u)$ connaissant $\varphi_B(u,v)$ n'utilisent pas la périodicité du bispectre qui permet des variantes de ces algorithmes. De plus, ces techniques partent d'un choix arbitraire d'une phase $\varphi_F(v_0)$ et calculent la récurrence

$$\varphi_F(u+v_0) = \varphi_F(u) + \varphi_F(v_0) - \varphi_B(u, v_0) \quad (14)$$

Pour que ce calcul soit cohérent avec la périodicité du bispectre, $\varphi_F(v_0)$ doit vérifier

$$\varphi_F(v_0) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \varphi_B(u, v_0) \quad (15)$$

ce qui signifie que le choix de $\varphi_F(v_0)$ n'est pas arbitraire : le signal échantillonné ne peut subir que N différents décalages qui doivent être compatibles avec l'échantillonnage.

Le bispectre est périodique et v_0 n'est pas nécessairement dans le domaine des basses fréquences. En effet, les sommations sont effectuées modulo 2π : si v_0 vaut $2n\pi/N$

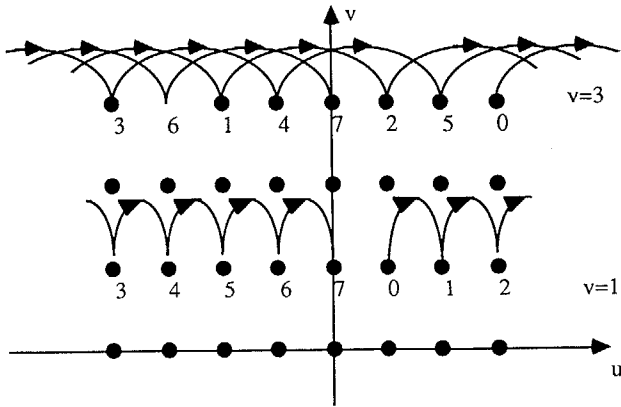


Fig. 2 : Enchaînement des calculs dans la reconstruction récursive ($v=1$) et dans une variante ($v=3$)

où n et N sont premiers entre eux, la récurrence (14) permet encore de calculer toutes les valeurs de $\varphi_F(u)$; on peut ainsi appliquer ces techniques récursives à des valeurs différentes de la phase (fig. 2).

4.2. Une autre forme de reconstruction

On suppose que le bispectre est connu sur la diagonale soit $\varphi_B(u, u)$, où $u = 2n\pi/N$ pour $n = 0, \dots, N-1$, (3) devient

$$\varphi_B(u, u) = 2\varphi_F(u) + \varphi_{F(-2u \bmod 2\pi)} \quad (16)$$

(D'après les propriétés des projections de Radon, la valeur du bispectre le long de cette diagonale est donnée par la projection de la triple corrélation

$$r(x) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(t)f(t+x+s)f(t+x-s) \quad (17)$$

Cette restriction à la diagonale a été utilisée dans [2]). La reconstruction est alors particulièrement simple lorsque N est une puissance de 2, $N = 2^M$. Su par exemple $M = 3$, il faut résoudre

$$\begin{array}{l|l} \varphi_B(0,0) & 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \varphi_B(1,1) & 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \varphi_B(2,2) & 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \varphi_B(3,3) & 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \varphi_B(\pm 4, \pm 4) & 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \varphi_B(-3, -3) & 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \\ \varphi_B(-2, -2) & 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 0 \\ \varphi_B(-1, -1) & 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \varphi_F(0) \\ \varphi_F(1) \\ \varphi_F(2) \\ \varphi_F(3) \\ \varphi_F(\pm 4) \\ \varphi_F(-3) \\ \varphi_F(-2) \\ \varphi_F(-1) \end{array} \right.$$

Les N fréquences u peuvent être codées sur M bits. (3) s'écrit

$$\varphi_F(u) = 1/2 [\varphi_B(u, u) - \varphi_{F(-2u \bmod 2^M)}] \quad (18)$$

(18), tout comme (9) ou (13), nécessite une division et pose donc un problème de détermination de phase (cf. paragraphe 5). Si $\varphi_F(v)$ a déjà été calculé, on peut en déduire $\varphi_F(u)$ pour deux valeurs de u telles que

$$u = -v/2 \bmod 2^{M-1} \quad (19a)$$

Si la représentation binaire de v est

$$v = p \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m \text{ bits}} \quad (20)$$

les deux valeurs de u pour lesquelles on peut calculer $\varphi_F(u)$ sont

$$u_1 = 0 \ \overline{p} \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m-1 \text{ bits}} \quad \text{et} \quad u_2 = 1 \ \overline{p} \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m-1 \text{ bits}} \quad (19b)$$

ce qui permet de déduire l'algorithme suivant où nous avons renommé $\varphi_B(u) = \varphi_B(u, u)$

$$\begin{array}{l} \varphi_F(0) = \varphi_B(0)/3 \\ \varphi_F(2^{M-1}) = 1/2 [\varphi_B(2^{M-1}) - \varphi_F(0)] \\ \text{for } m = M-1 \text{ downto } 1 \\ \quad \text{for all } p \text{ in } [0 \dots 2^{M-m-1}] \\ \quad \quad \text{compute } v, u_1 \text{ and } u_2 \text{ with (19)-(20)} \\ \quad \quad \varphi_F(u_1) = 1/2 [\varphi_B(u_1) - \varphi_F(v)] \\ \quad \quad \varphi_F(u_2) = 1/2 [\varphi_B(u_2) - \varphi_F(v)] \end{array}$$

(Les 2^{M-m} différentes valeurs de $\varphi_F(u)$ à l'étape m peuvent se calculer simultanément). Dans le cas bidimensionnel où

$\varphi_B(u_x, u_y) = \varphi_B(u, u)$ et $\varphi_F(u_x, u_y) = \varphi_F(u)$, si les composantes de v sont v_x et v_y

$$v_x = p \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m \text{ bits}} \quad \text{et} \quad v_y = q \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m \text{ bits}} \quad (21)$$

alors $\varphi_F(u_x, u_y)$ peut se calculer pour les valeurs

$$u_{1x} = 0 \ \overline{p} \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m-1 \text{ bits}}, \quad u_{2x} = 1 \ \overline{p} \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m-1 \text{ bits}} \quad (22)$$

$u_{1y} = 0 \ \overline{q} \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m-1 \text{ bits}}, \quad u_{2y} = 1 \ \overline{q} \ 1 \ \overbrace{0 \dots 0}^{m-1 \text{ bits}}$
ce qui donne l'algorithme suivant

$$\begin{array}{l} \varphi_F(0,0) = \varphi_B(0,0)/3 \\ \varphi_F(0, 2^{M-1}) = 1/2 [\varphi_B(0, 2^{M-1}) - \varphi_F(0,0)] \\ \varphi_F(2^{M-1}, 0) = 1/2 [\varphi_B(2^{M-1}, 0) - \varphi_F(0,0)] \\ \varphi_F(2^{M-1}, 2^{M-1}) = 1/2 [\varphi_B(2^{M-1}, 2^{M-1}) - \varphi_F(0,0)] \\ \text{for } m = M-1 \text{ downto } 1 \\ \quad \text{for all } (v_x, v_y) \text{ where } \varphi_F(v_x, v_y) \\ \quad \quad \text{was computed at step } m+1 \\ \quad \quad \text{compute } u_{1x}, u_{1y}, u_{2x} \text{ and } u_{2y} \\ \quad \quad \varphi_F(u_{1x}, u_{1y}) = 1/2 [\varphi_B(u_{1x}, u_{1y}) - \varphi_F(v_x, v_y)] \\ \quad \quad \varphi_F(u_{2x}, u_{1y}) = 1/2 [\varphi_B(u_{2x}, u_{1y}) - \varphi_F(v_x, v_y)] \\ \quad \quad \varphi_F(u_{1x}, u_{2y}) = 1/2 [\varphi_B(u_{1x}, u_{2y}) - \varphi_F(v_x, v_y)] \\ \quad \quad \varphi_F(u_{2x}, u_{2y}) = 1/2 [\varphi_B(u_{2x}, u_{2y}) - \varphi_F(v_x, v_y)] \end{array}$$

A chaque boucle sur m , on peut calculer simultanément $3 \times 4^{M-m}$ valeurs de la phase.

On obtient ainsi différentes méthodes de reconstruction qui peuvent se compléter et dont l'intérêt peut dépendre des conditions expérimentales dans lesquelles la phase bispectrale est mesurée : a. par projection ; b. par la récurrence classique ; c. par les variantes de cette récurrence ; d. à partir de la diagonale.



5. LA DETERMINATION DE LA PHASE

Les méthodes de la projection et de la diagonale posent des problèmes de détermination de phase ; ces problèmes sont inexistantes dans les techniques récurrentes.

On peut traiter ce problème en supposant que la phase de la T. F. du signal peut être décomposée en une somme de trois termes : un premier linéaire, un second périodique, impair et dérivable ; un troisième ne prenant que les valeurs 0 et π ; les variations de ce dernier terme sont liées aux passages à zéro de la T. F. ou du bispectre. L'hypothèse de périodicité et de dérivabilité du deuxième terme implique que la composante impaire de la phase du bispectre est aussi dérivable par construction. Si le bispectre est connu avec un pas de discrétisation suffisamment fin, on peut reconstituer ce terme dérivable du bispectre. La connaissance des droites horizontales, verticales ou diagonales où s'annule le bispectre permet de reconstruire la composante paire de la phase bispectrale : celle-ci prend les valeurs 0, π , $2\pi, 3\pi$ et est incrémentée ou décrémentée de π à chaque fois que l'une de ces droites est croisée ([5]).

De manière à autoriser une application correcte des algorithmes de reconstitution, il faut donc commencer par construire la détermination de la phase bispectrale qui respecte les règles précédentes : il faut ainsi que la phase du bispectre soit connue sur une grille suffisamment fine du plan (u,v) pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la détermination de la composante impaire et continue. Il faut

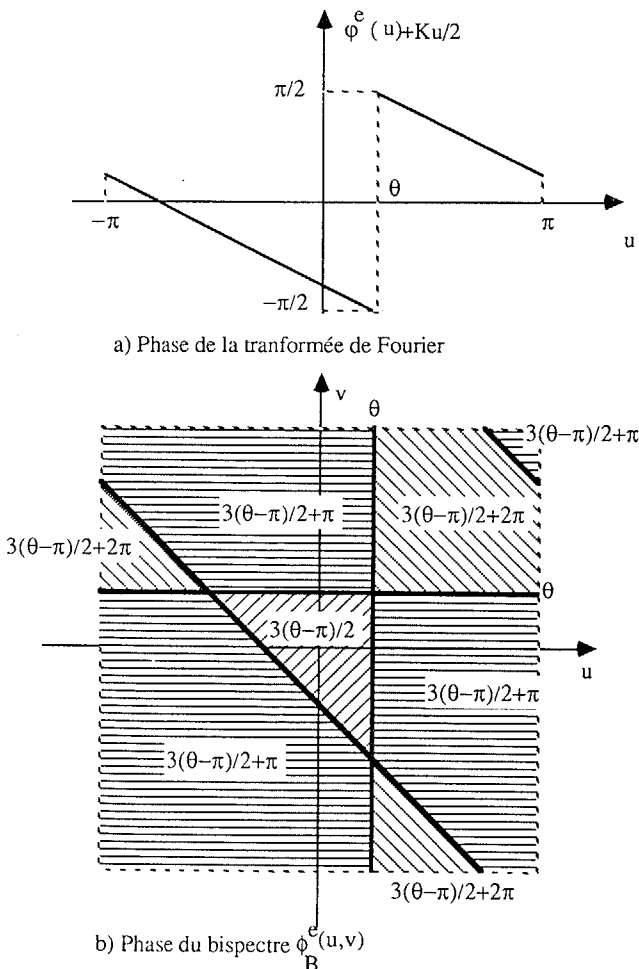


Fig. 3 : Phase de la transformée de Fourier (a) et du bispectre (b) d'une séquence de transformée $F(u) = 1 - \exp(j\theta - ju)$.
 Quand $F(u)$ s'annule plusieurs fois, plusieurs phases de ce type sont additionnées.

aussi que les lieux où le bispectre s'annule soient précisément connus.

Notons que cette hypothèse de dérivabilité de la T. F. implique que le signal à reconstituer a une extension limitée (cf. la notion de signaux simples et sophistiqués [12]).

REFERENCES

- [1] D. R. Brillinger, "The identification of a particular nonlinear time series system", *Biometrika*, vol. 65, 1977, pp 509-515.
- [2] S. A. Dianat and M. R. Raghuvver, "Two dimensional non-minimum phase signal reconstruction", *Proceedings on the first workshop on Higher order spectral analysis*, Vail, Colorado, 28-30 June 1989, pp 112-117.
- [3] G. B. Giannakis and J. M. Mendel, "Identification of nonminimum phase systems using higher order statistics", *IEEE Trans. on ASSP*, vol 37, No 3, March 1989, pp 360-377.
- [4] A. Lannes, "Backprojection mechanisms in phase-closure imaging. Bispectral analysis of the phase-restoration process", *Exper. Astr.* 1:47-76, 1989.
- [5] J. Le Roux, "Bispectral analysis of bidimensional sampled signals", report 13S (University of Nice), submitted for publication to *Multidim. Syst. and Sig. Proc.* in 1990.
- [6] K. S. Lii and M. Rosenblatt, "Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-Gaussian linear processes", *Ann. Statist.*, vol. 10, 1982, pp 1195-1208.
- [7] A. W. Lohman and B. Wirnitzer, "Triple correlation", *Proc. IEEE*, vol. 72, 1984, pp 889-901.
- [8] A. W. Lohmann, G. Weigelt and B. Wirnitzer, "Speckle masking in astronomy : triple correlation theory and applications", *Applied Optics/col.* 22, No 24/ 15 Dec. 1983, pp 4028-4037.
- [9] T. Matsuoka and T. J. Ulrych, "Phase estimation using the bispectrum", *Proc. IEEE*, vol. 72, 1984, pp 1403-1411.
- [10] M. Mendel, "Tutorial on higher order statistics (spectra) in signal processing and system theory : theoretical results and some applications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, n° 3, March 1991, pp 278-305.
- [11] C. L. Nikias and M. R. Raghuvver, "Bispectrum estimation : a digital signal processing framework", *Proceedings of the IEEE*, vol. 75, n° 7, July 1987, pp 869-891.
- [12] A. Papoulis, "Signal analysis", McGraw Hill, 1977.
- [13] F. Roddier, "Triple correlation as a phase closure technique", *Opt. Comm.* 60, pp145-148, 1986.
- [14] F. Roddier, "Interferometric imaging in optical astronomy", *Preprints series, National Optical Astronomy Observatories*, 1987.
- [15] A. M. Tekalp and A. T. Erdem, "Two dimensional higher order spectrum factorization with application in non gaussian image modelling", *Proceedings of the workshop on higher order spectral analysis*, Vail, Colorado, June 1989, pp 186-190.
- [16] A. M. Tekalp and A. T. Erdem, "Higher order Spectrum factorization in one and two dimensions with applications in signal modeling and nonminimum phase system identification", *IEEE trans on ASSP*, vol. 37, n° 10, October 1989, pp 1537-1549.
- [17] G. P. Weigelt, "Modified astronomical speckle interferometry, speckle masking", *Opt. Comm.*, 21, 55-59 (1977).