

## IMAGERIE DES MILIEUX CONDUCTEURS PAR COURANTS DE FOUCAULT

D. Prémel\*, A.M. Djafari\* et B. David\*\*

(\*) Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-ESE-UPS). Plateau du Moulon, 91192 Gif sur Yvette Cédex, France

(\*\*) CEA : Irdi, Dcem, Sta, Lcme. 91190 Gif sur Yvette, France

### RÉSUMÉ

Cet article présente un procédé récent d'imagerie des milieux conducteurs, qui permettrait l'évaluation non destructive d'un matériau conducteur à partir de signaux à courants de Foucault. Le procédé formulé en termes de problème inverse permet d'obtenir directement une image du milieu examiné. Après avoir développé un modèle linéaire reliant les grandeurs mesurées à l'image des variations de la conductivité relative du milieu, nous abordons ici l'étape suivante qui est la résolution du problème inverse. Nous avons opté pour une approche stochastique bayésienne (estimation par maximum *a posteriori* MAP) qui intègre notre connaissance sur la physique du problème en une loi *a priori* sur l'objet, traduisant en particulier son caractère borné entre 0 et 1, afin d'obtenir une solution unique et stable vis à vis des erreurs de modélisation et du bruit de mesure.

### 1. INTRODUCTION

Le sujet de cette communication est celui de l'imagerie des milieux conducteurs qui permettrait l'évaluation non destructive d'un matériau conducteur, à partir de signaux à courants de Foucault. Dans les méthodes actuelles, les signaux observés lors d'examen non destructifs par courants de Foucault ne donnent qu'une information très éloignée d'une "vraie" image des inhomogénéités du milieu examiné. Les signaux recueillis exigent en effet une connaissance expérimentale très approfondie pour caractériser la nature et la dimension d'un défaut éventuel. Malgré les performances des méthodes instrumentales actuelles, nous désirons développer ici une technique d'imagerie des milieux conducteurs afin d'obtenir une image quantitative de la répartition spatiale d'une grandeur significative du matériau examiné.

Cette nouvelle approche consiste à formuler le problème en terme de problème inverse dans lequel il s'agit de reconstruire une image quantitative des variations de la conductivité relative du milieu examiné à partir de mesures effectuées à l'extérieur du bloc inspecté (mesure d'une force électromotrice induite  $e(\omega, z)$ , à une pulsation d'excitation  $\omega$  donnée, aux bornes d'une bobine d'induction se déplaçant selon un axe  $oz$  à la surface du bloc). L'image recherchée est la conductivité relative définie par la fonction :

$$f(r, z) = \frac{\sigma_0 - \sigma(r, z)}{\sigma_0}$$

où  $r$  est une coordonnée selon la direction radiale,  $z$  la coordonnée selon l'axe  $oz$  horizontal,  $\sigma_0$  la conductivité de la zone homogène et  $\sigma(r, z)$  la conductivité dans la zone de défaut.

### ABSTRACT

In this paper, we explain a recent procedure of imaging of conductive media, which would be able to non destructively evaluate a conductive media from eddy current measurements. The problem of eddy current testing, formulated as an inverse problem, allows to obtain, directly, an image of the examined media. We have before proposed a linear model which relates the measurements data to the image of the relative variations of the conductivity media. We examine now the next step which is solving the inverse problem. We propose a Bayesian stochastic approach (maximum *a posteriori* MAP estimation) which lets us to use our *a priori* knowledge on the physics of the problem in prior probability of the object to obtain a unique and stable solution.

La résolution d'un tel problème d'imagerie nécessite la résolution de trois problèmes auxiliaires :

- un problème direct dans lequel on cherche un modèle sous la forme d'une relation, si possible linéaire, entre les grandeurs à estimer et les grandeurs mesurées. Cette relation doit pouvoir décrire au mieux les interactions entre l'onde électromagnétique évanescence et l'objet désigné par la région inhomogène caractérisant le défaut.
- un problème d'instrumentation dans lequel on génère des ondes qui interagissent avec l'objet et on mesure les résultats de ces interactions.
- un problème inverse qui consiste à reconstruire la grandeur significative du milieu conducteur à partir de données fournies par l'instrumentation et à calculer l'image correspondante à l'aide du modèle défini dans la résolution du problème direct.

Pour la résolution des deux premiers problèmes, nous avons montré [1-2] qu'il était possible, moyennant une hypothèse de linéarisation, de relier simplement les signaux mesurés  $e(\omega, z)$  à l'objet  $f(r, z)$ . Nous allons dans la suite rappeler la formulation du problème direct et en déduire la procédure de reconstruction adéquate qui tient compte des particularités du modèle obtenu dans la résolution du problème direct.

### 2. FORMULATION DU PROBLEME

#### 2.1 Rappel sur la résolution du problème direct :

A partir des équations de Maxwell dans les différents milieux mis en jeu (soit de l'air et le milieu conducteur non ferromagnétique), nous formulons plusieurs équations de



diffusion qui relie le champ électrique au voisinage de la sonde de lecture (bobine d'auto-induction) à la répartition spatiale des courants fictifs dus à la présence d'inhomogénéités dans un milieu homogène. Puis, en introduisant des fonctions de Green, solutions des équations de diffusion pour un terme source impulsif, nous décrivons la résolution du problème direct par un ensemble d'équations intégrales qui relie la grandeur mesurée, (force électromotrice (fem) d'auto-induction), à l'image des variations de la conductivité relative dans la région de défaut. L'application d'une hypothèse de Born, qui se justifie par le fait que le milieu est peu inhomogène, nous permet ensuite d'obtenir une relation linéaire entre la répartition spatiale de la conductivité relative  $f(r, z)$  et la fem d'auto-induction mesurée aux bornes de la sonde lorsque celle-ci se déplace le long de l'axe  $oz$ . Enfin, après discrétisation en couches successives de ces équations, nous avons montré que le signal observé  $e(\omega, z)$  est relié à l'image recherchée  $f(r, z)$  par :

$$e(\omega, z) = \sum_{k=1}^n f(r_k, z) * h_k(\omega, z) + b(\omega, z) \quad (1)$$

où  $*$  désigne l'opérateur de convolution. Les fonctions de transfert des filtres  $h_k(\omega, z)$  sont associées aux fonctions de Green. Elles correspondent à la géométrie du problème traité et dépendent de la couche  $k$  considérée ainsi que de la pulsation de l'onde d'excitation notée  $\omega$ . Nous avons en particulier étudié ce modèle pour le cas d'une géométrie à symétrie axiale. Les erreurs de modélisation et les bruits de mesure sont désignés par un bruit d'observation  $b(\omega, z)$  supposé additif. Ce modèle représenté sur la figure 1, a déjà fait l'objet de tests de validation et est à la base de notre méthode d'inversion[2].

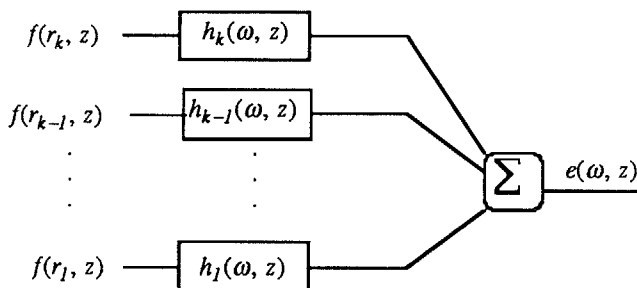


Figure 1: Modélisation du problème direct.

## 2.2 Résolution du problème inverse.

La résolution du problème inverse consiste à reconstruire l'image  $f(r, z)$ , à partir de plusieurs mesures de la force électromotrice induite  $e(\omega, z)$ , obtenues par déplacement de la sonde le long de l'axe  $oz$  du cylindre et à différentes fréquences. Par discrétisation du modèle le long de l'axe  $oz$ , la relation (1) peut être réécrite sous la forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (2)$$

où  $\mathbf{y}$  est un vecteur qui contient les échantillons de la force électromotrice mesurée  $e(\omega, z)$ . Soit une position  $z_k$  telle que,  $1 \leq k \leq nzm$ , où  $nzm$  est le nombre de points de mesure et soit plusieurs séries de mesures telles que  $1 \leq nfr \leq nfreq$ , où  $nfreq$  est le nombre de fréquences.  $\mathbf{y}$  est alors un vecteur de dimension  $Nm = nzm * nfreq$ .  $\mathbf{A}$  est une matrice bloc-Toeplitz de très grande dimension dont les éléments, à valeurs complexes sont calculés à l'aide des fonctions  $h_k(\omega, z)$ . L'objet  $\mathbf{x}$  est un vecteur qui contient les valeurs des pixels de l'image. Le bruit de mesure  $\mathbf{b}$  est supposé indépendant de  $\mathbf{x}$ . La reconstruction de l'objet  $\mathbf{x}$ , à partir des observations  $\mathbf{y}$  est un problème particulièrement mal posé, du

fait que les coefficients des réponses impulsives  $h_k(\omega, z)$  dans les couches profondes sont très vite atténués à cause du phénomène de peau dans le milieu conducteur. La situation s'aggrave encore lorsque la fréquence de l'onde excitatrice augmente. La matrice  $\mathbf{A}$  étant sous-déterminée et très mal conditionnée, une solution inverse généralisée ou une solution au sens des moindres carrés ne serait pas satisfaisante. Il faut donc rechercher une solution régularisée.

On adopte pour cela une approche stochastique bayésienne qui se décompose en plusieurs étapes:

- 1) On attribue à l'objet  $\mathbf{x}$  une loi *a priori*  $p(\mathbf{x})$  qui traduit en terme de probabilité notre connaissance *a priori* sur l'objet.
- 2) On attribue une loi de probabilité  $p(\mathbf{y}/\mathbf{x})$  au processus de mesure qui permet de traduire notre connaissance ou nos hypothèses sur la nature du bruit de mesure et les erreurs de modélisation.
- 3) La règle de Bayes nous permet ensuite de combiner l'information *a priori* avec l'information apportée par les données. On calcule alors la loi de probabilité *a posteriori* déterminée par

$$p(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = p(\mathbf{y}/\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) / p(\mathbf{y})$$

où  $p(\mathbf{y})$  est une constante de normalisation de la loi *a posteriori*.

- 4) Enfin, par application d'une règle de décision, on retient une solution  $\hat{\mathbf{x}}$ . Selon le critère MAP, la solution est celle qui maximise la probabilité *a posteriori* :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{ p(\mathbf{x}/\mathbf{y}) \} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{ p(\mathbf{y}/\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \} \quad (3)$$

La détermination de la loi *a priori* sur l'objet est l'étape la plus délicate : Comment traduire notre connaissance *a priori* sur l'objet  $\mathbf{x}$  inconnu en termes d'une loi de probabilité *a priori* ? Si cette connaissance peut s'exprimer sous la forme d'un nombre fini d'espérances de fonctions connues, alors le principe du maximum d'entropie permet en général de choisir une famille de lois *a priori* cohérente avec notre connaissance *a priori* sur la solution. Dans le paragraphe suivant, nous allons détailler ces différentes étapes.

## 3. MÉTHODE D'INVERSION PROPOSÉE

Nous allons dans un premier temps, choisir une famille de lois *a priori* qui nous a semblé tenir compte de notre connaissance *a priori* sur l'objet  $\mathbf{x}$  et nous montrerons par la suite que cette famille de lois appartient aux familles de lois à maximum d'entropie.

### 3.1 Détermination de la loi *a priori* $p(\mathbf{x})$ .

Notre connaissance *a priori* réside dans le fait que les valeurs des pixels de l'image représentent les valeurs de la conductivité relative dans le milieu conducteur. D'après la nature du problème, nous savons que le milieu est composé de zones homogènes et de zones inhomogènes pour lesquelles la conductivité relative varie entre 0 et 1. Si la zone inhomogène est de l'air, la conductivité relative est égale à 1, dans le cas d'incrustations de matériaux plus conducteurs que l'air et moins conducteurs que le matériau homogène considéré, elle peut être inférieure.

On peut résumer alors notre connaissance *a priori* en disant qu'il y a beaucoup de valeurs proches de 0 (zone homogène) et proches de 1 (zone inhomogène constitué d'air). Il peut cependant y avoir des valeurs comprises entre 0 et 1 mais que la probabilité d'apparition de celles-ci est nettement plus faible. Nous avons traduit cette connaissance en terme de loi de probabilité en supposant que  $p(\mathbf{x})$  appartient à une famille de lois de probabilité Bêta de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . De plus, dans la mesure où nous

n'avons aucune information sur les corrélations entre les pixels de l'image, nous utiliserons l'indépendance entre les pixels. On a alors :

$$p(x) = \prod_{i=1}^N p(x_i) \text{ avec } p(x_i) = C x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} \quad (4)$$

où  $C$  est une constante de normalisation de la loi de probabilité. La figure 2 ci-dessous montre les variations de cette loi pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

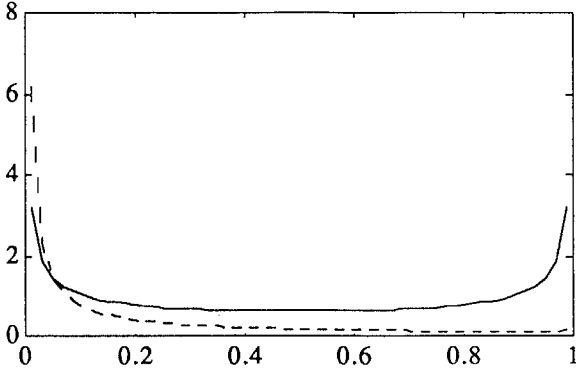


Figure 2 : variations de la loi  $p(x)$

On remarque que pour  $\alpha = \beta = 0,5$  (courbe représentée en trait plein), on privilégie la détection de zones homogènes et de zones inhomogènes constituées d'air mais que les valeurs intermédiaires ne sont pas exclues; on peut détecter une incrustation de matériau conducteur. Pour des valeurs telles que  $\alpha = 0,1$  et  $\beta = 0,9$  (courbe représentée en pointillés), on considère que le milieu est très peu inhomogène : ce qui se traduit par une forte concentration de valeurs autour de zéro. Suivant les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut donc rechercher des défauts de différentes natures et suivant les contraintes du contrôle non destructif dans la recherche de défaut, on peut forcer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  correspondantes à ces contraintes. Pour toutes ces raisons, nous pensons que le choix de cette famille de probabilité est bien adapté au problème. Nous allons dans le paragraphe suivant confirmer ce choix en recherchant les liens avec l'approche du maximum d'entropie.

### 3.2 Les liens avec l'approche du maximum d'entropie.

Le principe du maximum d'entropie permet d'attribuer une loi de probabilité  $p(x)$  à une variable aléatoire  $x$  lorsque notre connaissance *a priori* sur  $x$  est de la forme:

$$\mu_n = E\{\phi_n(x)\} = \int \phi_n(x) p(x) dx \quad n = 1, \dots, M \quad (5)$$

où les  $\phi_n(x)$  sont des fonctions connues [3]. Dans le cas de deux contraintes, la famille de lois *a priori* qui maximise l'entropie, est classiquement donnée par :

$$p(x) = \prod_{i=1}^N p(x_i) = \frac{1}{Z(\lambda, \mu)} \exp\left[-\lambda \sum_{i=1}^N \phi_1(x_i) - \mu \sum_{i=1}^N \phi_2(x_i)\right] \quad (6)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les paramètres de Lagrange, solutions du système d'équations :

$$\frac{\partial \text{Ln } Z(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \text{Ln } Z(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \mu_2 \quad (7)$$

et où  $Z(\lambda, \mu)$  est une constante de normalisation :

$$Z(\lambda, \mu) = \int \exp\left[-\lambda \sum_{i=1}^N \phi_1(x_i) - \mu \sum_{i=1}^N \phi_2(x_i)\right] dx \quad (8)$$

On peut remarquer que la loi Bêta est une loi à maximum d'entropie si on pose :

$$\phi_1(x_i) = \text{Ln } x_i \quad \text{et} \quad \phi_2(x_i) = \text{Ln}(1-x_i)$$

et si on identifie  $(1-\alpha) = -\lambda$  et  $(1-\beta) = -\mu$ . La connaissance de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  permettrait de déterminer numériquement les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  en résolvant le système d'équation (7).

### 3.3 Détermination de la loi $p(y/x)$

Si la connaissance que l'on a sur le bruit se résume à la connaissance de la moyenne et de la variance du bruit, le principe du maximum d'entropie nous donne une distribution gaussienne. Par conséquent, on obtient :

$$p(y/x) \propto \exp[-Q(x)] \quad \text{où} \quad Q(x) = (y-Ax)^T W (y-Ax) \quad (9)$$

$$\text{avec} \quad W = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{Nm}^2}\right) \quad (10)$$

et où les  $\sigma_i^2, i = 1, \dots, Nm$  sont les variances des bruits  $b_i, i = 1, \dots, Nm$

### 3.4 Détermination de la loi *a posteriori* $p(x/y)$

En remplaçant (9) et (6) dans (3), on obtient :

$$p(x/y) \propto \exp\left[Q(x) + \lambda \sum_{i=1}^N \phi_1(x_i) + \mu \sum_{i=1}^N \phi_2(x_i)\right] \quad (11)$$

et si nous retenons une règle de décision sous la forme d'un critère MAP, la solution de (3) revient à calculer la solution :

$$\hat{x} = \arg \min_x \{J(x) = Q(x) + \lambda \sum_{i=1}^N \phi_1(x_i) + \mu \sum_{i=1}^N \phi_2(x_i)\} \quad (12)$$

$$= Q(x) + \lambda H(x) + \mu S(x)$$

A ce stade, on peut donner à cette solution une interprétation au sens de la régularisation. En effet, on peut identifier  $Q(x)$  comme une distance quadratique entre  $y$  et  $\hat{y}$  et  $H(x)$  et  $S(x)$  comme deux fonctionnelles de régularisation et enfin  $\lambda$  et  $\mu$  comme les deux paramètres de régularisation. Si ces deux paramètres sont donnés ou connus, l'estimation de l'objet est immédiate par la résolution de l'équation (12). Dans une application réelle, ces paramètres sont inconnus et il est nécessaire de les estimer aussi à partir des observations. En effet, la solution de (12) se calcule de manière itérative et si on peut faire l'hypothèse que la solution estimée n'est pas trop loin de la vraie solution alors on peut estimer ces deux paramètres par la méthode des moments [4]. Celle-ci consiste à relier les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  à la moyenne  $e = E\{x\}$  et à la variance  $v = E\{(x-e)^2\}$  de l'image  $x$ . En effet, pour la famille de lois *a priori* choisie, on a les relations :

$$\alpha = e \left\{ \frac{e(1-e)}{v} - 1 \right\} \quad \text{et} \quad \beta = (1-e) \left\{ \frac{e(1-e)}{v} - 1 \right\} \quad (13)$$

On propose alors l'algorithme de reconstruction itératif ci-dessous qui calcule les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  à chaque nouvelle estimation de  $x$ .

### 3.5 Algorithme de reconstruction.

L'algorithme mis en oeuvre est décrit en quelques étapes:

1) on suppose que l'on est capable de calculer une bonne estimation initiale  $x^{(0)}$  qui ne soit pas très loin de la vraie solution. On propose une initialisation  $x^{(0)} = \frac{1}{\det(A^T A)} A^T y$  qui n'est pas très loin de la solution [5]. On prendra aussi des valeurs initiales pour  $\lambda$  et  $\mu$  en considérant que le milieu est peu inhomogène.



2) à partir de l'estimation courante de  $x^{(k)}$ , on calcule la moyenne  $e$  et la variance  $v$  empiriques de l'image et on en déduit les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  par (13)

3) on recherche ensuite une nouvelle solution  $\hat{x}$  selon l'équation (12) par minimisation du critère par la méthode des gradients conjugués. Puis on retourne au pas 2 jusqu'à ce que les variations des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  deviennent peu sensibles.

#### 4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET SIMULATIONS

Plusieurs résultats de reconstruction sont présentés, non seulement à partir de données synthétiques mais aussi à partir de données fournies par l'expérimentation. Nous considérons deux objets connus qui nous ont déjà servi à la validation du modèle direct [2]. La figure 3 présente un défaut interne, au sens qu'il est le plus proche de l'axe du cylindre testé et un défaut externe. La figure 4 présente les résultats de la reconstruction à partir des données simulées obtenues par la résolution du problème direct simulant l'expérience. La figure 5 présente les résultats de la reconstruction à partir des données réelles mesurées par le dispositif expérimental. A titre de comparaison, la figure 6 présente les résultats que l'on obtient par une méthode non régularisée. Il s'agit d'une reconstruction par un critère des moindres carrés et avec un nombre d'itérations égal au nombre d'itérations utilisé pour la méthode de reconstruction proposée. Autrement dit, nous avons fixé  $\lambda = \mu = 0$  dans notre méthode.

#### 5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

Nous avons présenté un procédé d'imagerie des milieux conducteurs à partir de signaux à courants de Foucault qui permet d'obtenir une image quantitative de la répartition spatiale de la conductivité relative du milieu conducteur examiné.

Le contrôle non destructif à courants de Foucault ne nécessite plus dans cet examen, l'expertise approfondie de l'expérimentateur. Nous avons pour cela formulé le problème en termes de problème inverse et après avoir développé un modèle de résolution du problème direct, nous avons proposé une méthode de reconstruction basée sur une approche stochastique Bayésienne qui permet de combiner l'information contenue dans notre connaissance *a priori* sur la physique du problème et l'information apportée par les données. Nous avons constaté que l'algorithme mis en oeuvre se comporte de manière satisfaisante pour la reconstruction des objets traités. De plus, les performances de l'algorithme restent satisfaisantes même lorsque l'on traite les données expérimentales.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D. Prémel, A. M. Djafari, G. Demoment, B. David, "Tomographie par courants de Foucault", Actes du 1<sup>er</sup> Congrès COFREND sur les essais non destructifs. Nice 6/9 Nov 1990.
- [2] D. Prémel, A. M. Djafari, G. Demoment, B. David, "Imagerie tomographique des milieux conducteurs par courants de Foucault : résolution du problème direct". Rapport Interne n°: GPI/91/06
- [3] Mohammad-Djafari A. et Idier J., "Maximum Entropy Priors Laws of Images and Estimation of their parameters," Proceedings of the 10th Int. Conf. on Maximum Entropy and Bayesian Methods, Laramie, USA, August 1990.
- [4] Mohammad-Djafari A., "Maximum Likelihood Estimation of Lagrangian Parameters for Maximum Entropy Distributions", Proceedings of the 11th Int. Conf. on Maximum Entropy and Bayesian Methods, Seattle, USA, June 1991.
- [5] Mohammad-Djafari A., "Estimation par maximum de vraisemblance de lagrangiens des distributions à maximum d'entropie". GRETSI 91.

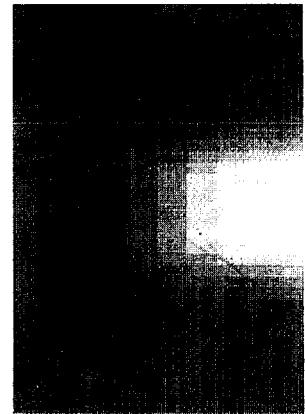
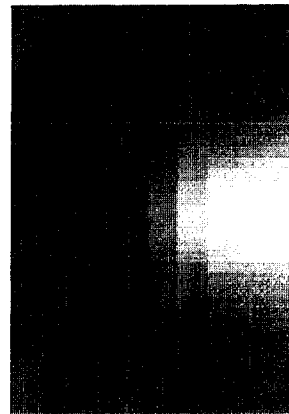
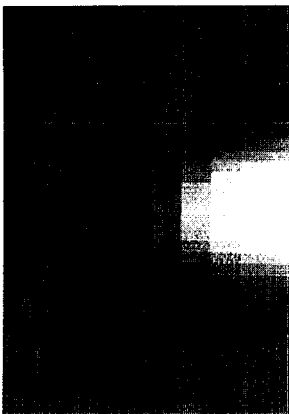
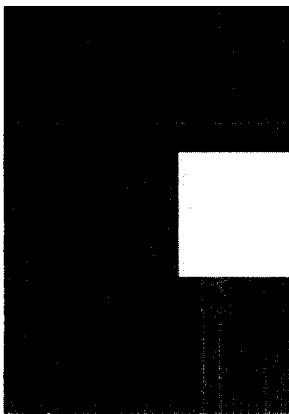
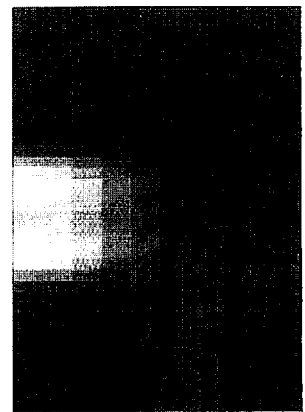
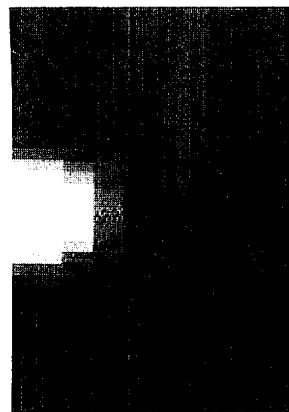
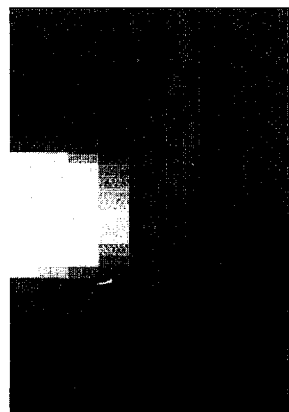
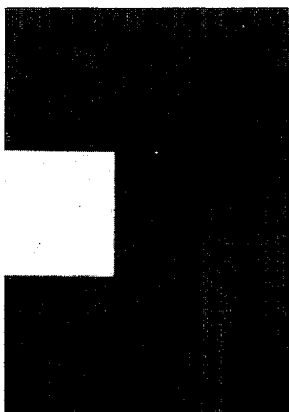


Figure 3

Figure 4

Figure 5

Figure 6