



APPLICATION DE L'OPERATEUR DELTA A LA POURSUITE DE FREQUENCES
POUR SIGNAUX RAPIDEMENT ECHANTILLONNES

N.K. M'SIRDI, R. RAMDANI

Laboratoire de Robotique de Paris (UA CNRS 1305). UPMC Tour 66 - 2^e ét.
4, place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05. FAX : (1) 44 27 62 14

GRECO (SARTA) CNRS Bp 46
St Martin d'Hères 38402 France

RÉSUMÉ

ABSTRACT

RESUME:

On considère, dans cet article, le cas de la poursuite de fréquences pour des signaux suréchantillonnés. Le suréchantillonnage pose des problèmes de conditionnement numérique et de sensibilité des algorithmes d'identification de signaux et systèmes. Pour éviter ces problèmes, nous proposons l'utilisation des équations aux différences finies pour le développement d'algorithmes de traitement de signaux. Pour les signaux à bandes étroites, les performances obtenues sont meilleures et ne dépendent pas de la période d'échantillonnage. Les modèles utilisés dans ce cas tendent vers leur équivalent continu, quand la période d'échantillonnage tend vers zéro.

ABSTRACT:

The problem of frequency estimation for rapidly sampled signals is considered in this paper. The effect of rapid sampling in signals or system identification leads to some conditioning and optimization problems. To overcome these problems, the use of the delta operator is proposed for the design of signal processing algorithms. The Adaptive Notch Filters and Zero Tracking Algorithm are redesigned. The obtained performances of the algorithms are enhanced and independent of the sampling period T_e . When T_e tends to zero, the involved discrete time model tends to the continuous one.

1. Introduction

En automatique comme en traitement du signal, dès lors qu'on s'intéresse au comportement dynamique d'un processus et pour l'analyse des propriétés caractéristiques de ce dernier, on a recours aux techniques de transformation temps - fréquence (transformation de Laplace, de Fourier continue ou discrète et transformation en z pour les systèmes ou signaux discrets). Ces dernières sont utilisables après l'étape de modélisation du processus par des équations d'état, différentielles, aux différences finies ou de récurrence, selon le cas discret ou continu. L'opérateur retard q^{-1} (défini par $q^{-1}x_k = x_{k-1}$), est largement utilisé en traitement numérique du signal après échantillonnage du processus [1]. L'inconvénient est que cet opérateur n'est pas équivalent, en discret à l'opérateur dérivé (d/dt) utilisé en continu. Ceci entraîne, si la fréquence d'échantillonnage est trop élevée, une ambiguïté dans la correspondance entre le modèle optimal en continu et celui en discret [2-5]. Une meilleure correspondance est obtenue (entre le continu et le discret), si l'opérateur dérivation est approché par un opérateur "difference" noté δ ($\delta=(q-1)/T_e$) [6].

Dans cet article on présente la transformation en delta [6] qui réalise une approche unifiée entre les cas continu et discret. Après un bref rappel de ses propriétés intéressantes pour le traitement numérique, deux algorithmes proposés pour les signaux non stationnaires à bandes étroites sont reformulés dans l'espace delta. La convergence de ces algorithmes est établie de la même manière que pour l'opérateur retard. Les algorithmes ainsi obtenus sont moins sensibles au bruit, ont une meilleure résolution, sont plus robustes numériquement et le choix de leurs paramètres est indépendant de la période d'échantillonnage.

2. Préliminaires

L'opérateur delta (δ) peut être défini par l'approximation ci dessous où T_e désigne la période d'échantillonnage ($t=kT_e$) et q l'opérateur décalage:

Continu
$$dy(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

discret

$$\delta y(t) = \frac{y(k+1) - y(k)}{T_e} = \frac{q - 1}{T_e} y(k) \quad (1)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que l'intervalle T_e est petit, elle correspond à la discrétisation par la méthode des rectangles. Néanmoins, nous définirons la relation entre la représentation δ et la représentation en q (ou z) par $\delta=(q-1)/T_e$ ou par $\gamma=(z-1)/T_e$ dans le domaine fréquentiel. Cette relation entre q et δ est linéaire. Ceci entraîne une transformation du domaine de stabilité et la conservation des bonnes propriétés de la transformation en z ou de la transformation de Laplace. Le cercle unité du domaine en z (ou le demi-plan gauche du domaine continu en p) devient un cercle de centre $-1/T_e$ et de rayon $1/T_e$ (figure 1). Si $T_e \ll 1$ le domaine de stabilité est donc plus grand et la résolution meilleure pour le domaine δ que le domaine en z . Remarquons que si T_e tend vers zero ce domaine tend vers le demi-plan gauche donc, plus T_e est petit, meilleure est la résolution.

Considérons un système linéaire continu de fonction de transfert $G(p)$ dont les pôles sont p_i et les zéros

$$z_i: \quad p_i = -\sigma_i + j \omega_i \quad \text{et} \quad z_i = -\xi_i + j \eta_i \quad (2)$$

$$G(p) = K \frac{\prod_{i=1}^{i=m} (p - z_i)}{\prod_{i=1}^{i=n} (p - p_i)} \quad m < n \quad (3)$$

La fonction de transfert en z équivalente $H(z)$ a pour zéros Z_i et pour pôles P_i en plus de ceux provenant de l'échantillonnage.

$$P_i = e^{p_i T_e} = e^{-\sigma_i T_e} e^{j \omega_i T_e} \quad \text{et} \quad Z_i = e^{z_i T_e} \quad (4)$$

$$H(z) = K_e \frac{\prod_{i=1}^{i=n} (z - Z_i)}{\prod_{i=1}^{i=n} (z - P_i)} \quad (5)$$

L'équation (4) montre que lorsque T_e tend vers zéro, le module de tous les pôles tend vers l'unité (limite du domaine de stabilité) et l'argument vers zéro. On tend asymptotiquement vers un système composé de n intégrateurs. Ceci entraîne les problèmes de résolution vus en identification [2-7].



La fonction en delta équivalente $H(\delta)$ a pour zéros δ_i et pour pôles γ_i :

$$\gamma_i = \frac{P_i - 1}{Te} = \frac{e^{p_i Te} - 1}{Te} = \frac{e^{-\sigma_i Te + j\omega_i Te} - 1}{Te} \quad (6)$$

Par opposition au domaine en z , dans ce cas, lorsque Te tend vers zéro, les pôles en δ tendent vers les pôles du système continu ($\gamma_i \approx p_i$) et le domaine de stabilité devient le demi-plan gauche (figure 2). Les propriétés de la représentation en δ (ou de la fonction de transfert $H(\gamma)$) se résument par le lemme ci dessous démontré dans [5].

Lemme: Soit un système de fonction de transfert $G(p)$ définie par (2) et (3). La fonction de transfert en δ qui lui correspond $H(\gamma)$ possède ($m < n$):

(i) m zéros δ_i tels que: $\lim_{Te \rightarrow 0}(\delta_i) = z_i \quad i=1, \dots, m$; z_i

zéros de $G(p)$,

et $r=n-m-1$ zéros tels que:

(ii) $\lim_{Te \rightarrow 0}(\delta_i) = -\infty \quad i=m+1, \dots, n-1$;

(iii) $\lim_{Te \rightarrow 0}(\prod_{i=1}^{i=r} [\gamma - \delta_i]) = Te^{-r} B_r(\gamma Te)$; avec $B_r(\gamma Te)$

polynôme en γTe de degré r $B_0=1, B_1=\gamma Te+2, B_2=(\gamma Te)^2+6\gamma Te+6, B_3=(\gamma Te)^3+14(\gamma Te)^2+36\gamma Te+24, \dots$

Ces résultats soulignent l'intérêt d'utiliser la représentation en delta plutôt que celle en z pour les signaux rapidement échantillonnés ou dont la plage de variation de fréquence est très large pour poursuite de fréquences. L'utilisation de l'opérateur delta, nous permet l'obtention d'algorithmes hybrides proches des algorithmes discrets et tendant vers leur équivalent continu lorsque Te tend vers zéro.

3. Filtrés Sélectifs Hybrides Adaptatifs FSHA

Considérons un signal à bandes étroites rapidement échantillonné défini par:

$$y_k = \sum_{i=1}^{i=p} c_i(k) \cdot \sin(\omega_i Te \cdot k + \phi_i) + v_k \quad (7)$$

v_k est un bruit blanc centré, ω_i, ϕ_i sont les pulsations et phases des composantes fréquentielles d'amplitudes variant dans le temps $c_i(k)$. Il a été établi, dans un

contexte d'estimation et poursuite de fréquence, que le modèle optimal est un processus ARMA ayant ses pôles et zéros aux mêmes fréquences [7]. Cette structure est celle des Filtrés Sélectifs Adaptatifs obtenus en exploitant la connaissance a priori sur le signal (bandes étroites). Elle peut être mise sous forme de produit de cellules du second ordre comme suit [8]:

$$H(q^{-1}) = \prod_{i=1}^{i=p} \frac{1 + r a_i q^{-1} + r^2 q^{-2}}{1 + a_i q^{-1} + q^{-2}} = \prod_{i=1}^{i=p} H_i(q^{-1}) \quad (8)$$

Le paramètre r définit la largeur de bande, c'est le rapport entre le module des zéros et celui des pôles. La fréquence est définie par $a_i = -2\cos(\omega_i Te)$. On remarque, dans ce cas, que si $Te \rightarrow 0$ on obtient $a_i = -2$ pour tout i et:

$$H(q^{-1}) = \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\{1 - r q^{-1}\}^2}{\{1 - q^{-1}\}^2} \quad (9)$$

L'équation (9) illustre les problèmes de sensibilité rencontrés dans le cas d'un suréchantillonnage. Le modèle optimal, en temps continu, correspondant à un filtre sélectif est:

$$H(p) = \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\omega_i^2 + p^2}{r\omega_i^2 + (p + \eta)^2} \quad \text{avec } \eta = (r-1)/Te \quad (10)$$

Pour obtenir la fonction de transfert en δ , nous substituons $q=1+\delta Te$ dans l'équation (8), ce qui nous donne:

$$H(\delta) = \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\delta^2 + C_i \delta + D_i}{1 + A_i \delta + B_i} = \prod_{i=1}^{i=p} H_i(\delta) \quad (11)$$

Les paramètres B_i, C_i , et D_i sont fonction de A_i ;

$$B_i = A_i / Te ; C_i = (2+r(A_i Te - 2)) / Te ; D_i = (1+r^2 + r(A_i Te - 2)) / Te^2 \quad (12)$$

Nous devons donc estimer en ligne un seul paramètre par cellule, si la mise en oeuvre est réalisée en cascade. L'algorithme hybride sera donc aussi peu complexe que les FSA conventionnels [7]. L'apport de cette représentation est que si Te tend vers zéro alors la fonction de transfert $H(\delta)$ tend vers celle de l'équation (10). Si toutes les fréquences sont indépendantes, nous pouvons considérer l'adaptation de chacune des cellules de la cascade indépendamment des autres [8]. Si on note $y_j(k)$, la sortie de la jème cellule, $H_i(\delta)$ sa fonction de transfert et $e_j(k)$ son entrée, l'équation du modèle de cette étape s'écrit:

$$y_j(k) = H_i(\delta) e_j(k) = \frac{A(r, \delta)}{A(\delta)} e_j(k) = \frac{C(\delta)}{A(\delta)} e_j(k) \quad (13)$$

Ainsi la méthode de l'erreur de prédiction récursive [1] peut être appliquée pour l'estimation du paramètre A_i .

L'algorithme ainsi obtenu en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance récursive (MVR) est donné par le tableau T1. Dans ce qui suit le $\hat{\cdot}$ indique qu'il s'agit d'une estimation. (14)

TABLEAU T1: Algorithme d'estimation hybride	
$\hat{y}_k = \alpha_i \hat{\varphi}_k + \frac{r-1}{Te} y_f(k-1)$	$\alpha_i = a_i(r-1)/Te$
$e_k = \hat{y}_k - y_k$	$\hat{\varphi}_k = \delta y_f(k) + y_f(k) / Te$
$\delta F = \frac{-F \psi^T \psi F}{\lambda + Te \psi^T \psi F \psi}$	$y_f(k) = y_k / \hat{A}(r, \delta)$
$\delta \alpha_i = \frac{F \psi e_k}{\lambda + Te \psi^T \psi F \psi}$	$\alpha_i = C_i - A_i$
$\psi = \frac{y_{k-1} - r e_{k-1}}{\hat{A}(r, \delta)}$	$\beta_i = D_i - B_i$

Remarques: Le modèle est linéaire en les paramètres. L'information utilisée par l'algorithme ($y_f(k)$) est préfiltrée par la partie MA du modèle estimé. La stabilité de la partie MA doit être contrôlée, à moins que l'on ne choisisse un paramètre r variable correctement ajusté, comme dans [8]. Cet algorithme tend vers celui du maximum de vraisemblance et on montre les propriétés ci dessous.

Propriété 1: Il existe une loi de variation pour le paramètre r de la forme $r(k) = r_0 r(k-1) + (1-r_0) r_f$ telle que l'estimation de $A(r(k), \delta)$ soit infiniment souvent stable.

Propriété 2: Il existe un choix (r_0, r_f) tel que la fonction de transfert $A(r(k), \delta) / A(r(k), \delta)$ vérifie la condition de Stricte Positivité Réelle (SPR).

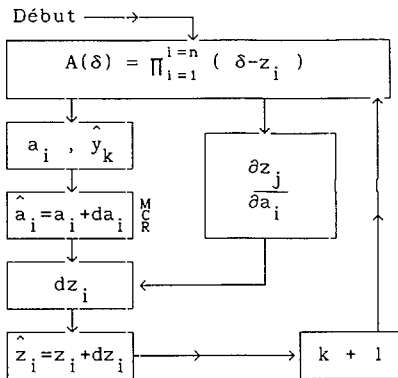
Les propriétés 1 et 2 permettent d'établir la convergence de l'estimation et la réjection du bruit de manière quasi certaine [7-8]. L'utilisation d'un paramètre r variant exponentiellement rend l'algorithme robuste vis-à-vis du bruit et accélère sa convergence [9].

4. Algorithme Hybride de Poursuite des Zeros AHPZ

Hormis la poursuite de fréquence, pour diverses raisons, on s'intéresse souvent à la poursuite des pôles et zéros d'un système [10]. Plutôt que d'estimer les paramètres d'un modèle du processus, pour ensuite en calculer les pôles et zéros, il vaut mieux définir une procédure itérative pour la mise à jour directe des pôles et zéros en ligne. Cette procédure est non linéaire mais peut être réalisée grâce un algorithme adaptatif combiné à une procédure de calcul algébrique [11]. On calcule le polynôme correspondant à un ensemble de pôles estimés à chaque itération. Ce calcul équivaut



à l'introduction de connaissances à priori dans l'Algorithme d'Adaptation Paramétrique (AAP) qui peut être celui des Moindres Carrés Récurif (MCR) [12]. Cet algorithme est schématisé par la figure ci-dessous pour le cas simple d'un processus AR pour la poursuite des pôles.



Poursuite des Zéros Hybride AHPZ

On considère ici le cas d'un signal à bandes étroites y_k représenté par un modèle AR (e_k est un bruit blanc centré):

$$A(\delta) y_k = e_k \quad (15)$$

L'idée de base de cet algorithme est de focaliser la loi d'adaptation sur la mise à jour des zéros de l'équation $A(\delta)=0$, selon la procédure:

$$z_i(k) = z_i(k-1) + dz_i(k) \quad , \quad i=1, \dots, n \quad (16)$$

où les $z_i(k)$ sont les estimations des zéros à l'instant k tout en sachant que les paramètres du polynôme $A(\delta)$ sont mis à jour par un AAP, ici celui des MCR:

$$a_i(k) = a_i(k-1) + da_i(k) \quad i=1, \dots, n \quad (17)$$

$$A(\delta, k) = a_n(k)\delta^n + a_{n-1}(k)\delta^{n-1} + \dots + a_1(k)\delta + 1 = 0 \quad (18)$$

Après évaluation de la jacobienne, un calcul algébrique permet de déduire les relations entre les variations des coefficients du polynôme et ses zéros [10]. Nous faisons ici l'hypothèse que tous les pôles sont simples et deux-à-deux conjugués. Cette hypothèse correspond au cas à bandes étroites.

$$\frac{\partial z_i(k)}{\partial a_j(k)} = - \frac{(z_i(k))^{n-j}}{\prod_{i=1}^{j=n} (z_i(k) - z_j(k))} \quad (19)$$

$$dz_i = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial z_i(k)}{\partial a_j(k)} \cdot da_j \quad (20)$$

A l'aide de l'estimation précédente des zéros, par convolution on calcule les coefficients du polynôme AR qui va permettre d'évaluer la prédiction y_k et l'erreur de prédiction ϵ_k (voir équation (15) et (21) (22)).

$$\hat{y}_k = (1-A(\delta))y_k = \hat{\theta}_k^T \phi_k \quad (21)$$

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k \quad (22)$$

$$\phi_k^T = [-\delta^n y_k, -\delta^{n-1} y_k, \dots, -\delta y_k] \quad (23)$$

$$\hat{\theta}_k = [a_n(k), \dots, a_2(k), a_1(k)] \quad (24)$$

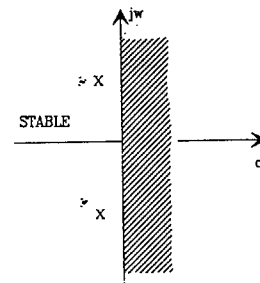
La minimisation du critère quadratique en ϵ_k correspond en fait ici à l'optimisation d'un critère fréquentiel, dans la mesure où cette erreur est évaluée à partir de l'estimation des zéros en ligne. Ceci explique les performances meilleures que celle d'une estimation classique d'un modèle AR par un AAP. La complexité de cet algorithme est un inconvénient qui peut être réduit par une implantation sous forme de cascade de cellules du second ordre et éventuellement, l'emploi de Filtres Sélectifs Adaptatifs [10].

5. Résultats et Conclusion

Les résultats de simulation ont montré que les performances des FSA et des APZ sont maintenues après leur formulation et mise en œuvre dans le domaine en δ . La robustesse numérique est améliorée et le choix des gains insensible à la période d'échantillonnage. Le bénéfice le plus important est que la résolution et ces bonnes performances sont préservées si les signaux sont sur-échantillonnés même dans les cas très bruités (0.7dB et $F_e=23.F_{max}$ par exemple). Par manque de place, les détails et les résultats seront présentés à la conférence. La complexité des algorithmes reste du même ordre que les méthodes adaptatives conventionnelles (avec l'opérateur retard).

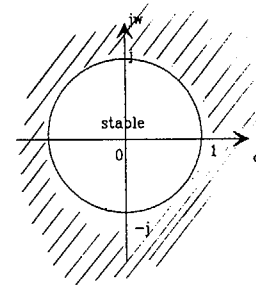
*Ce travail a été réalisé en collaboration avec le LESSI de Fés, Dept de Physique, Fac des Sciences, BP 1796 Fés Atlas, Maroc.

Figure 1



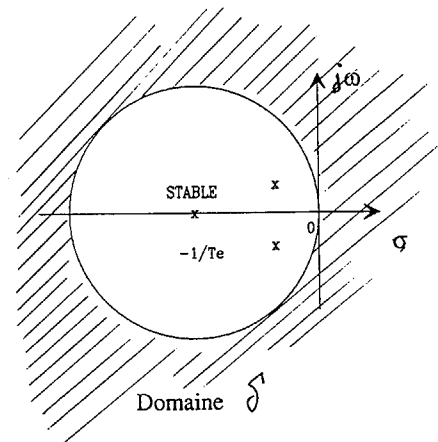
Domaine p

$$p = \sigma + j\omega$$



Domaine z

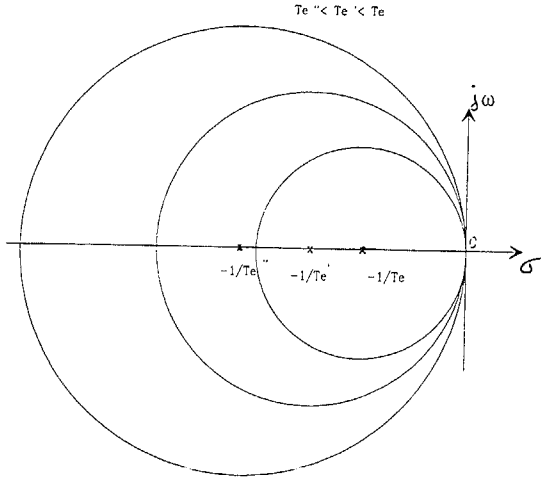
$$z = e^{j\omega T}$$



Domaine δ

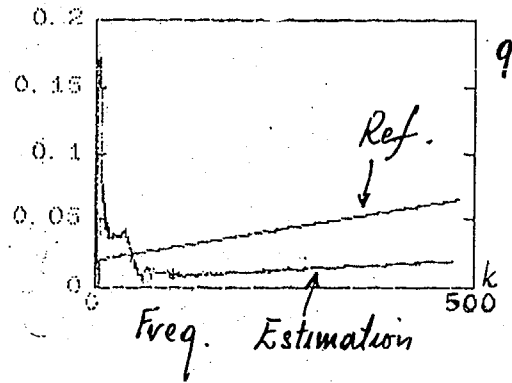
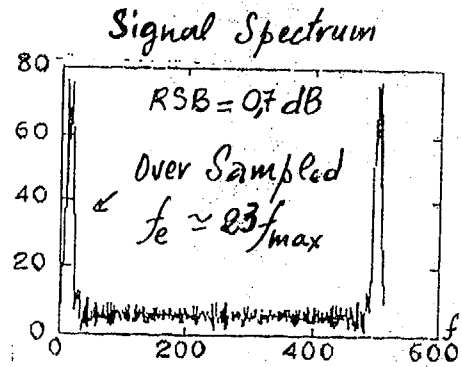


Figure 2. Domaine de stabilité



REFERENCES

[1] L. Ljung. System identification: Theory for the user. Prentice Hall 1987.
 [2] Bo Walberg. The effect of rapid sampling in system identification. Automatica, V 26, N 1, 1990.
 [3] Bo Walberg. Limit results for sampled systems. Int Journal of control, v48, N 3, 1988.
 [4] J. Shoukens. Modelling of continuous time systems using a discrete time representation. Automatica, V 26, N 3, 1990.
 [5] K. J. Astrom, P. Hagander and J. Sternby. Zeros of sampled systems. Automatica, V 20, N 1, 1984.
 [6] R. H. Middleton and G. C. Goodwin. Digital estimation and control: A unified approach. Prentice Hall 1990.
 [7] N. K. M'Sirdi. Modélisation paramétrique et application à l'analyse spectrale adaptative. Thèse d'Etat INPG, Sept 1988, Grenoble, France.
 [8] N. K. M'Sirdi and H. A. Tjokronegoro. Cascaded adaptive Notch filters: An RML estimation algorithm. EUSIPCO 88, Grenoble, France. Septembre 1988.
 [9] N. K. M'Sirdi, C. Bekkali, M. Zouak, J.L. Zarader and L. Radouane. Adaptive notch filters for time varying and fast sampled signals. IMACS-MCTS 91, 7-10 May 1991, Lille, France.
 [10] C. Bekkali, M. Zouak. Rapport interne LESSI 90, LESSI Fac des Sciences, BP 1796 Fes Atlas, Maroc.
 [11] S. J. Orfanidis and L. M. Vail. Zero tracking adaptation algorithms. Proc. ASSP, Spectrum estimation Workshop, Tampla, FL 1983.
 [12] M. Zouak, C. Bekkali et al. Adaptive zero tracking for rapidly sampled systems. IMACS-MCTS 91, 7-10 May 1991, Lille, France.



SNR = 0.7 dB

