

DÉTECTION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE EN PRESENCE DE FLUCTUATIONS DE PHASE

G. VEZZOSI*, F. EHRMANN*, M. PECOT**

*Laboratoire de traitement du signal et de l'image, Campus de Beaulieu, Université de Rennes 1, 35042 Rennes Cédex

**Thomson/CSF-LER, Avenue de Belle Fontaine, 35510 Cesson Sévigné

RÉSUMÉ

Résumé. La détection d'un signal périodique présentant des fluctuations de phase est en général réalisée par : (i) un filtre en peigne isolant les harmoniques du signal, d'horizon inférieur au temps de corrélation des fluctuations ; (ii) une quadrature ; (iii) une intégration temporelle. Nous montrons que lorsque les fluctuations sont les mêmes pour chacun des harmoniques, une meilleure solution consiste à utiliser les sorties du filtre en peigne pour mesurer une matrice de covariance des harmoniques, et à prendre la décision sur la base de la plus grande valeur propre de cette matrice.

1. INTRODUCTION

Un signal périodique réel sans composante continue, de fondamental f_0 connu, et qui dans la bande traitée se réduit à ses N premiers harmoniques, admet la représentation

$$s_p(t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{2i\pi n f_0 t} \quad (1)$$

où les (c_n) sont des constantes complexes inconnues. Le signal appartient au sous-espace engendré par les N exponentielles complexes $\{e^{2i\pi n f_0 t}\}$, et sa détection dans un bruit blanc gaussien est un problème classique de test d'hypothèses linéaires [1]. Le récepteur du maximum de vraisemblance conduit à évaluer la Transformée de Fourier (TF) de l'observation aux fréquences harmoniques ($f_0, 2f_0, \dots, Nf_0$), et à sommer les modules au carré de la transformée. Ce récepteur maximise le minimum de la probabilité de détection à rapport S/B donné. Le cas où f_0 est inconnu se ramène aussitôt au cas précédent par un balayage du fondamental [2].

On se propose ici de généraliser le récepteur précédent au cas d'un signal périodique affecté de fluctuations de phase et d'amplitude. Le signal admet alors la représentation

$$s(t) = \mu(t) e^{i\varphi(t)} s_p(t) \quad (2)$$

où les fluctuations $\mu(t)$ et $\varphi(t)$ peuvent être considérées comme des fonctions approximativement constantes dans tout intervalle de durée T , avec T nettement supérieur à la période $1/f_0$ de $s_p(t)$. Le paramètre T est supposé connu, et détermine pratiquement la durée d'intégration des traitements cohérents (ici des TF).

La particularité du signal (2) provient de ce que les fluctuations de phase et d'amplitude sont les mêmes pour tous les harmoniques, de sorte que les harmoniques restent couplés. Nous montrons au § 2 que la méthode du maximum de vraisemblance conduit dans ce cas à un récepteur semi-cohérent, qui mesure une matrice de covariance des harmoniques, et prend la décision en comparant à un seuil la plus grande valeur propre de cette matrice. Nous rappelons ensuite le principe du récepteur incohérent (§ 3), et nous évaluons les deux récepteurs sur la base de leur facteur de convergence (§ 4).

ABSTRACT

Abstract. The detection of a periodic signal with phase fluctuations is usually performed by : (i) a comb filter which isolates the signal harmonics, whose impulse response length is lesser than the correlation time of the fluctuations ; (ii) a square law detector ; (iii) a temporal integration. It is shown that, when the fluctuations are the same for each harmonic, a better solution is obtained by measuring a covariance matrix between harmonics from the outputs of the comb filter, and by taking the decision on the basis of the greatest eigenvalue of this matrix.

2. LE RECEPTEUR SEMI COHERENT

2.1 Le cas des sauts de phase et d'amplitude

Le modèle de signal (2) met en jeu les fonctions inconnues $\varphi(t)$ et $\mu(t)$, et est donc trop compliqué pour permettre un calcul de maximum de vraisemblance. Un tel calcul devient possible si nous remplaçons les fluctuations $\{\varphi(t), \mu(t)\}$ par de simples sauts de phase et d'amplitude, supposés se produire en des instants fixes multiples du temps T , lui-même multiple de la période $1/f_0$ du signal périodique (1). Si $p(t)$ désigne l'indicatrice de l'intervalle $[0, T]$, le signal à détecter prend ainsi la forme

$$s(t) = \left[\sum_{k=0}^{K-1} \mu_k e^{i\varphi_k} p(t - kT) \right] s_p(t) \quad (3)$$

$0 \leq t \leq KT, K \text{ entier} > 1.$

Il est paramétré par le vecteur complexe des coefficients de Fourier, et par les deux vecteurs réels des facteurs de phase et d'amplitude :

$$\underline{c} = [c_1, \dots, c_N]^T, \\ \underline{\varphi} = [\varphi_0, \dots, \varphi_{K-1}]^T, \\ \underline{\mu} = [\mu_0, \dots, \mu_{K-1}]^T.$$

Le bruit $b(t)$ est supposé blanc, gaussien, complexe, circulaire, de niveau spectral γ_b connu :

$$E b(t) b(t') = 0, \quad E b(t) b^*(t') = \gamma_b \delta(t - t').$$

La détection du signal (3) revient ainsi à tester l'hypothèse simple :

$$H_0 : x(t) = b(t)$$

contre l'hypothèse composée :

$$H_1 : x(t) = b(t) + s(t).$$

Le problème admet pour résumé exhaustif la suite des K vecteurs complexes d'ordre N :

$$\underline{x}(k) = [x_1(k), \dots, x_N(k)]^T, \quad 0 \leq k \leq K - 1,$$



$$x_n(k) = \frac{1}{\sqrt{T}\gamma_b} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-2i\pi n f_o t} x(t) dt, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (4)$$

Comme T est supposé être un multiple de $1/f_o$, les exponentielles complexes $\{e^{2i\pi n f_o t}\}$ sont orthogonales dans l'intervalle d'intégration $[kT, (k+1)T]$, la covariance centrée des vecteurs $\underline{x}(k)$ vaut l'identité, et la log-vraisemblance conditionnelle aux vecteurs \underline{c} , $\underline{\mu}$ et $\underline{\varphi}$ prend la forme :

$$\ell(\underline{x} | \underline{c}, \underline{\mu}, \underline{\varphi}) = \sum_{k=0}^{K-1} \ell_k, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} \ell_k &= \ell(\underline{x}(k) | \underline{c}, \mu_k, \varphi_k) \\ &= \left\| \underline{x}(k) \right\|^2 - \left\| \underline{x}(k) - \mu_k e^{i\varphi_k} \sqrt{\frac{T}{\gamma_b}} \underline{c} \right\|^2. \end{aligned}$$

La maximisation de ℓ_k par rapport au couple (μ_k, φ_k) amène aussitôt :

$$\sup_{\mu_k, \varphi_k} \ell_k = \frac{|\underline{c}^* \underline{x}(k)|^2}{\|\underline{c}\|^2},$$

de sorte que le maximum de la log-vraisemblance par rapport au couple $(\underline{\mu}, \underline{\varphi})$ vaut :

$$\sup_{\underline{\mu}, \underline{\varphi}} \ell(\underline{x} | \underline{c}, \underline{\mu}, \underline{\varphi}) = K \frac{\underline{c}^* \underline{S} \underline{c}}{\|\underline{c}\|^2}, \quad (5)$$

où \underline{S} est la matrice de covariance des harmoniques :

$$\underline{S} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \underline{x}(k) \underline{x}^*(k).$$

Il reste à maximiser la log-vraisemblance (5) par rapport au vecteur des coefficients de Fourier \underline{c} , ce qui donne le récepteur semi-cohérent :

$$\lambda_{\max}(\underline{S}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \text{seuil}. \quad (6)$$

2.2 Le cas de fluctuations. Principe de la mesure de la corrélation entre fréquences

Le récepteur précédent peut être utilisé dans le cas général d'un signal de la forme (2) affecté de fluctuations de phase et d'amplitude. Il suffit de disposer d'une méthode de mesure des éléments de la matrice \underline{S} . Les termes diagonaux de cette matrice donnent la puissance moyenne des harmoniques. Ils peuvent donc être estimés par le procédé usuel de filtrage sélectif d'horizon T , quadrature, intégration temporelle de durée $(K-1)T$. Les termes hors-diagonaux donnent une estimation de la corrélation des harmoniques. Ils se mesurent par un procédé du même type [3]. Supposons que l'on veuille mesurer la corrélation entre les fréquences f et f' . Considérons deux filtres sélectifs d'horizon T , isolant ces deux fréquences, et centrés en f_1 et f'_1 . Supposons les sorties des deux filtres démodulées complexes par les deux fréquences centrales (= multipliées par $e^{-2i\pi f_1 t}$ et $e^{-2i\pi f'_1 t}$). En réponse au signal d'entrée

$$c e^{2i\pi f t} + c' e^{2i\pi f' t},$$

les sorties des deux filtres valent approximativement

$$y(t) \simeq c G(f) e^{2i\pi \Delta f t}, \quad \Delta f = f - f_1,$$

$$y'(t) \simeq c' G'(f) e^{2i\pi \Delta f' t}, \quad \Delta f' = f' - f'_1,$$

où $G(\nu)$ et $G'(\nu)$ désignent les gains complexes des deux filtres. Il s'agit de mesurer le nombre complexe

$$\rho = c G(f) [c' G'(f')]^*.$$

Formons le produit $z(t) = y(t)[y'(t)]^*$. Comme

$$z(t) \simeq \rho e^{2i\pi(\Delta f - \Delta f')t},$$

le signal $z(t)$ contient une composante sinusoïdale, de fréquence $\Delta f - \Delta f'$, liée au dépointage de f et f' par rapport aux fréquences centrales f_1 et f'_1 des filtres d'entrée. On a donc deux cas possibles :

- si $\Delta f - \Delta f'$ ne dépasse pas $1/(KT)$, il suffit d'intégrer $z(t)$ pendant le temps $(K-1)T$ pour estimer ρ ;

- si $\Delta f - \Delta f'$ dépasse $1/(KT)$, une simple intégration ne suffit pas : il faut prévoir un deuxième filtre sélectif, isolant la fréquence $\Delta f - \Delta f'$, et d'horizon $(K-1)T$, pour estimer ρ .

Pratiquement, le signal d'entrée est échantillonné, le paramètre T qui fixe la durée des traitements cohérents est un entier égal à une puissance de deux, l'entier K est également une puissance de deux, les filtres d'entrée sont réalisés par une TFD fenêtrée d'ordre T avec un empiètement de 75% ; la démodulation complexe équivaut alors à un produit par ± 1 ou $\pm i$, et le filtre de sortie est réalisé par une TFD d'ordre $4K$. La Fig. 1 donne le principe de la mesure de la corrélation entre les canaux k et k' des TFD d'entrée.

3. LE RECEPTEUR INCOHERENT

Il existe naturellement un procédé plus simple pour détecter un signal périodique présentant des fluctuations de phase. C'est celui qui effectue une sommation incohérente des fréquences harmoniques des différentes tranches de durée T . Ce récepteur peut être également obtenu par un calcul de maximum de vraisemblance, à condition d'étendre au préalable le modèle de signal pour se placer dans des conditions où les corrélations entre harmoniques ne peuvent pas exister.

Considérons à nouveau le modèle des sauts de phase du § 2.1, et supposons à présent que le facteur de phase et d'amplitude qui affecte les harmoniques du signal pendant le $k^{\text{ème}}$ bloc varie d'un harmonique à l'autre. Ce facteur peut alors être incorporé au coefficient de Fourier correspondant, et le modèle du signal prend la forme :

$$s(t) = \sum_{n=1}^N c_n(k) e^{2i\pi n f_o t}, \quad kT \leq t \leq (k+1)T, \quad 0 \leq k \leq K-1.$$

Il est paramétré par les K vecteurs complexes :

$$\underline{c}(k) = [c_1(k), \dots, c_N(k)]^T, \quad 0 \leq k \leq K-1.$$

Les vecteurs $\underline{x}(k)$ définis en (4) constituent comme précédemment un résumé exhaustif. La log-vraisemblance vaut maintenant :

$$\ell(\underline{x} | \{\underline{c}(k)\}) = \sum_{k=0}^{K-1} \left[\left\| \underline{x}(k) \right\|^2 - \left\| \underline{x}(k) - \sqrt{\frac{T}{\gamma_b}} \underline{c}(k) \right\|^2 \right],$$

et sa maximisation amène aussitôt le récepteur incohérent

$$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left\| \underline{x}(k) \right\|^2 = \text{tr}(\underline{S}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \text{seuil},$$

qui peut évidemment être utilisé, dans les mêmes conditions que le récepteur semi-cohérent, lorsque les sauts de phase deviennent des fluctuations.

4. EVALUATION DES DEUX RECEPTEURS

4.1 Facteurs de convergence (f_0 connu)

Dans le modèle des sauts de phase, la loi du récepteur incohérent est un χ^2 à $2KN$ degrés de liberté, centré sous H_0 , décentré sous H_1 , ce qui permet le calcul analytique du couple (probabilité de détection P_d , probabilité de fausse alarme P_{fa}). Un tel calcul ne semble pas possible pour le récepteur semi-cohérent. Par exemple, sous H_0 , la matrice S obéit à une loi de Wishart complexe construite avec l'identité, pour laquelle on dispose d'expressions exactes ou approchées donnant la loi conjointe des valeurs propres (voir par exemple [4, chapitre 9]), ce qui permet par intégration d'avoir la loi de la valeur propre la plus grande. Mais le résultat obtenu est trop compliqué pour être utilisable pratiquement.

C'est pourquoi nous préférons effectuer la comparaison des deux récepteurs par un calcul de facteur de convergence fondé sur une technique de grands écarts [5]. Commençons par enlever dans le modèle du signal (3) les sauts d'amplitude en y faisant $\mu_k = 1$. La puissance moyenne du signal devient alors

$$P_s = \sum_{n=1}^N |c_n|^2 .$$

Puis, fixons une probabilité de détection P_d dans l'intervalle ouvert $]0,1[$, et faisons tendre la durée KT de l'observation vers l'infini. La probabilité de fausse alarme P_{fa} décroît alors exponentiellement vers zéro. Le facteur qui intervient dans l'exponentielle

$$a = - \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{KT} \log P_{fa}$$

ne dépend pas de la valeur de P_d choisie. C'est par définition le facteur de convergence du récepteur considéré.

Dans le cas du récepteur incohérent, la statistique de décision est sous H_0 un χ^2 à $2KN$ degrés de liberté. Le facteur de convergence dépend du nombre N d'harmoniques traités, et vaut [6] :

$$a(N) = \frac{P_s}{\gamma_b} - \frac{N}{T} \log \left(1 + \frac{1}{N} \frac{P_s T}{\gamma_b} \right) . \quad (7)$$

Pour P_s et T fixés, $a(N)$ est une fonction décroissante de l'entier N .

Dans le cas du récepteur semi-cohérent, nous montrons en annexe que le facteur de convergence de la variable $\lambda_{\max}(S)$ est le même que celui des éléments diagonaux de la matrice S . Comme ces éléments obéissent à un χ^2 à $2K$ degrés de liberté, il s'obtient donc en faisant $N = 1$ dans la relation (7). Ainsi, le facteur de convergence du récepteur semi-cohérent est le même que celui du récepteur incohérent, quand dans ce dernier le signal périodique dégénère en une fréquence pure. Ce résultat permet également de prévoir théoriquement le gain apporté par le traitement semi-cohérent. Pour $N = 10$, le gain sur le rapport $P_s T / \gamma_b$ vaut approximativement 3dB.

4.2 Comparaison des courbes COR

La Fig. 2 donne un exemple de courbes (P_d, P_{fa}) pour les deux types de récepteurs précédents. L'essai a été réalisé dans les conditions suivantes : observation échantillonnée avec un pas unité ; taille des TFD d'entrée : $T = 128$; nombre de blocs adjacents traités : $K = 8$; niveau spectral du bruit : $\gamma_b = 1$; signal de la forme

$$s(t) = e^{i\varphi(t)} \sum_{n=1}^N c_n e^{2i\pi n f_0 t} ,$$

avec

$$\varphi(t) = 2 \sin \frac{2\pi t}{KT-1} , \quad N = 10 , \quad c_n = 0.1\sqrt{n}$$

(de sorte que le paramètre $P_s T / \gamma_b$ vaut ici 5.7 dB), $f_0 = 3.5/128$. Les TFD d'entrée sont calculées avec une fenêtre de Hamming et un empiètement de 75%, et les corrélations entre fréquences sont mesurées par le procédé décrit au § 2.2 (cf. la Fig. 1). Les courbes COR ont été tracées pour les mêmes données avec f_0 connu (courbes supérieures), ou inconnu, et recherché dans la bande de fréquences $[3/128, 5/128]$ (courbes inférieures). Le nombre de tirages effectués pour l'estimation des probabilités est de 50 000 pour P_{fa} , et de 10 000 pour P_d . A titre indicatif, on a tracé également la courbe COR du récepteur cohérent, dans lequel les TFD sont effectués avec une taille KT , nombre total de points traités.

L'examen des courbes COR suggère les commentaires suivants :

(i) comme on pouvait s'y attendre, le récepteur cohérent ne fonctionne plus dès que les fluctuations de la phase deviennent importantes, ce qui est le cas dans l'essai considéré ;

(ii) que f_0 soit connu ou non, le récepteur semi-cohérent est toujours supérieur au récepteur incohérent ;

(iii) si f_0 est inconnu, à P_{fa} donnée, la perte en probabilité de détection consécutive au balayage est plus grande avec le récepteur semi-cohérent qu'avec l'incohérent.

5. CONCLUSION

L'étude précédente a mis en évidence le bénéfice apporté par la mesure et l'exploitation des corrélations entre fréquences pour la détection d'un signal périodique affecté de fluctuations de phase. Le gain est net si le fondamental est connu. Si f_0 est inconnu, le bénéfice est moins évident, et la complexité du dispositif de mesure de la corrélation entre fréquences peut conduire à préférer pratiquement le récepteur incohérent. Enfin, l'étude précédente s'étend sans peine au cas d'un signal reçu par un réseau de capteurs, et aboutit aux mêmes conclusions.

ANNEXE. Grands écarts pour la plus grande valeur propre d'une matrice de Wishart construite avec l'identité.

Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite de vecteurs aléatoires complexes d'ordre N , indépendants, gaussiens, centrés, circulaires, de covariance identité

$$E x_k = 0 , \quad E x_k x_k^T = 0 , \quad E x_k x_k^* = I .$$

Formons la covariance empirique

$$\underline{S} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \underline{x}_k \underline{x}_k^* ,$$

et soit λ_{\max} la plus grande valeur propre de \underline{S} . Θ désignant la sphère unité de C^N , posons $z(\underline{\theta}) = \underline{\theta}^* \underline{S} \underline{\theta}$. Pour $\underline{\theta}$ fixé dans Θ , $z(\underline{\theta})$ obéit à une loi de type $(2K)^{-1} \chi_{2K}^2$. On a donc pour tout $\gamma > 1$ [6] :

$$- \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \log P[z(\underline{\theta}) > \gamma] = a(\gamma) = \gamma - \log \gamma - 1 . \quad (A1)$$

Il s'agit de montrer que la v.a. $\lambda_{\max} = \sup_{\underline{\theta} \in \Theta} z(\underline{\theta})$ possède la même propriété. Comme $z(\underline{\theta}) \leq \lambda_{\max}$, on a

$$P[z(\underline{\theta}) > \gamma] \leq P[\lambda_{\max} > \gamma] ,$$



et donc

$$-a(\gamma) \leq \liminf_K \frac{1}{K} \log P[\lambda_{\max} > \gamma] .$$

On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\limsup_K \frac{1}{K} \log P[\lambda_{\max} > \gamma] \leq -a(\gamma) + \varepsilon , \quad (A2)$$

ce qui établira l'assertion.

A-1. Majoration de λ_{\max} par un nombre fini de valeurs de $z(\underline{\theta})$.

Pour tout $\underline{\theta} \in \Theta$ et $\Delta \underline{\theta}$ dans C^N , on a :

$$\begin{aligned} z(\underline{\theta} + \Delta \underline{\theta}) &= z(\underline{\theta}) + 2\text{Re} \Delta \underline{\theta}^* \underline{S} \underline{\theta} + z(\Delta \underline{\theta}) \\ &\leq z(\underline{\theta}) + 2|\Delta \underline{\theta}^* \underline{S} \underline{\theta}| + z(\Delta \underline{\theta}) \\ &\leq z(\underline{\theta}) + 2[\Delta \underline{\theta}^* \underline{S} \Delta \underline{\theta} \underline{\theta}^* \underline{S} \underline{\theta}]^{1/2} \\ &\quad + z(\Delta \underline{\theta}) \\ &\leq z(\underline{\theta}) + 2\lambda_{\max} \|\Delta \underline{\theta}\| + \lambda_{\max} \|\Delta \underline{\theta}\|^2 . \end{aligned}$$

Donc si $\{B_m = B(\underline{\theta}_m, r), 1 \leq m \leq M\}$ désigne un recouvrement fini de Θ par les boules B_m centrées en $\underline{\theta}_m$ et de rayon r :

$$\sup_{\underline{\theta} \in B_m} z(\underline{\theta}) \leq z(\underline{\theta}_m) + \lambda_{\max} r(r+2) ,$$

$$\lambda_{\max} = \sup_m \sup_{\underline{\theta} \in B_m} z(\underline{\theta}) \leq \sup_m z(\underline{\theta}_m) + \lambda_{\max} r(r+2) ,$$

ce qui donne la majoration de λ_{\max} :

$$\lambda_{\max} \leq \frac{1}{1-2r-r^2} \sup_m z(\underline{\theta}_m) . \quad (A3)$$

A-2. Preuve de la relation (A2).

Soit $\gamma > 1$ fixé. Soit $0 < \varepsilon < a(\gamma)$ fixé. Choisissons $r > 0$ tel que

$$(1-2r-r^2)\gamma > 1 ,$$

$$a[(1-2r-r^2)\gamma] \geq a(\gamma) - \varepsilon ,$$

ce qui est toujours possible. Formons le recouvrement fini $\{B_m\}$ par les sphères de rayon r . La majoration (A3) entraîne que l'évènement $A = \{\lambda_{\max} > \gamma\}$ est inclus dans l'évènement

$$B = \left\{ \sup_m z(\underline{\theta}_m) > (1-2r-r^2)\gamma \right\} .$$

Donc $P(A) \leq P(B)$. Appliquons ensuite la borne par réunion à $P(B)$. On obtient

$$\begin{aligned} P(A) &\leq \sum_{m=1}^M P\{z(\underline{\theta}_m) > (1-2r-r^2)\gamma\} \\ &= M P\{z(\underline{\theta}) > (1-2r-r^2)\gamma\} . \end{aligned}$$

Il reste à prendre le logarithme des deux membres, à diviser par K , et à prendre la lim sup en K pour obtenir :

$$\begin{aligned} \limsup P\{\lambda_{\max} > \gamma\} \\ \leq -a[(1-2r-r^2)\gamma] \leq -a(\gamma) + \varepsilon , \end{aligned}$$

ce qui est la relation cherchée.

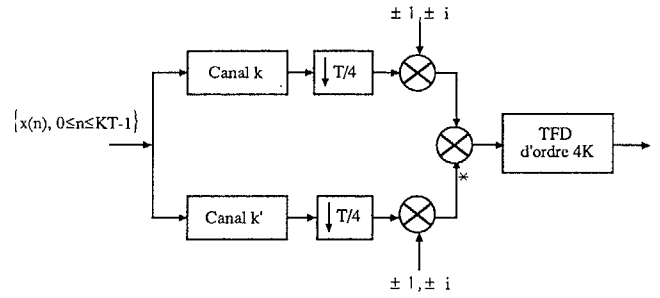


Fig. 1 : Principe de la mesure des corrélations entre les canaux k et k' des TFD d'entrée. Les TFD d'entrée sont d'ordre T , fenêtrées, et calculées avec 75% de recouvrement, ce qui est symbolisé par l'opérateur de décimation par $T/4$. La démodulation complexe se réduit alors à un produit par $(\pm 1, \pm i)$. Les corrélations cherchées se lisent sur les bins $(0, 1, \dots, K-1)$ et $(3K+1, \dots, 4K-1)$ de la TFD de sortie.

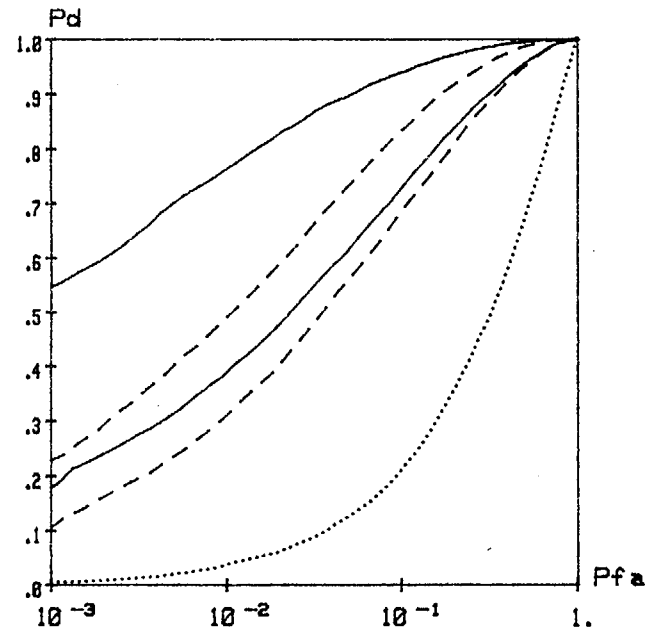


Fig. 2 : Comparaison des courbes COR en présence de fluctuations de phase. Pointillés : récepteur cohérent (f_0 connu), effectuant des TFD de taille KT égale à la totalité de l'observation disponible. Traits pleins : récepteur semi-cohérent. Tirets : récepteur incohérent. Pour ces deux derniers récepteurs, les courbes supérieures sont celles où le fondamental f_0 est connu, les courbes inférieures celles où f_0 est inconnu.

Références

- [1] E.L. Lehmann, "Testing statistical hypotheses", Wiley (1959).
- [2] M.J. Hinich, "Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown", IEEE Trans. on ASSP, vol. ASSP-30, n° 5, October 1982, pp. 747-750.
- [3] W.A. Gardner, "Statistical spectral analysis, a non probabilistic theory", Prentice Hall (1988).
- [4] R.J. Muirhead, "Aspects of multivariate statistical theory", Wiley (1982).
- [5] W.G. Cochran, "The χ^2 goodness of fit test", Ann. Math. Statist., vol. 23, pp. 315-345, (1952).
- [6] G.R. Benitz, J.A. Bucklew, "Large deviation rate calculations for non linear detectors in gaussian noise", IEEE Trans. on IT, vol. IT-36, n° 2, March 1990, pp. 358-371.