

**LOCALISATION DE SOURCES LARGE BANDE
PAR DES METHODES DE REGULARISATION**

B.SENADJI

Y.GRENIER

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications,
Dept Signal, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13.

RÉSUMÉ

Cet article présente deux nouvelles méthodes de localisation de sources large bande, basées sur un même principe: la régularisation. L'estimation de paramètres à partir de données de durée assez courte peut être améliorée par les techniques de régularisation qui apportent une information a priori sur ces paramètres. Nous appliquons de deux manières différentes, quoique liées, ces techniques pour l'estimation des angles d'incidence de sources arrivant sur un réseau linéaire de capteurs équidistants. La première solution utilise un filtrage de Kalman dans un espace d'état indexé par la fréquence, tandis que la seconde repose sur l'emploi de paramètres de régularisation ou hyperparamètres pour connecter entre eux deux critères quadratiques à minimiser.

ABSTRACT

Two new methods, both based on regularization technics, are used to estimate directions of arrival of broad-band signals on a linear array of equispaced sensors. Regularization methods provide an a priori information on parameters to be estimated, in order to improve this estimation when the data duration is rather short. Two different but close ways of applying these technics are introduced. The first one uses a Kalman filtering in a state space indexed by frequency, while the other is based on the use of regularization parameter, also called hyperparameter, to connect two quadratic criterias to be minimized.

1-INTRODUCTION

Nous considérons une antenne linéaire formée de $N+1$ capteurs équidistants, recevant des signaux large bande émis par P sources ponctuelles en présence de bruit. A un instant t donné, le signal reçu sur le i ème capteur, $0 \leq i \leq N$, s'écrit:

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^P s_k(t - i\tau_k) + b_i(t) \quad (1-a)$$

où $b_i(t)$ est un bruit blanc, de moyenne nulle, de variance σ^2 , décorrélé des sources, non corrélé avec $b_j(t)$ pour $i \neq j$, et où τ_k désigne le retard de la source k entre deux capteurs voisins:

$$\tau_k = \frac{d \sin \theta_k}{c} \quad (1-b)$$

d désigne la distance inter-capteurs, θ_k l'angle d'incidence de la source k , et c la célérité de l'onde dans le milieu.

Si $Y_i(f)$, $S_k(f)$ et $B_i(f)$ désignent, respectivement les transformées de Fourier de $y_i(t)$, $s_k(t)$ et $b_i(t)$, l'équation (1-a) s'écrit, dans le domaine fréquentiel sous la forme:

$$Y_i(f) = \sum_{k=1}^P S_k(f) \exp(-j2\pi f i \tau_k) + B_i(f) \quad (2)$$

Nous adaptons au cas large bande l'approche utilisée dans la méthode du maximum d'entropie. Dans la MEM bande étroite, le signal reçu sur le capteur 0 est prédit à partir des signaux reçus sur les N autres capteurs. Dans le cas large bande, le spectre spatial autorégressif $(a_1(f)..a_N(f))$ dépend de la fréquence [1], et le modèle s'écrit:

$$Y_o(f) + \sum_{k=1}^N a_k(f) Y_k(f) = \varepsilon(f) \quad (3)$$

où $\varepsilon(f)$ représente l'erreur de prédiction à la fréquence f .

L'estimation des modèles autorégressifs permet alors de tracer une fonction de localisation à chaque fréquence, définie par:

$$L(f, \theta) = \left| 1 + \sum_{i=1}^N a_i(f) \exp\left(\frac{-j2\pi f i d \sin \theta}{c}\right) \right|^{-2} \quad (4)$$

Si, à une fréquence f de la bande, $A(f) = [a_1(f)..a_N(f)]^T$ représente le vecteur des coefficients autorégressifs et $Y_{1:N}(f) = [Y_1(f)..Y_N(f)]^T$ le vecteur des signaux reçus sur les capteurs 1 à N , l'équation (3-a) s'écrit, sous forme vectorielle:

$$Y_o(f) + Y_{1:N}^T(f) A(f) = \varepsilon(f) \quad (5)$$

L'estimation "classique" des spectres autorégressifs repose sur la minimisation, sur toute la bande de fréquence, de la variance de l'erreur de prédiction. Cependant, afin de ne pas traiter ces spectres de manière incohérente et afin d'améliorer leur estimation, nous nous inspirons des techniques de régularisation, [2,3]. Ces méthodes utilisent une information a priori sur les paramètres à estimer. Cette information permet d'imposer une contrainte de douceur sur la solution et, ainsi, de réduire la distorsion introduite par le bruit sur les données. Dans notre cas, les modèles autorégressifs seront estimés en minimisant, outre un critère classique d'erreur quadratique contenant l'information sur les signaux reçus, un second critère portant sur la variation des spectres aux fréquences successives. Cette variation sera représentée par une matrice, dite de transition, qui modélisera l'évolution des spectres d'une fréquence à l'autre.

Dans le paragraphe 2, nous décrivons deux solutions



permettant de résoudre le problème de la régularisation: une solution dite "dynamique", reposant sur un filtrage de Kalman et où la régularisation apparaît de manière implicite, puis une solution s'inspirant plus explicitement des techniques de régularisation par l'emploi de coefficients de régularisation ou hyperparamètres. Nous présenterons des résultats de simulations de ces méthodes au paragraphe 3.

2-REGULARISATION

2-1 Choix de la matrice de transition

Il existe différentes manières de traduire, sous forme algébrique, la variation des modèles autorégressifs aux diverses fréquences. Les opérateurs différentiels permettent, en général, de "mesurer" les variations d'une fonction. Ainsi, si ∇^k désigne l'opérateur différentiel d'ordre k , minimiser la variation, aux fréquences successives des spectres autorégressifs revient à minimiser le critère: $\sum_f (\nabla^k A(f))^2$, sur

toute la bande de fréquence, [3]. L'ordre de différentiation est pris, en général, égal à 1 ou 2. Ainsi, lorsque $k=1$, $\nabla A(f) = A(f) - A(f-1)$, et, lorsque $k=2$, $\nabla^2 A(f) = A(f) - 2A(f-1) - A(f-2)$. Nous ne considérerons, dans cet article que le cas d'ordre 2. Les variations des modèles aux fréquences successives s'écrivent donc sous forme matricielle de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} A(f+1) \\ A(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_N & -I_N \\ I_N & 0_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(f) \\ A(f-1) \end{bmatrix}$$

où I_N désigne la matrice identité d'ordre N et 0_N la matrice nulle d'ordre N .

Une autre manière de procéder consiste à calculer cette matrice de transition $T(f+1, f)$ à une fréquence f , en lui donnant une valeur moyenne sur un ensemble de source ayant, par exemple, une densité de probabilité dP . Si le réseau des $N+1$ capteurs reçoit les signaux émis par le maximum de sources qu'il est possible de localiser, soit N , si $\theta_1 \dots \theta_N$ désignent les angles d'arrivées de ces sources et si $A_{\theta_1 \dots \theta_N}(f)$ représente le vecteur autorégressif associé à ces angles à la fréquence f , le critère à minimiser s'écrit alors:

$$\int \|A_{\theta_1 \dots \theta_N}(f+1) - T(f+1, f)A_{\theta_1 \dots \theta_N}(f)\|^2 dP(\theta_1 \dots \theta_N)$$

Les vecteurs $A_{\theta_1 \dots \theta_N}(f)$ peuvent être aisément déterminés puisque les coefficients autorégressifs $a_1(f) \dots a_N(f)$ à une fréquence f sont aussi les coefficients du polynôme $(1 + \sum_{i=1}^N a_i(f) z^i)$ dont les zéros sont les $(z_k)_{k=1 \dots N}$ où $z_k = \exp(-\frac{j2\pi f d \sin \theta_k}{c})$.

Malheureusement, même en se donnant une densité dP simple, le calcul de ces intégrales ne peut se réaliser de manière simple. Aussi avons nous choisi d'estimer ces matrices $T(f+1, f)$ aux diverses fréquences par Monte-Carlo. Nous imposons, tout d'abord, une variation des spectres de la forme:

$$A(f+1) = T(f+1, f) A(f)$$

Il s'agit ensuite de "tirer", de manière aléatoire, \mathcal{K} N -uplets $(\theta_1 \dots \theta_N)$ d'angles d'arrivées de sources, de calculer les \mathcal{K} vecteurs autorégressifs correspondants, aux diverses fréquences

de la bande, et d'estimer les matrices $T(f+1, f)$ de manière à minimiser le critère:

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \|A_{\theta_1 \dots \theta_N}^{(k)}(f+1) - T(f+1, f)A_{\theta_1 \dots \theta_N}^{(k)}(f)\|^2$$

où $A_{\theta_1 \dots \theta_N}^{(k)}(f)$ désigne le vecteur autorégressif à la fréquence f lors du k -ième tirage.

Les matrices $T(f+1, f)$ sont alors de la forme:

$$T(f+1, f) = [A(f)A^H(f+1)] [A(f+1)A^H(f+1)]^{-1}$$

où $A(f) = [A_{\theta_1 \dots \theta_N}^{(1)}(f+1) \dots A_{\theta_1 \dots \theta_N}^{(\mathcal{K})}(f+1)]$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs autorégressifs aux \mathcal{K} tirages, et où H désigne le transposé conjugué.

La variation des spectres autorégressifs aux fréquences successives se traduit donc, dans les deux cas, sous forme matricielle de la manière:

$$X(f+1) = T(f+1, f)X(f) \quad (6)$$

où $X(f) = A(f)$ lorsque la matrice est estimée par Monte-Carlo ou, dans le cas d'un opérateur différentiel d'ordre 2, $X(f) =$

$$\begin{bmatrix} A(f) \\ A(f-1) \end{bmatrix}.$$

Nous abordons, à présent, les méthodes de résolution de ce problème de régularisation.

2-2 Filtrage de Kalman

Nous supposons avoir reçu K séquences de signaux et notons, pour une fréquence f de la bande, $Y_{ik}(f)$ le signal reçu sur le i ème capteur lors de la k ème épreuve. Les équations (5) écrites pour chaque épreuve peuvent se regrouper sous forme matricielle en écrivant:

$$Y_o(f) + Y_{1:N}(f) A(f) = w(f) \quad (7-a)$$

$$\text{où } Y_o(f) = [Y_{o1}(f) \dots Y_{oK}(f)]^T \quad (7-b)$$

$$Y_{1:N}(f) = [Y_{1:N,1}(f) \dots Y_{1:N,K}(f)] \quad (7-c)$$

$$\text{et } w(f) = [\varepsilon_1(f) \dots \varepsilon_K(f)]^T \quad (7-d)$$

Estimer les modèles autorégressifs aux diverses fréquences revient donc à minimiser la variance de l'erreur de prédiction $w(f)$ de l'équation (7) sur toute la bande de fréquence ainsi que la variance de l'erreur $v(f)$ dans l'équation:

$$X(f+1) = T(f+1, f)X(f) + v(f)$$

Nous pouvons alors définir un modèle d'état indexé par la fréquence, décrit par les équations d'état et d'observation suivantes:

$$\begin{cases} X(f+1) = T(f+1, f)X(f) + v(f) & (8-a) \\ Y_o(f) = H(f)X(f) + w(f) & (8-b) \end{cases}$$

où $X(f)$ et $T(f+1, f)$ désignent respectivement la variable d'état et la matrice de transition décrites dans l'équation (6) et $H(f)$ la matrice des observations avec $H(f) = [-Y_{1:N}(f)]$, ou, dans le cas d'un opérateur différentiel d'ordre 2, $H(f) = [-Y_{1:N}(f) \mid 0_N]$.

Nous connaissons les propriétés du bruit d'observation $w(f)$ et nous supposons le bruit d'état $v(f)$ blanc, de moyenne nulle, et indépendant de $w(f)$.

Le vecteur d'état $X(f)$ aux diverses fréquences de la bande est alors estimé à l'aide d'un filtrage de Kalman.[4]. La variance de l'erreur $v(f)$ est estimée par Monte-Carlo, tandis que la variance de $w(f)$ est supposée égale, à la première

itération, à la variance de l'erreur de prédiction à l'ordre 1, puis est réestimée à chaque itération. Le vecteur d'état à la fréquence initiale est égal à zéro et la variance de l'erreur d'estimation qui en résulte sera considérée comme infinie.

A partir d'une fréquence f_c , le filtre de Kalman converge et une estimation des spectres autorégressifs sur la bande $[f_c, f_{max}]$ est alors disponible. Cependant, afin d'obtenir une estimation de ces modèles sur toute la bande de fréquence, et, en même temps d'améliorer l'estimation des spectres déjà obtenus, un lissage est nécessaire. Nous avons décidé d'utiliser un lisseur de Raugh [5]. Les spectres autorégressifs sont alors disponibles sur toute la bande de fréquence.

2-3- Régularisation par un hyperparamètre.

Nous étudions à présent une deuxième solution où la régularisation se traduit, plus directement, par l'utilisation d'un coefficient de régularisation ou hyperparamètre, α . Cet hyperparamètre intervient pour connecter entre eux deux critères quadratiques C_1 et C_2 . C_1 contient l'information sur les données et représente la variance de l'erreur de prédiction des modèles autorégressifs aux diverses fréquences, tandis que C_2 reflète la variation aux fréquences successives de ces mêmes modèles et assure une douceur de la solution. La valeur du coefficient de régularisation permet de quantifier l'importance accordée au second critère par rapport au premier. Il s'agit alors d'estimer les modèles autorégressifs $A(f)$ qui minimisent le critère C :

$$C = C_1 + \alpha C_2$$

où
$$C_1 = \sum_{f=0}^{f_{max}} \|Y_0(f) + U_{1:N}(f)A(f)\|^2 \quad (10)$$

Le critère de douceur de la solution C_2 s'écrit, dans le cas d'un opérateur différentiel d'ordre 2:

$$C_2 = \sum_{f=2}^{f_{max}} \|A(f) - 2A(f-1) + A(f-2)\|^2 \quad (11-a)$$

ou encore, lorsque la matrice $T(f, f-1)$ est estimée par Monte-Carlo:

$$C_2 = \sum_{f=1}^{f_{max}} \|A(f) - T(f, f-1)A(f-1)\|^2 \quad (11-b)$$

Afin de résoudre ce problème de minimisation, nous considérons le vecteur \mathcal{AR} , qui est la concaténation des spectres $AR(f)$ aux fréquences de la bande et qui s'écrit:

$$\mathcal{AR} = [A(0), A(1), \dots, A(f_{max})]^T$$

Le critère C_1 s'écrit alors, en fonction du vecteur \mathcal{AR} , sous la forme:

$$C_1 = \mathcal{A}^H \mathcal{R}_{1:N} \mathcal{A} + \mathcal{R}_{01}^H \mathcal{A} + \mathcal{A}^H \mathcal{R}_{01} + Cte$$

où

$$\mathcal{R}_{01} = [R_0(0), R_0(1), \dots, R_0(f_{max})]^T$$

lorsque $R_0(f)$ désigne la première colonne, sans la première composante, de la matrice de covariance des signaux reçus, Cte est une constante dépendant de $Y_0(f)$ mais qui n'apparaît plus lors de la minimisation du critère par rapport aux modèles autorégressifs, et

$$\mathcal{R}_{1:N} = \text{bloc-diag}[R_{1:N}(0), R_{1:N}(1), \dots, R_{1:N}(f_{max})]$$

où bloc-diag désigne une matrice bloc diagonale, comportant, sur sa diagonale, les matrices $R_{1:N}(f)$ aux diverses fréquences et où $R_{1:N}(f)$ représente la matrice de covariance des signaux reçus privée de sa première ligne et de sa première colonne.

C_2 s'écrit en fonction de \mathcal{A} comme suit:

$$C_2 = \mathcal{A}^H \mathcal{T} \mathcal{A}$$

où \mathcal{T} varie selon le critère de douceur choisi. Ainsi, lorsque la matrice $T(f, f-1)$, notée T_f , est estimée par Monte-Carlo, (11-b), la matrice \mathcal{T} est bloc tridiagonale, hermitienne, de la forme:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} T_1 T_1^H & -T_1^H & & & & & 0_N \\ & -T_1 & (I_N + T_2 T_2^H) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & (I_N + T_{f_{max}} T_{f_{max}}^H) & -T_{f_{max}}^H & \\ & & & & -T_{f_{max}}^H & I_N & \\ 0_N & & & & & & \end{bmatrix}$$

Lorsque l'opérateur est d'ordre 2, en développant l'équation (11-a), la matrice \mathcal{T} s'écrit:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} I_N & 2I_N & -I_N & & & & 0_N \\ 2I_N & 5I_N & 0_N & & & & \\ -I_N & 0_N & 6I_N & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 6I_N & 0I_N & -I_N \\ & & & & 0I_N & 5I_N & -2I_N \\ 0_N & & & & -I_N & -2I_N & -I_N \end{bmatrix}$$

Le critère C est donc minimisé pour le vecteur \mathcal{A}_{opt} vérifiant le système:

$$(\mathcal{R}_{1:N} + \alpha \mathcal{T}) \mathcal{A}_{opt} = -\mathcal{R}_0 \quad (12)$$

Lorsque la matrice $T(f, f-1)$ est estimée par Monte-Carlo, la matrice $(\mathcal{R}_{1:N} + \alpha \mathcal{T})$ est bloc tridiagonale et peut se décomposer sous forme bloc LU. Le système (12) peut alors se résoudre en deux temps en considérant, en premier lieu le système d'équations en Z , $LZ = -\mathcal{R}_0$ puis en résolvant le système $U \mathcal{A}_{opt} = Z$. Dans le cas d'un opérateur différentiel d'ordre 2, la matrice peut encore se décomposer sous forme de deux matrices bloc triangulaires et le système se résout de la même manière que précédemment [6].

Choix de l'hyperparamètre

L'estimation de l'hyperparamètre α se fait par la méthode dite de Cross-Validation (CV), [7]. Il s'agit, en premier lieu, d'estimer les $A^{(k)}(f)$, $1 \leq k \leq K$, sur toute la bande de fréquence, lorsque $A^{(k)}(f)$ désigne l'estimation du vecteur $A(f)$ lorsque les k -ième observations $(Y_{0k}(f) \dots Y_{Nk}(f))$ sont omises. Le meilleur hyperparamètre est alors celui qui permet la meilleure prédiction des $(Y_{0k}(f) \dots Y_{Nk}(f))$ à partir de l'estimation de $A^{(k)}(f)$. C'est donc celui qui minimise l'erreur de prédiction:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{f=0}^{f_{max}} \|Y_{\alpha k}(f) + (U_{1:N})_{(k)}(f)A(f)\|^2$$

où $(U_{1:N})_{(k)}$ désigne la k -ième ligne de la matrice $U_{1:N}$.

3-SIMULATIONS

Les deux solutions proposées ont été testées sur des signaux simulés. L'antenne est composée de 16 capteurs et reçoit, dans la bande de fréquence [80Hz, 120Hz], des sources d'incidence 9° et 12° , noyées dans du bruit blanc gaussien. Le rapport signal à bruit est de 0 dB et la fréquence d'échantillonnage est 80Hz. Les signaux, de durée assez courte, sont divisés en 16 segments de 64 échantillons. Sur chaque segment, une FFT est effectuée, et les signaux reçus sont décomposés en 33 bandes de fréquence. La localisation se



fait en sommant, sur toute la bande de fréquence, les fonctions obtenues à chaque fréquence par la relation (4).

Les figures (1-a) et (1-b) représentent les résultats obtenus après le filtrage de Kalman et le lissage de Raugh lorsque les matrices de transition utilisées sont, respectivement, celle estimée par Monte-Carlo et celle déduite de l'opérateur différentiel d'ordre 2. Les sources sont, dans les deux cas, bien résolues. La charge de calcul induite par la matrice estimée par Monte-Carlo est néanmoins plus faible et le filtrage plus rapide.

La figure (2) représente les courbes obtenues en utilisant la méthode de régularisation par un hyperparamètre. Seule la matrice de transition estimée par Monte-Carlo a été utilisée puisque l'expérience du filtrage de Kalman a prouvé des résultats similaires et une charge de calcul supérieure dans le cas de la matrice dérivée d'un opérateur différentiel d'ordre 2. La figure prouve une nette amélioration après la régularisation.

4- CONCLUSION

Les méthodes que nous avons présentées permettent d'estimer les angles d'arrivée de sources large bande lorsque la durée d'observation est assez courte. Elles utilisent les principes inhérents aux méthodes de régularisation. Les signaux reçus sur les différents capteurs sont modélisés par des spectres autorégressifs dépendant de la fréquence. Ces spectres sont estimés en minimisant, outre un critère d'erreur sur la prédiction, un second critère relatif à l'évolution de ces spectres sur la bande de fréquence. La localisation se fait en minimisant le produit scalaire des spectres autorégressifs aux diverses fréquences et du vecteur direction de la source d'incidence θ .

REFERENCES

- 1] Y. GRENIER - "Broad band source location using frequency-dependant models", 4th ASSP Workshop on Spectral Estimation and Modeling, Mineapolis, pp 13-16, 1988.
- [2] Z. NASHED - "Generalized Inverses and Applications", pp 193-244, Academic Press, 1976.
- [3] G. DEMOMENT - "Image Reconstruction and Restruction: Overview of Common Estimation Structures and Problems", IEEE Trans. on ASSP, Vol 37, N° 12, pp 2024-2036, Dec 89.
- [4] C.T. LEONDES - "Theory and Applications of Kalman Filtering", NATO(OTAN), FRA, date inconnue.
- [5] J-R. RADIX - "Filtrage et Lissage Statistique Optimaux Linéaires", Cepadues, 1984.
- [6] G.H. GOLUB- C.F. VAN LOAN - "Matrix Computation", Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1989.
- [7] G.H. GOLUB- M. HEATH- G. WAHBA - "Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing Ridge Parameter", Technometrics, Vol 21, N°2, pp 215-223, Mai 79.

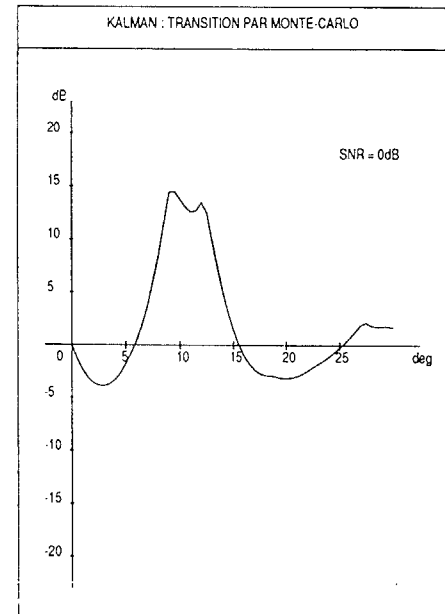


Figure 1-a

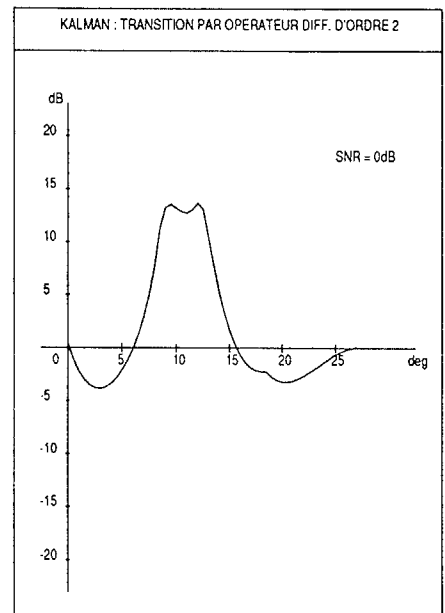


Figure 1-b

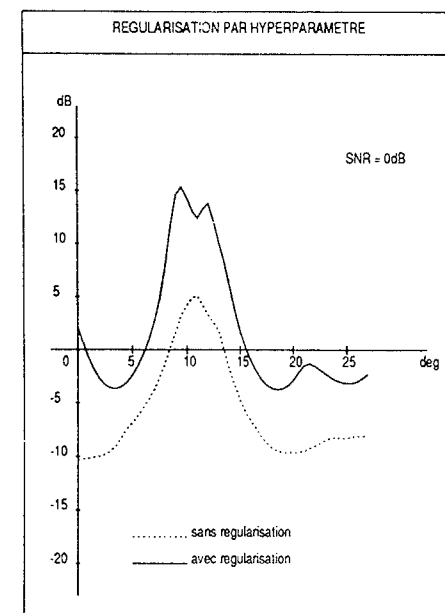


Figure 2