



## NOUVEAUX RESULTATS CONCERNANT L'OBSERVABILITE EN TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURE D'ANGLE

D. PILLON

C. JAUFFRET

THOMSON SINTRA 06561 Valbonne

GERDSM - 83140 Six-Fours

## RÉSUMÉ

En trajectographie passive par mesure d'angle seul, il est nécessaire de manoeuvrer pour obtenir une solution unique. Mais ceci n'est pas suffisant et on sait qu'il existe des manoeuvres de l'observateur laissant le système inobservable. On propose ici une détermination complète de l'ensemble de ces manoeuvres ambiguës.

## ABSTRACT

In a Target Motion Analysis context, it is necessary to maneuver in order to obtain a unique solution in a Bearing-Only-Tracking. However, maneuvering is not always a sufficient condition, since there exist specific maneuvers that keep the system unobservable. Here, we propose a complete determination of such ambiguous maneuvers.

## 1 - INTRODUCTION

La plupart du temps, la principale - et parfois unique - grandeur fournie par un senseur passif est la variable angulaire (l'azimut et le site de la ligne de visée).

Que ce soit en optique (auto-directeur infrarouge par exemple), en acoustique (sonar bande large) ou en électromagnétique (guerre électronique), ces senseurs, qui ne délivrent pas de mesures primaires de la distance posent des problèmes d'emploi opérationnel. En effet, l'utilisateur d'un tel senseur discret n'a pas directement une perception 3D de son environnement, notion pourtant d'une importance vitale puisqu'elle permet l'élaboration des déplacements futurs.

C'est pour répondre à ces besoins qu'ont été développées des méthodes de Trajectographie Passive par mesure d'Angles (TPA) où l'on cherche à estimer la cinématique d'une source à partir d'une suite de mesures angulaires effectuées par un senseur unique et mobile (Fig. 1).

Ce qui rend difficile ce problème d'estimation, c'est l'observabilité variable du système en fonction des cinématiques conjointes du senseur et de la source. Ceci est une particularité de la TPA puisque lorsque qu'on mesure simultanément deux angles avec parallaxe (cas multi-plateformes) ou un angle et une fréquence (sonar bande étroite), les problèmes d'inobservabilité sont très réduits [3]. Là, en TP angle seul non seulement il faut que l'observateur manoeuvre, mais cela ne suffit pas : il existe des manoeuvres dites ambiguës laissant le système inobservable. L'objet de cet article est de déterminer l'ensemble complet de toutes ces manoeuvres ambiguës, généralisant ainsi les résultats obtenus dans les travaux antécédents [1], [2], [4].

Ceux-ci avaient démontré que les seules manoeuvres ambiguës étaient telles que l'observateur verrait la cible sous les mêmes lignes de visées que celles qu'il aurait eu en ne manoeuvrant pas (c'est à dire en gardant sa vitesse et son cap initial, voir Fig.2). Cette conclusion, remplie de bon sens, n'est pourtant pas générale car elle ne s'applique pas au cas où le porteur est en train de manoeuvrer à l'instant initial. Dans ce cas, et c'est ce que nous démontrons ici, il existe encore des

manoeuvres ambiguës dont la détermination est plus compliquée que celle du type de la Fig.2 .

## 2 - NOTATION

Sans nuire à la généralité, nous allons considérer un problème plan dans un repère orthonormé  $xOy$ . Rappelons que l'observabilité ne dépend pas du choix du système de coordonnées (cartésien, polaire,...) s'il y a bijection entre ces divers types de coordonnées.

Dans ce repère, définissons le mouvement de la source par un modèle polynomial d'ordre  $d$  connu :  $d = 1$  correspond à l'habituel Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU),  $d = 2$  correspond à une source en accélération constante...

Si  $\underline{X}_s(t) = [x_s(t), y_s(t)]$  désigne la position de la source, alors par définition :

$$\underline{X}_s(t) = \sum_{i=0}^d \frac{(t-t_0)^i}{i!} \underline{X}_s^{(i)}(t_0) \quad (2.1)$$

où  $t_0$  est l'instant initial et  $\underline{X}^{(i)}$  désigne la dérivée  $i^{\text{ème}}$ .

Soit  $\underline{X}_L(t) = [x_L(t), y_L(t)]$  la position (connue) de l'observateur. Nous allons travailler en coordonnée relative à l'aide du vecteur d'état :

$$\underline{X}(t) = [\underline{X}_s(t) - \underline{X}_L(t), \underline{X}_s^{(1)}(t) - \underline{X}_L^{(1)}(t), \dots, \underline{X}_s^{(d)}(t) - \underline{X}_L^{(d)}(t)]' \quad (2.2)$$

où ' désigne la transposition.

Si l'on fait apparaître la commande  $\underline{U}(t) = [u_x(t), u_y(t)]'$  agissant sur composante d'ordre le plus élevé de  $\underline{X}(t)$ , on écrit alors sous forme classique l'équation de dynamique d'un système non-stationnaire :

$$\dot{\underline{X}}(t) = A(t) \underline{X}(t) + B(t) \underline{U}(t) \quad \text{pour } t \in [t_0, t_1] \quad (2.3)$$



$$A(t) = \begin{bmatrix} O_2 & I_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \vdots & \vdots & \vdots & O_2 \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} O_2 \\ \vdots \\ O_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$O_2$  et  $I_2$  étant respectivement la matrice nulle et identité de dimension 2.

Notons  $\beta(t)$  l'angle entre la ligne de visée porteur-source et l'axe  $Oy$ . Cet angle pris dans le sens des aiguilles d'une montre est donné par (Fig. 1) :

$$\beta(t) = \text{Arctg} \left[ \frac{x_s(t) - x_L(t)}{y_s(t) - y_L(t)} \right] \quad (2.4)$$

équation de mesure non linéaire que l'on peut transformer en :

$$\cos\beta(t) [x_s(t) - x_L(t)] - \sin\beta(t) [y_s(t) - y_L(t)] = 0 \quad (2.5)$$

Ceci s'écrit aussi matriciellement en fonction du vecteur d'état  $\underline{X}(t)$  :

$$[\cos\beta(t), -\sin\beta(t), 0, \dots, 0] \underline{X}(t) = 0 \quad (2.6)$$

ou, en notant  $C(t)$  la matrice de mesure :

$$C(t) \cdot \underline{X}(t) = 0 \quad (2.7)$$

De façon habituelle la solution de l'équation (2.3) :

$$\underline{X}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{X}(t_0) + \underline{R}(t) \quad (2.8)$$

avec  $\Phi(t, t_0)$ , la matrice de transition associée à  $A(t)$  et :

$$\underline{R}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \underline{U}(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

Ce terme  $\underline{R}(t)$ , appelé commande intégrée s'écrit :

$$\underline{R}(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^d}{d!} U(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t U(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Remarquons que  $\underline{R}(t)$  est parfaitement défini par la connaissance de ces deux premières composantes notées  $\underline{r}(t)$  :

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^d}{d!} u_x(\tau) d\tau \\ \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^d}{d!} u_y(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

### 3 - CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE D'OBSERVABILITE

Rappelons qu'un système est dit observable quand on peut déterminer complètement le vecteur d'état initial  $\underline{X}(t_0)$  à partir de l'ensemble des mesures non bruitées sur  $[t_0, t_1]$ .

Remarquons que la seule réponse à cette question est oui ou non : il n'y a pas de système "plus ou moins" observable ou de "meilleure" observabilité. En fait, cette terminologie est plutôt relative des notions liées à la grandeur de la borne de Cramer-Rao, utilisée pour évaluer les performances limite des estimateurs. Signalons qu'en TPA, l'étude de la singularité de la matrice de Fisher ne permet pas la détermination des manoeuvres ambiguës car son expression analytique est trop complexe. Pour palier cela, toute tentative numérique est impossible à cause du conditionnement de la matrice de Fisher qui est très mauvais. Enfin, pour ce problème non-linéaire, la matrice de Fisher (ou le Grammien) ne donne que des conditions locales d'observabilité.

Pourtant, il est nécessaire d'avoir une réponse rigoureuse à ce problème d'observabilité notamment pour déterminer la dimension du vecteur d'état à estimer (TP complète ou partielle). Cette notion d'observabilité intervient aussi dans les tests d'associations de pistes angulaires multi-plateformes (i.e. avec parallaxe [5]) ou d'élaboration de la commande de missile.

C'est pour toutes ces raisons que l'on a cherché à exploiter au mieux la mise sous forme linéaire (2.3, 2.7) du problème non linéaire originel de TPA. Sous cette forme linéaire continue non-stationnaire, on peut alors utiliser une CNS observabilité qui permettra de connaître tout les  $\underline{U}(t)$  assurant l'observabilité. Ici, nous utilisons une CNS générale d'observabilité dérivé de l'algèbre linéaire la plus élémentaire.

Le système (2.3, 2.7) est observable sur  $[t_0, t_1]$  si et seulement si, pour tout vecteur  $\underline{Y}$  non nul, il existe  $t \in [t_0, t_1]$  tel que :

$$C(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \underline{Y} \neq 0 \quad (3.1)$$

En appliquant cette condition au cas de la TPA, on montre (voir annexe) que les commandes laissant le système inobservable (i.e. ambiguës) sont données par :

$$\underline{r}(t) = (\Delta(t)-1) \sum_{i=0}^d \frac{(t-t_0)^i}{i!} \underline{x}_{LS}^{(i)}(t_0) + \Delta(t) \sum_{i=1}^d \frac{(t-t_0)^i}{i!} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{i-j} \left( \frac{d^{i-j}(\Delta^{-1}(t))}{dt^{i-j}} \right) \underline{x}_{LS}^{(j)}(t_0) \quad (3.2)$$

où  $\Delta(t)$  est une fonction scalaire arbitraire telle que  $\Delta(t_0) = 1$  et  $\underline{x}_{LS}^{(i)}(t_0) = \left( \underline{X}_s(t_0) - \underline{X}_L(t_0) \right)^{(i)}$  est la  $i^{\text{ème}}$  dérivée de la position relative initiale. De plus, un observateur partant de la même origine à  $t_0$  et suivant un mouvement sans manoeuvre défini par les conditions initiales suivantes, collecte les mêmes azimuts que l'observateur qui suit la commande ambiguë :

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{LS}(t_0) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left[ d^{i-j} \Delta^{-1}(t_0) / dt^{i-j} \right] \underline{x}_{LS}^{(j)}(t_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \left[ d^{d-j} \Delta^{-1}(t_0) / dt^{d-j} \right] \underline{x}_{LS}^{(j)}(t_0) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

#### 4 - EXEMPLE D'APPLICATION

Appliquons les conditions (3.2) au cas habituel et simple d'une cible en MRU ( $d = 1$ ). Les coordonnées relatives sont définies par :

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t), y(t), x^{(1)}(t_0), y^{(1)}(t_0) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

la cinématique de l'observateur étant elle définie par :

$$\dot{\underline{X}}(t) = \begin{bmatrix} O_2 & I_2 \\ O_2 & O_2 \end{bmatrix} \underline{X}(t) + \begin{bmatrix} O_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \underline{U}(t) \quad (4.2)$$

En appliquant la condition 3.2, on obtient une manoeuvre intégrée ambiguë définie par :

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) = & (\Delta(t) - 1) \begin{bmatrix} x(t_0) + (t - t_0) x^{(1)}(t_0) \\ y(t_0) + (t - t_0) y^{(1)}(t_0) \end{bmatrix} \\ & - \Delta(t) \Delta^{(1)}(t_0) \cdot (t - t_0) \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour retomber sur les conditions obtenues dans les travaux antécédents pour  $\underline{u}(t_0) = 0$ , il suffit de dériver deux fois  $\underline{r}(t)$  car  $\underline{u}(t_0) = \underline{r}^{(2)}(t)$  :

$$\underline{r}^{(2)}(t_0) = \left[ \Delta^{(2)}(t_0) - 2[\Delta^{(1)}(t_0)]^2 \right] \underline{x}_{LS}(t_0) + 2\Delta^{(1)}(t_0) \underline{x}_{LS}^{(1)}(t_0)$$

$\underline{r}^{(2)}(t_0) = 0$  implique  $\Delta^{(2)}(t_0) = 0$  et  $\Delta^{(1)}(t_0) = 0$  pour peu que  $x_{LS}(t_0)$  et  $x_{LS}^{(1)}(t_0)$  soient linéairement indépendants. On retrouve alors la condition habituelle [4]. Sinon, s'il y a dépendance entre  $x_{LS}(t_0)$  et  $x_{LS}^{(1)}(t_0)$ , alors on peut montrer que l'on retrouve les conditions habituelles [4] ou que l'on est dans des cas dégénérés (porteur et bruiteur au même endroit).

Pour illustrer ces conditions générales d'inobservabilité, nous avons pris comme exemple une commande de la forme :

$$\Delta(t) = a \sin(2\pi f(t - t_0)) + 1$$

Remarquons que  $\Delta(t)$  vérifie bien  $\Delta(t_0) = 1$  (cf. 3.2).

La trajectoire du porteur en MRU qui donnerait les mêmes azimuts est donné par :

$$Y_A = \begin{bmatrix} x_L(t_0), y_L(t_0), \dot{x}_L(t_0) + 2\pi a f x_{LS}(t_0), \dot{y}_L(t_0) + 2\pi a f y_{LS}(t_0) \end{bmatrix}$$

Sur la figure 3, on a représenté ces trajectoires pour les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} X_L &= [0, 0, -4, 0]' \text{ et } X_S = [0, 5000, 4, 0]' \\ \text{d'où : } Y_A &= [0, 0, -4, 4\pi]' \end{aligned}$$

On pourra comparer l'allure de ces trajectoires avec le cas extrême opposé où l'on cherche à minimiser la grandeur de la borne [6].

#### 5 - CONCLUSION

Nous avons montré ici qu'en TPA, lorsqu'à l'instant initial l'observateur manoeuvre, il existe encore des manoeuvres ambiguës qui n'ont pas de définition triviale comme dans le cas où il n'y a pas de manoeuvre.

#### REFERENCES

- [1] S.E. HAMMEL, V.C. AIDALA "Observability requirements for three dimensional tracking via angle measurements" IEEE AES - 21 - n° 2 - March 85 - pp 200-206
- [2] A. PAYNE "Observability conditions for angles only tracking" 22ème ASILOMAR Conf. on Signal, Systems and computers - Nov. 88 PACIFIC GROVE (CA)
- [3] D. PILLON, C. JAUFFRET "New Observability criterion in target motion analysis" Underwater Acoustic Data Processing. Kingston (Ontario) CANADA - July 88
- [4] NARDONE, S.C, AIDALA, V.J "Observability criteria for bearings-only target motion analysis" IEEE AES - 17 N°2 (March 81), 162-166
- [5] PILLON, VERVEUR "Regroupement de pistes angulaires issues d'antennes passives dispersées" GRETSI 1989
- [6] JM. PASSERIEUX, D. VAN CAPPEL "Manoeuvre optimale en trajectographie passive à partir d'azimut" Même colloque GRETSI 1991

#### ANNEXE

D'après la CNS utilisée, le système est inobservable s'il existe un vecteur constant  $\underline{Y}$  (non nul) tel que  $\forall t \in [t_0, t_1]$   $C(t) \cdot \Phi(t, t_0) \underline{Y} = 0$ . Cherchons un  $\underline{Y}$  vérifiant cette condition.

Tout d'abord on a d'après (2.7),  $C(t) \cdot \underline{X}(t) = 0$  ou de façon équivalente  $C(t) [\Phi(t, t_0) \underline{X}(t_0) + \underline{R}(t)] = 0$ . Définissons :

$$\underline{Y}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{Y} \quad \text{d'où} \quad C(t) \underline{Y}(t) = 0 \quad (A.1)$$

$$\underline{\tilde{X}}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{X}(t_0) \quad \text{d'où} \quad C(t) [\underline{\tilde{X}}(t) + \underline{R}(t)] = 0 \quad (A.2)$$

A cause de la structure de  $C(t)$ , nous nous intéressons ici au système défini par les deux premières composantes seulement notées en minuscule (naturellement  $c(t) = [\cos \beta(t), \sin \beta(t)]$ ).

Selon ces notations, on obtient de (A.1) et (A.2), le système

$$c(t) \underline{y}(t) = 0 \quad (A.3)$$

$$c(t) [\underline{\tilde{x}}(t) + \underline{r}(t)] = 0 \quad \text{ou} \quad c(t) \cdot \underline{x}(t) = 0 \quad (A.4)$$

Définissons  $\underline{Y}$  comme la concaténation de  $(d + 1)$  vecteurs  $\underline{y}_i$  dimension 2 :

$$\underline{Y} = \left( \underline{y}'_0 \parallel \underline{y}'_1 \parallel \underline{y}'_2 \parallel \dots \parallel \underline{y}'_d \right) \quad (A.5)$$



Vue la structure de  $\Phi(t, t_0)$ , on a :

$$y(t) = \sum_{i=0}^d \frac{(t-t_0)^i}{i!} Y_i \quad (A.6)$$

En dérivant le nombre nécessaire de fois, il vient :

$$Y_i = y^{(i)}(t_0) \quad (A.7)$$

La dimension du noyau de  $c(t)$  étant un,  $y(t)$  et  $[\tilde{x}(t) + r(t)]$  sont colinéaires (d'après A.3-A.4). Il existe donc une fonction scalaire  $\lambda(t)$  telle que :

$$y(t) = \lambda(t) [\tilde{x}(t) + r(t)] = \lambda(t) \underline{x}(t) \quad (A.8)$$

En différenciant  $i$  fois cette dernière expression, on obtient à  $t_0$  :

$$Y_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda^{(i-j)}(t_0) \underline{x}^{(j)}(t_0) \quad (A.9)$$

D'où en reportant dans (A.6)

$$y(t) = \sum_{i=0}^d \frac{(t-t_0)^i}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda^{(i-j)}(t_0) \underline{x}^{(j)}(t_0) \quad (A.10)$$

En utilisant (A.4), il vient ( $\lambda(t)$  étant non nul) :

$$r(t) = \sum_{i=0}^d \frac{(t-t_0)^i}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\lambda^{(i-j)}(t_0)}{\lambda(t)} \underline{x}^{(j)}(t_0) - \tilde{x}(t) \quad (A.11)$$

Or, d'après la structure de  $\Phi$  (idem A.6),  $\tilde{x}(t)$  vaut :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^d \frac{(t-t_0)^i}{i!} \underline{x}^{(i)}(t_0) \quad (A.12)$$

En intégrant (A.12) dans (A.11) et en réorganisant l'expression, on obtient la conditions (3.2) en notant :

$$\Delta(t) = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t)} \quad (A.13)$$

On a ainsi déterminé toutes les commandes intégrées telles qu'il existe un  $Y$  vérifiant la condition d'inobservabilité.

D'après (A.1) et (A.2), les sorties d'un tel système obéissant à une telle commande ambiguë seront les mêmes que celles obtenues par un observateur suivant un mouvement sans manoeuvre défini par  $\underline{Y}$  (A.5), d'où (3.3).

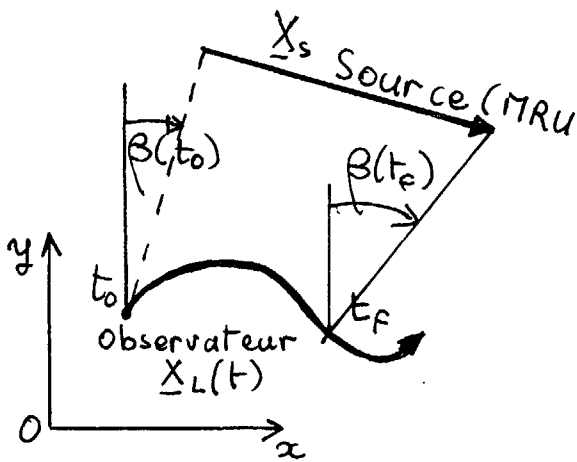


Fig. 1 - TPA : notations

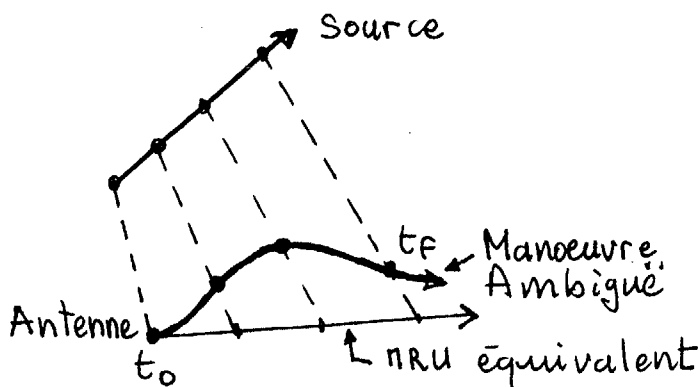


Fig. 2 - Manoeuvre ambiguë cas habituel ( $u(t_0) = 0$ )

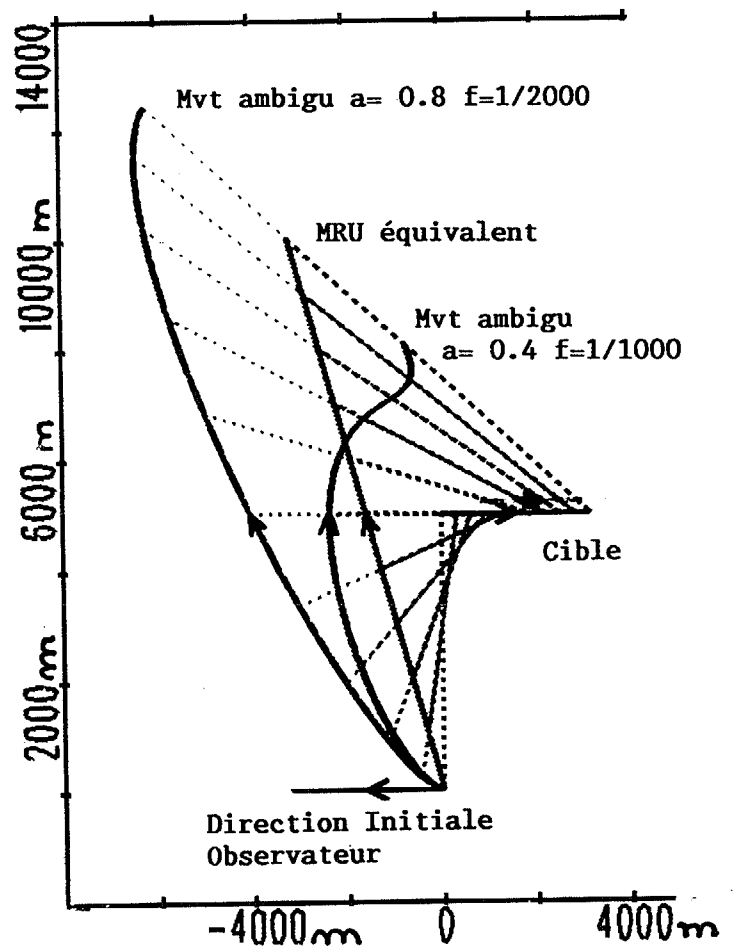


Fig. 3 - Exemple du paragraphe 4 ( $u(t_0) \neq 0$ )