



## Identification de Sinusoides Bruit es par Filtrage de Kalman Etendu.

F. Auger - M. Guglielmi

Laboratoire d'Automatique de Nantes. (URA 823 CNRS)  
Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, 1, Rue de la No e - 44072 Nantes Cedex 03.  
Membres du GDR 134 CNRS "traitement du signal et des images"

### Résumé :

Après avoir rappel e les méthodes classiques pour estimer les paramètres caractéristiques d'un signal comprenant plusieurs sinusoides et un bruit, une méthodes utilisant un filtre de Kalman étendu est présentée. Celle-ci utilise une modélisation d'état du signal dont les pôles sont plac es sur le cercle unité. Son extension aux cas des signaux harmoniques et des "chirps" est ensuite proposée. On présente alors quelques résultats issus de vibrations de machines tournantes et de simulations.

### Abstract :

The problem of estimating the frequencies, phases and amplitudes of sinusoidal signals from noisy data is considered. After a short recall of the classical methods, we propose a new one, using an extended Kalman filter applied on a model whose poles are forced on the unit circle. Some extensions of our method for harmonic signals and for chirped sinusoids are presented.

### 1) Introduction

L'estimation des caractéristiques d'un signal comprenant plusieurs sinusoides et un bruit intervient dans de nombreux domaines d'applications du traitement du signal (communications, acoustique, systèmes mécaniques, etc...). Plusieurs solutions très classiques sont disponibles dans la littérature pour résoudre ce problème. Cependant, ce sujet demeure encore aujourd'hui un thème de recherche actif, comme le montrent de nombreuses publications récentes, et constitue également un bon problème de mise en oeuvre sur des calculateurs rapides ou parallèles. Parmi ces méthodes classiques, les plus étudiées et les plus utilisées sont sans doute les méthodes de Prony et de Pisarenko, utilisant l'identification d'un modèle AR (pour Prony) ou d'un modèle ARMA particulier (pour Pisarenko) pour estimer les fréquences et, le plus souvent, la résolution d'un système linéaire pour estimer les amplitudes.

Toutefois, ces deux méthodes présentent l'inconvénient de ne pas pouvoir tenir compte aisément d'hypothèses a priori supplémentaires sur les caractéristiques du signal, comme par exemple une relation entre les fréquences, ni de pouvoir être adaptées à des situations non stationnaires. Dans cet article, on se propose d'étudier une autre approche, où les caractéristiques sont estimées de manière directe au moyen d'un filtrage de Kalman étendu, portant sur une modélisation d'état déduite du signal analytique du signal mesur e. Dans une première partie, on pose le problème de l'estimation des caractéristiques d'un signal sinusoidal bruit e, et on rappelle les différentes méthodes classiques. On présente ensuite la méthodes proposée, en la comparant à une autre assez semblable proposée récemment. Dans une seconde partie, on s'intéresse à des signaux harmoniques, où les différentes fréquences présentes sont des multiples d'une fréquence fondamentale. On montre que cette information supplémentaire peut être utilisée avec profit dans les méthodes basées sur cette modélisation d'état du signal. Enfin, dans une troisième partie, on montre comment cette modélisation peut également s'adapter à une situation non-stationnaire, où les fréquences "instantanées" du signal suivent une loi connue. En prenant l'exemple d'une modulation linéaire de fréquence, on donnera les modifications de l'algorithme pour cette situation. On conclura par des résultats pour des signaux réels et pour des simulations.

### 2) Cas des Sinusoides Bruit es.

De nombreux problèmes physiques conduisent à considérer un signal observ e comme la somme d'une partie déterministe formée par une somme de M sinusoides (M étant suppos e connue) et d'un bruit de mesure additif :

$$\begin{cases} y[k] = x[k] + w[k], & x[k] = \sum_{m=1}^M B_m z_m^k, & k = 0 \dots N-1 \\ B_m = b_m e^{j\varphi_m}, & z_m = r_m e^{j\theta_m}, & \theta_m = 2\pi f_m / F_e \end{cases} \quad (1)$$

où  $w[k]$  est une séquence complexe gaussienne, centrée, blanche et dont les parties réelles et imaginaires sont indépendantes et de même variance  $\sigma^2/2$ . L'ensemble des  $b_m, \varphi_m, f_m$  (amplitudes, phases et fréquences) constituent les  $3M$  paramètres que l'on cherche à estimer, les coefficients  $r_m$  étant égaux à un par hypothèse. Le signal est  chantillonn e à une fréquence  $F_e$  supposée vérifier la condition de Shannon. Le problème a été formul e ici pour des signaux complexes, le cas de signaux réels conduisant à des développements très similaires.

La première étape dans la résolution de ce problème se doit d'être l'étude d'un estimateur du maximum de vraisemblance de ces paramètres [1]. Tenant compte du caractère gaussien de la séquence aléatoire complexe  $w$ , la maximisation de la densité de probabilité du vecteur des paramètres conduit à la minimisation du critère:

$$J(b_m, \varphi_m, f_m) = (Y - E.B)^H (Y - E.B) \quad (2)$$

$$\text{avec} \begin{cases} Y = X + W, & X = E.B \\ Y^T = [y[0] \ y[1] \dots y[k] \dots y[N-1]], & X^T = [x[0] \ x[1] \dots x[k] \dots x[N-1]] \\ W^T = [w[0] \ w[1] \dots w[k] \dots w[N-1]] \\ B^T = [B_1 \ B_2 \dots B_m \dots B_M], & [E]_{ij} = z_j^{i-1}, \ i=1 \dots N, \ j=1 \dots M \end{cases}$$

L'expression de ce critère fait apparaître de façon découplée les paramètres de fréquence (qui interviennent dans la matrice E) et le vecteur des amplitudes complexes B. Si les fréquences sont supposées connues, la minimisation de ce critère conduit alors à une estimation non biaisée des amplitudes  $\hat{B}$  [1,2]:

$$\hat{B} = (E^H E)^{-1} (E^H Y), \quad E[\hat{B}] = B \quad \text{et} \quad \text{Var}[\hat{B}] = \sigma^2 (E^H E)^{-1} \quad (3)$$

Par contre, l'estimation des fréquences en utilisant le maximum de vraisemblance est un problème non linéaire difficile. Dans le cas d'une seule composante sinusoidale ou de fréquences multiples de  $F_e/N$ , on peut montrer que ce critère se ramène à la recherche des valeurs maximales du module carr e de la transformée de Fourier de  $y$  (son périodogramme) [1,3]. Dans le cas contraire, le critère du maximum de vraisemblance présente des extrema locaux, et l'emploi des méthodes itératives d'optimisation sont déconseillées [1,4]. Cependant, l'estimation des amplitudes par maximum de vraisemblance constitue une méthodes fréquemment utilisée. Si on dispose, par une autre technique, d'une estimation des fréquences, on peut en déduire par l'équation 3 une estimation des amplitudes complexes. Notons également que plusieurs auteurs ont propos e d'utiliser des méthodes approchées ou différentes pour estimer le



vecteur des amplitudes, comme la méthode des approximants de Padé [6] et l'estimateur de Capon (ou de minimum de variance) [1,4].

Enfin, l'étude de l'estimateur du maximum de vraisemblance permet également de déterminer la borne inférieure de Cramer-Rao, donnant la variance minimale qu'il est possible d'obtenir par un estimateur non biaisé de ces paramètres. Sans en donner les formes précises [1], on peut simplement rappeler que les termes diagonaux de la matrice de variance du vecteur paramètre sont proportionnels à  $\sigma^2$  et tendent vers zéro lorsque N tend vers l'infini.

Les méthodes de Prony et de Pisarenko constituent alors une alternative intéressante à cet estimateur du maximum de vraisemblance. Celles-ci utilisent bien évidemment le fait que ce signal peut être modélisé par un ARMA particulier. Si on considère en effet le polynôme :

$$P(z) = \prod_{m=1}^M (z - z_m) = \sum_{i=0}^M a_i z^{M-i}, \quad a_0 = 1, \quad P(z_m) = 0 \quad (4)$$

On vérifie très simplement que :

$$\sum_{i=0}^M a_i x[k-i] = \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=0}^M a_i z_m^{M-i} \right) \tilde{B}_m z_m^{k-M} = 0 \quad (5)$$

En remplaçant alors  $x[k]$  par  $y[k] - w[k]$  dans l'équation précédente, on obtient une modélisation de  $y[k]$  sous la forme d'un modèle ARMA, dont le numérateur et le dénominateur sont identiques et les pôles et zéros sont sur le cercle unité :

$$\sum_{i=0}^M a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^M a_i w[k-i] \quad (6)$$

Le problème de l'estimation des fréquences des composantes harmoniques est alors remplacé par l'estimation des coefficients du modèle, dont on déduit ensuite les fréquences estimées par le calcul des racines de  $P(z)$ . Les méthodes de Prony et de Pisarenko se distinguent alors dans la manière d'estimer les coefficients du modèle. Pour la première, on remplace le critère  $J_1(a_i)$  de maximum de vraisemblance difficile à mettre en oeuvre [4] par un critère  $J_2(a_i)$  plus simple à utiliser [5] :

$$J_1(a_i) = \frac{1}{N-M} \sum_{k=M}^{N-1} |w[k]|^2$$

$$J_2(a_i) = \frac{1}{N-M} \sum_{k=M}^{N-1} |\varepsilon[k]|^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{k=M}^{N-1} |Y^T[k].A|^2 = A^H.R.A$$

$$\text{avec } \begin{cases} \varepsilon[k] = \sum_{i=0}^M a_i w[k-i] = \sum_{i=0}^M a_i y[k-i] \\ Y^T[k] = [y[k].y[k-1] \dots y[k-m]..y[k-M]] \\ A^T = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_1 \ \dots \ a_M] \\ R = \frac{1}{N-M} \left( \sum_{k=M}^{N-1} Y^*[k].Y^T[k] \right) \end{cases}$$

Ce qui revient à l'estimation des coefficients d'un modèle AR. Cependant dans le cas de la méthode de Prony, la séquence d'excitation  $\varepsilon[k]$  du modèle n'est pas blanche, et donc le critère  $J(a_i)$  est seulement un critère de moindre carrés. On obtient comme estimation de A [7] :

$$A = \frac{R^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T R^{-1} \mathbf{1}}, \quad \text{avec } \mathbf{1}^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (7)$$

La méthode de Pisarenko est basée sur les propriétés algébriques de la matrice d'autocorrélation du signal. Elle repose en effet sur la décomposition de l'image de cette matrice en deux sous-espaces correspondant aux composantes harmoniques du signal et au bruit. Si le modèle n'est pas surdimensionné, il est également possible de l'exposer sans faire l'hypothèse de phases aléatoires uniformément réparties sur  $[0, 2\pi]$  : Si on désigne alors par X, W les vecteurs :

$$X^T[k] = [x[k] \ x[k-1] \dots x[k-m] \dots x[k-M]]$$

$$W^T[k] = [w[k] \ w[k-1] \dots w[k-m] \dots w[k-M]]$$

$$Y[k] = X[k] + W[k]$$

En étudiant les propriétés statistiques de la matrice  $Y^*[k].Y^T[k]$ , et en utilisant l'équation 7, on obtient alors :

$$\mathbb{E}[Y^*[k].Y^T[k]] = X^*[k].X^T[k] + \sigma^2 I$$

$$\mathbb{E}[Y^*[k].Y^T[k].A] = X^*[k].X^T[k].A + \sigma^2.A$$

$$= \sigma^2.A$$

Donc  $Y^*[k].Y^T[k].A$  est une variable aléatoire stationnaire, dont on peut approcher l'espérance par un estimateur ergodique :

$$R.A \approx \sigma^2.A, \quad R = \frac{1}{N-M} \left( \sum_{k=M}^{N-1} Y^*[k].Y^T[k] \right) \quad (8)$$

Donc A est un vecteur propre de la matrice R. On peut également montrer très simplement que  $\sigma^2$  est la plus petite des valeurs propres de R.

Ces deux méthodes appellent alors plusieurs remarques. En premier lieu, les pôles du système identifié ne sont pas contraints à être sur le cercle unité. Ils peuvent même être instables (à cause du choix de la matrice R dans les équations 7 et 8), ce qui ne semble pas être un inconvénient pour ce problème. De plus, l'estimation des fréquences s'obtient par le calcul des racines du polynôme complexe  $P(z)$ . Cette opération nécessite la mise en oeuvre d'un algorithme soigné [5,6], qui ne fournira malgré tout qu'une valeur approchée. En outre la relation entre coefficients et racines étant non-linéaire, la variance des fréquences estimées ne peut être déduite de celle des coefficients, et dépend de leur valeur. Notons enfin qu'il existe plusieurs techniques itératives [8,9,10] améliorant les résultats de ces deux méthodes.

On peut alors s'intéresser à une autre classe d'estimateurs, basée sur une modélisation d'état du signal. A partir de cette modélisation, des techniques d'estimation récursives, comme par exemple le filtrage de Kalman Étendu [11] peuvent être employées. Suivant la modélisation choisie, la nature des paramètres et les caractéristiques de leur estimation (vitesse de convergence, variance) peuvent être très différentes. Un premier exemple de modélisation d'état possible est celle déduite du modèle AR bruité (Eq 5), qui est utilisée dans [9]. Les paramètres à estimer sont alors les coefficients de  $P(z)$ , et les pôles de ce système ne sont pas contraints à se trouver sur le cercle unité. On propose alors de s'intéresser alors à une modélisation directement déduite de l'équation (1) :

$$\begin{cases} X_m[k+1] = X_m[k].e^{j\theta_m}, \quad X_m[k] = B_m e^{jk.\theta_m} \\ y[k] = \sum_{m=1}^M X_m[k] + w[k] \end{cases} \quad (9)$$

Que l'on peut réécrire en séparant les parties réelles et imaginaires pour utiliser des variables réelles. Les équations 9 se réécrivent alors à l'aide de matrices 2x2 dont les pôles sont contraints par construction sur le cercle unité :

$$\begin{cases} X_m[k] = X_{r,m}[k] + j X_{i,m}[k] \\ y[k] = y_r[k] + j y_i[k] \\ \begin{bmatrix} X_{r,m}[k+1] \\ X_{i,m}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) \\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_{r,m}[k] \\ X_{i,m}[k] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_r[k] \\ y_i[k] \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} X_{r,m}[k] \\ X_{i,m}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_r[k] \\ w_i[k] \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

Le filtre de Kalman étendu construit à partir de cette modélisation possède alors une équation de prédiction non-linéaire et une étape



d'estimation linéaire. Si on note  $Z[k]$  le vecteur d'état étendu à l'instant  $k$ :

$$Z^T[k] = [\theta_1[k] \dots \theta_M[k] X_{r,1}[k] X_{i,1}[k] \dots X_{r,M}[k] X_{i,M}[k]]$$

étape de prédiction:

- $Z[k+1/k] = F(Z[k/k])$ , décomposé en : (11)

$$\begin{cases} \theta_m[k+1/k] = \theta_m[k/k] \quad , m = 1..M \\ \begin{bmatrix} X_{r,m}[k+1/k] \\ X_{i,m}[k+1/k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_m[k/k]) & -\sin(\theta_m[k/k]) \\ \sin(\theta_m[k/k]) & \cos(\theta_m[k/k]) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{r,m}[k/k] \\ X_{i,m}[k/k] \end{bmatrix} \end{cases}$$

- $\mathcal{P}[k+1/k] = \frac{\partial F(Z[k/k])}{\partial Z} \mathcal{P}[k/k] \frac{\partial F^T(Z[k/k])}{\partial Z}$  (12)

avec  $\left[ \frac{\partial F}{\partial Z}(Z[k/k]) \right]_{ij} = \frac{\partial Z[k+1/k]_i}{\partial Z[k/k]_j}$ , décomposé en :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_m[k+1/k]}{\partial \theta_m[k/k]} = 1 \\ \frac{\partial X_{r,m}[k+1/k]}{\partial \theta_m[k/k]} = -\sin(\theta_m[k/k]) X_{r,m}[k/k] - \cos(\theta_m[k/k]) X_{i,m}[k/k] \\ \frac{\partial X_{i,m}[k+1/k]}{\partial \theta_m[k/k]} = \cos(\theta_m[k/k]) X_{r,m}[k/k] - \sin(\theta_m[k/k]) X_{i,m}[k/k] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X_{r,m}[k+1/k]}{\partial X_{r,m}[k/k]} = \cos(\theta_m[k/k]) & \frac{\partial X_{r,m}[k+1/k]}{\partial X_{i,m}[k/k]} = -\sin(\theta_m[k/k]) \\ \frac{\partial X_{i,m}[k+1/k]}{\partial X_{r,m}[k/k]} = \sin(\theta_m[k/k]) & \frac{\partial X_{i,m}[k+1/k]}{\partial X_{i,m}[k/k]} = \cos(\theta_m[k/k]) \end{cases}$$

Etape d'estimation:

$$\begin{cases} Z[k+1/k+1] = Z[k+1/k] + \mathcal{K}[k+1] \left( \begin{bmatrix} y_r[k+1] \\ y_i[k+1] \end{bmatrix} - H Z[k+1/k] \right) \\ \mathcal{P}[k+1/k+1] = (\mathbf{1} - \mathcal{K}[k+1] H) \mathcal{P}[k+1/k] \\ \mathcal{K}[k+1] = \mathcal{P}[k+1/k] H^T (H \mathcal{P}[k+1/k] H^T + R)^{-1} \\ H = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 10 & \dots & 10 & \dots & 10 \\ 0 & \dots & 0 & 01 & \dots & 01 & \dots & 01 \end{pmatrix}, \quad R = \sigma^2 / 2 \cdot \mathbf{I} \end{cases} \quad (13)$$

Pour un signal réel, il est possible de ne tenir compte que de  $y_r[k]$ , et donc de la première ligne de  $H$ . Dans ces équations, la variance du bruit est supposée connue. Pour l'estimer, il est alors possible d'utiliser un filtre du premier ordre soit sur l'erreur de prédiction, soit sur l'amplitude des sinusoides :

$$R[k] = \alpha R[k-1] + (1-\alpha) [y[k] - \sum_{m=1}^M X_{r,m}[k/k-1] \cdot [y[k] - \sum_{m=1}^M X_{i,m}[k/k-1]]^H$$

$$\text{ou } R[k] = \alpha \cdot R[k-1] + (1-\alpha) [S_y - \sum_{m=1}^M |X_{r,m}[k]|^2]$$

$$\text{avec } S_y = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2, \quad E[S_y] = \sum_{m=1}^M b_m^2 + \sigma^2$$

A partir du vecteur d'état étendu final  $Z_F = Z[N-1/N-1]$ , on peut en déduire simplement une estimation des fréquences, des amplitudes, et des phases :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_m &= [Z_F]_m, \quad m=1..M \\ \hat{b}_m &= (X_{r,m}^2 + X_{i,m}^2)^{1/2} \\ \hat{\phi}_m &= \text{Arg}(X_m \exp(-j(N-1)\hat{\theta}_m)) \end{aligned} \quad (14)$$

Un tel algorithme est en fait très similaire à celui proposé dans [12]. Cependant, à l'inverse de [12], l'équation d'évolution du filtre est non linéaire, tandis que l'équation d'observation est linéaire. Une comparaison expérimentale en prenant des

initialisations identiques a montré une vitesse de convergence des paramètres de notre algorithme légèrement supérieure.

### 3) Cas des Signaux Harmoniques.

Dans certains cas, comme par exemple pour des vibrations mécaniques, on dispose par rapport à l'équation 1 d'une information supplémentaire, imposant que toutes les fréquences sont des multiples d'une fréquence fondamentale :

$$f_m = m \cdot f_1 \quad m=1..M \quad (15)$$

Il semble alors difficile de modifier les méthodes paramétriques pour tenir compte de cette hypothèse. Une des premières méthodes d'estimation de la fréquence fondamentale  $f_1$  a été proposée dans [13]. C'est une extension de la méthode ALE [12] utilisant un banc de filtres passe-bande centrés sur les harmoniques. La fréquence fondamentale est alors estimée en minimisant l'énergie de  $s_2[k]$  :

$$S_1(z) = \sum_{m=1}^M F(z, e^{jm\theta_1}) \cdot Y(z), \quad s_2[k] = y[k] \cdot s_1[k]$$

Cependant, cette méthode ne permet pas d'estimer (et donc de tenir compte) des amplitudes des sinusoides. La référence [13] comporte également le calcul de la borne inférieure de Cramer-Rao pour cette situation.

Par contre, La méthode proposée, comme pour [12], permet de prendre en compte simplement cette hypothèse supplémentaire. De plus, celle-ci a pour effet de diminuer la dimension du vecteur d'état à  $2M+1$ , ce qui diminue la complexité de l'algorithme. Par rapport aux équations précédentes, la prise en compte de l'équation (15) entraîne les modifications :

$$\begin{aligned} Z^T[k] &= [\theta_1[k] X_{r,1}[k] X_{i,1}[k] \dots X_{r,M}[k] X_{i,M}[k]] \\ \frac{\partial X_{r,m}[k+1/k]}{\partial \theta_1[k/k]} &= m \frac{\partial X_{r,m}[k+1/k]}{\partial \theta_m[k/k]} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 10 & \dots & 10 & \dots & 10 \\ 0 & 01 & \dots & 01 & \dots & 01 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Il est alors également nécessaire d'initialiser  $\theta_1$  à une valeur raisonnablement proche de la valeur exacte. L'estimation des paramètres s'effectue de manière analogue à (14). De la même façon, on pourrait également envisager de traiter le cas de signaux comportant deux harmoniques, ce qui correspond dans le cas de machines tournantes aux vibrations dues au moteur et au réducteur.

### 4) Modulation linéaire de Fréquence.

Pour pouvoir utiliser ces méthodes pour des problèmes réels, il est bien souvent nécessaire de tenir compte de variations des fréquences au cours du temps. On peut alors envisager deux types de non-stationnarités : soit des non-stationnarités lentes, dues à des dérives non modélisables, soit des non-stationnarités plus rapides, correspondant par exemple pour des machines tournantes à des changements de régime ou des variations de charge. Pour le premier type, de nombreuses techniques ont été proposées pour tenir compte d'une variation lente des fréquences dans les méthodes paramétriques, dont les principales relèvent de méthodes de fenêtres glissantes [13], de gradient adaptatif [5], ou de moindre carrés récursifs [11]. Cependant on peut mettre en évidence pour ces trois types de méthodes un compromis biais-variance inévitable : Pouvoir suivre des variations rapides des fréquences ne peut s'obtenir qu'au prix d'une variance importante, qui peut rendre l'estimateur inutilisable. Plusieurs publications [12,13,15] ont mis en évidence ce phénomène pour des signaux présentant des non-stationnarités rapides.

Pour le filtre de Kalman étendu proposé ici, il est possible d'effectuer des modifications correspondant à chacun de ces deux types. Pour des variations lentes, on peut modéliser la variation de fréquence par une marche au hasard. Seule l'équation de prédiction est alors modifiée, et devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[k+1/k] &= \frac{\partial F(Z[k/k])}{\partial Z} \mathcal{P}[k/k] \frac{\partial F^T(Z[k/k])}{\partial Z} + Q \\ \text{avec } [Q]_{ii} &= \sigma_{\theta_i}^2, \quad i=1..M \end{aligned} \quad (17)$$

Où les variances sont déterminées par l'utilisateur. On obtient alors un comportement analogue aux méthodes paramétriques. De même, l'ajout d'une variance  $\sigma_{x_i}^2$  sur les composantes permet de tenir compte d'éventuelles évolution des amplitudes  $b_m$ . Par contre, pour des variations rapides des fréquences, et dont le type d'évolution



temporelle est connue, on peut modifier les équations d'évolution des composantes qui deviennent alors non stationnaires:

$$\begin{bmatrix} X_{r,m}[k+1] \\ X_{i,m}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\theta_m[k]) & -\sin(\Delta\theta_m[k]) \\ \sin(\Delta\theta_m[k]) & \cos(\Delta\theta_m[k]) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_{r,m}[k] \\ X_{i,m}[k] \end{bmatrix} \quad (18)$$

avec  $\Delta\theta_m[k] = \text{Arg}(X_m[k+1]X_m^*[k])$

Si on prend par exemple le cas des chirps [17], on a alors :

$$X_m[k] = B_m e^{j(k\theta_m + k^2\alpha_m/2)} \quad \text{et} \quad \Delta\theta_m[k] = \theta_m + (2k+1)\alpha_m/2 \quad (19) \\ = \Delta\theta_m[k-1] + \alpha_m$$

Le vecteur d'état étendu comporte alors 4M composantes, et les équations du filtre se déduisent des modifications de 11,12,13 par 18,19. De plus, la prise en compte dans ce modèle d'un faible bruit sur  $\alpha_m$  correspond alors à un modèle de Wiener sur la fréquence.

### Exemples

Une comparaison précise des divers algorithmes évoqués ici, tant sur la variance des paramètres estimés que sur leur complexité algorithmique constituerait un étude intéressante qui dépasserait le cadre de cet article. On va par contre illustrer le comportement de l'algorithme proposé dans différentes situations. Les figures 1 et 2 montrent le périodogramme d'un enregistrement des vibrations mécaniques d'un moteur diesel [18], et de l'erreur de prédiction du filtre de Kalman (après 100 points de convergence) prenant en compte quatre harmoniques. Bien que le signal comporte d'autres sinusoides, le filtre s'est correctement placé sur les quatre harmoniques. La figure 3 montre l'évolution de la fréquence pour un signal synthétique comportant deux harmoniques et dont la fréquence fondamentale passe de 15 à 25 Hz. Le filtre de Kalman, utilisant également deux harmoniques et une marche au hasard sur la fréquence, se recale alors au bout de 200 points, soit 400 ms. Enfin, La figure 4 montre la fréquence instantanée estimée par un filtre de Kalman pour le signal TS11 de la base des signaux synthétiques du GT1&2 du GDR 134, comportant deux chirps parallèles. Le filtre comporte deux composantes régies par (18).

[1] S.M. Kay, Modern Spectral Estimation, Theory and Application, Prentice Hall, 1988.

[2] C. Lambert-Nebout, F. Castanié, A Modified Prony Algorithm, Proc EUSIPCO 90, pp 329-332.

[3] M.D. Macleod, Fast High Accuracy estimation of multiple cisoids in noise, Proc EUSIPCO 90, pp 333-336.

[4] P. Stoica, R.L. Moses, B. Friedlander, T. Söderstrom, Maximum Likelihood Estimation of Multiple Sinusoids from Noisy Measurements, IEEE ASSP, Vol 37, n° 3, pp 278-391, March 89.

[5] S.L. Marple, Digital Spectral Analysis with Applications, Prentice Hall, 1987.

[6] C. Lambert, F. Castanié, An adaptive Prony Algorithm, Proc EUSIPCO 88, pp 571-574.

[7] P. Flandrin, N. Martin, Fiches Synthétiques de Méthodes temps-fréquence, RI du GDR 134 CNRS, Mars 91.

[8] R. Kumaresan, Y. Feng, FIR Prefiltering Improves Prony's Method, IEEE Trans SP, Vol 39, n°3, pp736-741, March 91.

[9] S.M. Kay, Accurate Frequency Estimation at Low Signal to Noise Ratio, IEEE Trans ASSP, Vol 32, n°3, pp 540-547, June 84.

[10] T. Pitarque, G. Allengrin, A. Ferrari, J. Menez, A new state space algorithm for computing the frequencies of sinusoids in white noise, Signal Processing, n° 22, pp 231-238.

[11] M. Najim, Modélisation et Identification en traitement du signal, Masson, 1988.

[12] P.J. Parker, B.D.O. Anderson, Frequency Tracking of Non-sinusoidal Periodic Signals, Signal Processing, n° 20, pp 127-152.

[13] A. Nehorai, B. Porat, Adaptive Comb Filtering for Harmonic Signal Enhancement, IEEE ASSP, Vol 34, pp 1124-1138, Oct 86.

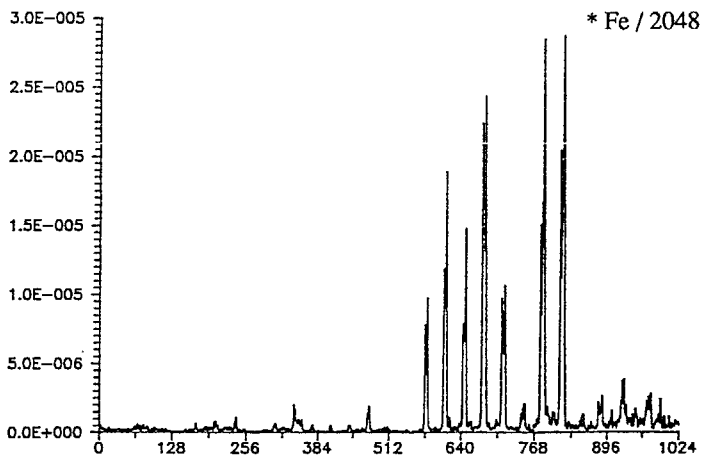
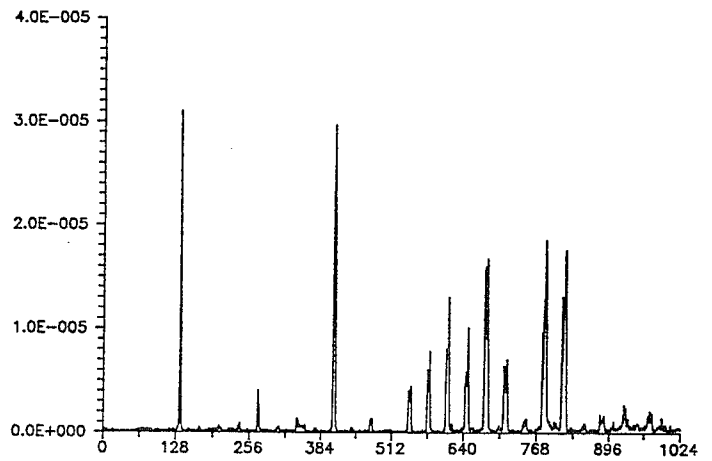
[14] R.V. Raja, R.N. Pal, Tracking of Bandpass Signals Using Adaptive Filters, IEEE ASSP, Vol 38, n°10, Oct 90.

[15] N. Martin, An AR Spectral Analysis of Non-Stationary Signals, Signal Processing, n°10, pp 61-74, 1986.

[16] O. Machi, N. Bershah, Adaptive Recovery of a Chirped Sinusoid in Noise, IEEE Trans SP, Vol 39, n°3, pp 583-594.

[17] S. Peleg, B. Porat, The Cramer-Rao Lower Bound for Signals with Constant Amplitude and Polynomial Phase, IEEE Trans SP, Vol 39, n° 3, pp 749-752, March 91.

[18] M. Guglielmi et al, Pilotage automatique d'un système actif de compensation de vibrations, soumis à la revue TS.



figures 1 et 2 : périodogrammes (sur 10000 points) d'un signal de vibrations d'un moteur diesel à 2000 tr/min et de l'erreur de prédiction du filtre de Kalman comportant 4 harmoniques, après 100 points de convergence. Fe = 1 KHz.

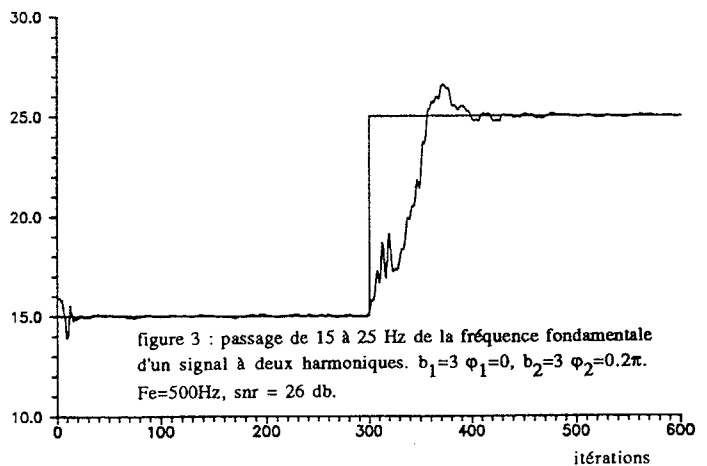


figure 3 : passage de 15 à 25 Hz de la fréquence fondamentale d'un signal à deux harmoniques.  $b_1=3 \phi_1=0$ ,  $b_2=3 \phi_2=0.2\pi$ . Fe=500Hz, snr = 26 db.

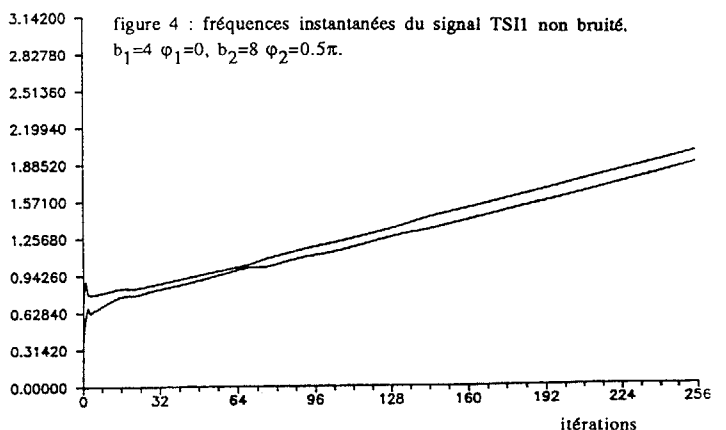


figure 4 : fréquences instantanées du signal TS11 non bruité.  $b_1=4 \phi_1=0$ ,  $b_2=8 \phi_2=0.5\pi$ .