

Conception de Fenêtres Optimales pour l'Analyse Spectrale des Signaux Échantillonnés

Joël Le Roux

I3S, Université de Nice,
CNRS Bat. 4, 250 rue A. Einstein,
Sophia Antipolis, 06560 Valbonne France

RÉSUMÉ

La communication propose de traiter le problème de synthèse de fenêtre d'analyse spectrale en termes de minimisation de coût. La forme de coût retenue tient compte de la diffusion de l'énergie du signal d'une fréquence à l'autre du fait de la longueur finie de la fenêtre ; elle peut être adaptée à un problème spécifique d'analyse spectrale pour contrôler certaines diffusions indésirables. Comme exemple nous considérons un cas particulier : l'extension au cas des signaux échantillonnés de la minimisation du moment du deuxième ordre de la densité spectrale, problème traité par Papoulis dans le cas des signaux continus. Nous montrons que la fenêtre proposée par Papoulis (demi période de sinusoïde) est aussi optimale dans le cas des signaux échantillonnés et nous vérifions qu'elle donne les meilleurs résultats dans des problèmes classiques d'analyse paramétrique : les modélisations auto-régressives et de Pisarenko.

1. INTRODUCTION

La communication propose une manière de quantifier l'efficacité des fenêtres utilisées lors de l'analyse spectrale des signaux échantillonnés et la synthèse des filtres numériques. On trouve les bases de ce sujet dans l'ouvrage de Marple [7] et dans des articles bien connus [1][3][8]. L'effet d'une fenêtre temporelle se traduit dans le domaine des fréquences par une convolution circulaire qu'on peut interpréter comme une diffusion du signal d'une fréquence dans son voisinage. Une bonne fenêtre est ainsi une fenêtre qui minimise la diffusion d'une raie du spectre. Tandis que la plupart des discussions sur l'intérêt relatif des fenêtres est souvent fondé sur une comparaison entre l'énergie et la largeur de leur lobe principal, notre étude propose un critère permettant de quantifier l'effet de diffusion d'une fenêtre (paragraphe 2.1). Ce critère est ensuite minimisé (paragraphe 2.2) ce qui permet d'obtenir la forme optimale de fenêtre. Comme exemple, nous proposons une fonction de coût originale, qui permet d'établir l'extension correcte au cas des signaux échantillonnés du "moment minimal du deuxième ordre" proposé par Papoulis. La fenêtre optimale déduite de ce critère a déjà été proposée par A. Papoulis dans le cas des signaux continus [1], [2], [9] (paragraphe 2.3). Quelques propriétés de la transformée en z de cette fenêtre sont données dans le paragraphe 2.4. Le paragraphe 3 montre des applications de l'approche. Le quatrième paragraphe indique l'extension au cas des signaux bidimensionnels échantillonnés.

2. MESURE DE LA DIFFUSION SPECTRALE

2.1. Un critère de mesure

La mesure habituelle de la dispersion d'une variable aléatoire est son moment du deuxième ordre

$$E\{|y|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_y(x) dx \quad (1)$$

où $p_y(x)$ est la densité de probabilité de $y(x)$. Papoulis utilise cette fonction pour mesurer la dispersion d'un signal continu due à l'application d'une fenêtre $a(t)$ [9].

ABSTRACT

The problem of digital window design is formulated in terms of cost minimization. This cost quantizes the leakage from one frequency to another. The choice of the penalty function appearing in the cost expression may be adapted to a specific spectral analysis problem and allows the designer to control undesirable leakages. The approach is applied in a particular optimization problem : the minimization of the second order moment extension to the case of sampled signals spectra. This example leads to a correct justification of the Papoulis window in the case of digital signals. Applications show examples of window design and the interest of Papoulis window in some problems of spectral parameters estimation : Pisarenko frequency estimation and autoregressive modelization. An English version of this paper will appear in the IEEE trans. on Signal Processing [5].

$$C_a = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_a(\omega) d\omega \quad (2)$$

où $S_a(\omega)$ est la densité spectrale de $a(t)$. Quand on étudie les signaux échantillonnés, il faut modifier ce critère pour garantir sa compatibilité avec la périodicité des transformées de Fourier. On est ainsi amené à définir le coût caractérisant la dispersion spectrale due à une fenêtre $h(n)$ de longueur $N+1$ et dont la transformée de Fourier est

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h(n) e^{-j\omega n} \quad (3)$$

Lorsque $h(n)$ est appliquée à un signal numérique en vue de réaliser son analyse spectrale, la composante complexe de ce signal à la fréquence $\omega_0/2\pi$ est diffusée dans les fréquences voisines sous la forme d'un signal dont la transformée de Fourier est $H[\exp j(\omega - \omega_0)]$. On peut calculer le coût C permettant d'évaluer cette diffusion dans le domaine des fréquences. C tient compte du coût $G(e^{j\omega})$ qu'on accepte de payer pour la diffusion (indésirable) de la fréquence ω_0 à la fréquence $(\omega - \omega_0)$

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (4)$$

$G(e^{j\omega})$ doit être une fonction réelle non négative et symétrique. Elle dépend des spécifications du problème. Le concepteur pourra associer une pénalité élevée à une diffusion indésirable et une pénalité réduite à une diffusion acceptable. Un cas particulier intéressant est l'extension naturelle des résultats obtenus par Papoulis dans le cas des signaux continus [9]. Dans ce cas la fonction de coût est

$$G_p(e^{j\omega}) = \sin^2 \omega/2 = \frac{1}{4} |1 - e^{j\omega}|^2 \quad (5)$$



et non ω^2 . Le coût caractérisant la diffusion spectrale est alors

$$C_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega/2) |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{6}$$

La fonction de coût augmente comme ω^2 lorsque ω est petit et le coût est comparable au moment du deuxième ordre dans cette gamme de basses fréquences. La fonction de coût est périodique et atteint son maximum lorsque $\omega = \pm \pi$.

2.2. Calcul de la fenêtre optimale

Une fenêtre est optimale si elle minimise le critère (4) sous la contrainte suggérée par Papoulis qui impose une énergie constante du signal

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^N h(n) e^{j\omega n} \right|^2 d\omega \\ &= \sum_{n=0}^N h^2(n) = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Il faut donc trouver le minimum de

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) \left(\sum_{n=0}^N h(n) e^{j\omega n} \right) \left(\sum_{n=0}^N h(n) e^{-j\omega n} \right) d\omega - \lambda \left(\sum_{n=0}^N h^2(n) - 1 \right) \tag{8}$$

$$C = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N h(n) h(k) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{-j\omega(n-k)} d\omega \right) - \lambda \left(\sum_{n=0}^N h^2(n) - 1 \right) \tag{9}$$

où le coefficient de $h(n)h(k)$ dans la double somme est

$$g(n-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{-j\omega(n-k)} d\omega \tag{10}$$

$g(n)$ est la transformée de Fourier inverse de $G(e^{j\omega})$. Comme $G(e^{j\omega})$ est réelle et symétrique, $g(n)$ est aussi réelle et symétrique. Le minimum de C est obtenu lorsque

$$\sum_{k=0}^N h(k)g(n-k) = \lambda h(n) \tag{11}$$

pour $n = 0, \dots, N$. L'équation (11) montre que la fenêtre optimale est un vecteur propre $\mathbf{H} = [h(0), \dots, h(N)]^T$ d'une matrice symétrique et de Toeplitz \mathbf{G} dont l'élément (n,k) est $g(n-k)$. Comme

$$\mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{H} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) \left| \sum_{n=0}^N h(n) e^{j\omega n} \right|^2 d\omega \geq 0$$

pour tout \mathbf{H} (12)

\mathbf{G} est définie non négative. C peut s'écrire

$$C = \mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{H} - \lambda (\mathbf{H}^T \mathbf{H} - 1) \tag{13}$$

C atteint son minimum lorsque \mathbf{H} est le vecteur propre \mathbf{H}_1 associé à la plus petite valeur propre de \mathbf{G} . Ainsi la technique de conception est très proche de la méthode d'estimation de fréquences de Pisarenko [11]. Elle se décompose en une succession d'étapes :

- 1 - Définition de la fonction de coût $G(e^{j\omega})$
- 2 - Calcul de la transformée de Fourier inverse $(N+1)$ coefficients de sa série de Fourier

3 - Construction de la matrice de Toeplitz symétrique correspondante

4 - Calcul du vecteur propre associé à sa plus petite valeur propre

Remarque : si la transformée en z d'une fenêtre $h(n)$ a toutes ses racines distinctes sur le cercle unité, on peut en déduire les éléments $g(n-k)$ d'une matrice de Toeplitz \mathbf{G} dont $h(n)$ est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre et par conséquent la fonction de coût $G(e^{j\omega})$ minimisée par cette fenêtre.

2.3. Cas particulier : la fenêtre de Papoulis

Dans le cas de la dispersion spectrale minimale des signaux échantillonnés définie en (6), le minimum de C_p est obtenu lorsque

$$\sum_{k=0}^N h(k) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos \omega(n-k) d\omega \right) = \lambda h(n) \tag{14}$$

pour $n = 0, \dots, N$. Le facteur de $h(k)$ est le coefficient de Fourier d'ordre k de $\sin^2(\omega/2)$: il vaut 1 lorsque $n-k = 0$, $-1/2$ lorsque $n-k = \pm 1$ et 0 pour les autres valeurs de $n-k$. La fenêtre optimale est alors un vecteur propre de la matrice de Toeplitz symétrique tridiagonale

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Les $N+1$ vecteurs propres de \mathbf{G}_p sont

$$\mathbf{H}_m = \left(\frac{2}{N+1} \right)^{1/2} \left[\sin \frac{m\pi}{N+2}, \dots, \sin \frac{m\pi(n+1)}{N+2}, \dots, \sin \frac{m\pi(N+1)}{N+2} \right]^T \tag{16}$$

pour $m = 1, \dots, N+1$. Ils sont associés aux valeurs propres

$$\lambda_m = 1 - \cos \frac{m\pi}{N+2} = 2 \sin^2 \frac{m\pi}{2(N+2)} \tag{17}$$

La plus petite de ces valeurs propres est obtenue lorsque $m = 1$ et vaut

$$\lambda = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(N+2)} \tag{18}$$

et le vecteur propre correspondant est

$$\mathbf{H}_p = \left(\frac{2}{N+1} \right)^{1/2} \left[\sin \frac{\pi}{N+2}, \dots, \sin \frac{\pi(n+1)}{N+2}, \dots, \sin \frac{\pi(N+1)}{N+2} \right]^T \tag{19}$$

C'est une arche de sinuséide longue d'une demi période [2],[3] et l'échantillonnée de la fenêtre "à moment énergétique minimal" de Papoulis [9].

Remarque : On peut discuter la contrainte qui impose l'énergie constante. Nous l'avons comparée à la contrainte choisie par Capon pour l'analyse spectrale à variance minimale [7]

$$\sum_{n=0}^N h(n) = 1$$

Dans ce cas, la fenêtre optimale vérifie

$$G'_{\mathbf{p}} \mathbf{H}'_{\mathbf{p}} = a (1, \dots, 1)^T \quad (21)$$

son n-ième échantillon est proportionnel à $(n+1) - \frac{(n+1)^2}{N+2}$ c'est une arche de parabole (la fenêtre de Rietz [3]) ressemblant fort à la fenêtre de Papoulis. On peut en conclure qu'une modification raisonnable de la contrainte ne modifie pas le résultat de manière significative.

2.4. Expression de la transformée en z de la fenêtre optimale

G étant Toeplitz, symétrique, définie positive, la séquence $\{h_1(0), \dots, h_1(N)\}$ déduite du vecteur propre \mathbf{H}_1 associée à sa plus petite valeur propre a une transformée en z dont toutes les racines sont sur le cercle unité [6]. Dans le cas particulier de la fenêtre de Papoulis $\{h_1(0), \dots, h_1(N)\}$ a pour transformée en z

$$H_p(z) = \frac{1 + z^{-N-2}}{1 - 2 \cos \frac{\pi}{N+2} z^{-1} + z^{-2}} \quad (22)$$

Les N+2 racines du numérateur sont $e^{j\frac{(2n+1)\pi}{N+2}}$ pour $n = 0, \dots, N+1$; les 2 racines du dénominateur sont $e^{j\frac{\pi}{N+2}}$ et $e^{j\frac{(2N+3)\pi}{N+2}}$; par conséquent les N racines de $H_p(z)$ sont $e^{j\frac{(2n+1)\pi}{N+2}}$ pour $n = 1, \dots, N$.

3. APPLICATIONS

3.1. Choix d'une fonction de coût

Le concepteur peut choisir une fonction $G(e^{j\omega})$ bien adaptée à un problème spécifique. On peut par exemple souhaiter éviter une diffusion dans un domaine $\alpha < \omega - \omega_0 < \beta$. et en accepter un dans $|\omega - \omega_0| < \alpha$. Alors

$$\begin{aligned} \text{pour } |\omega| < \alpha : G(e^{j\omega}) &= 0 \\ \text{pour } \alpha < \omega < \beta : G(e^{j\omega}) &= Q \text{ (grand)} \\ \text{pour } \beta < \omega < \pi : G(e^{j\omega}) &= 1 \end{aligned} \quad (23)$$

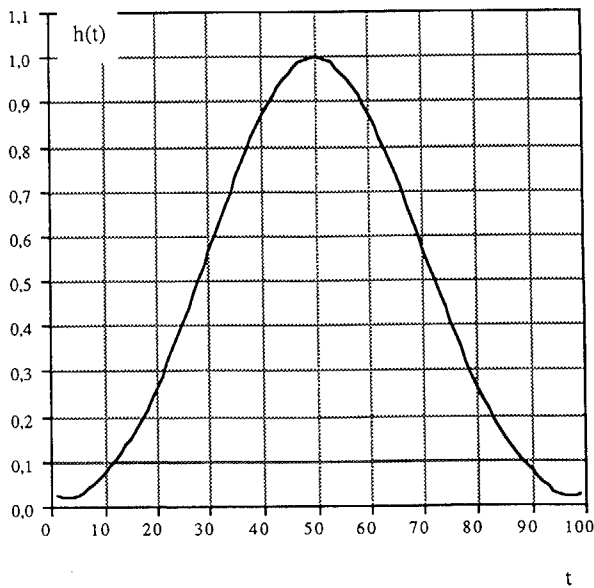


Fig. 1 : Fenêtre optimale d'après le critère (23-24)

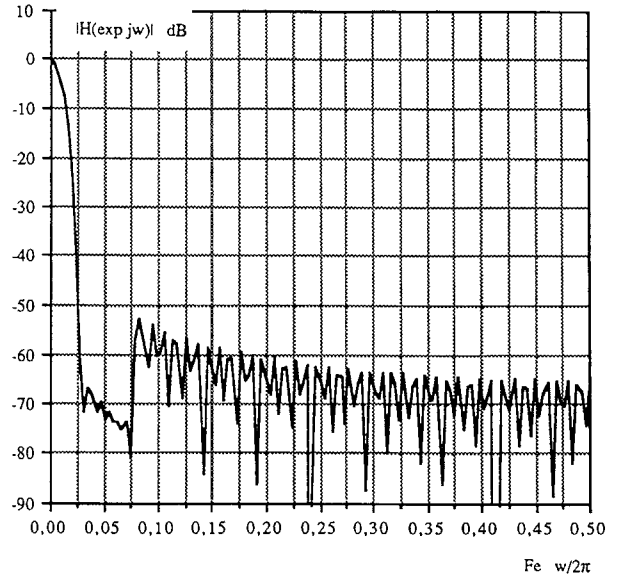


Fig. 2 : Module de la transformée de Fourier de la fenêtre représentée à la figure 1

et

$$g(n) = 1 + (Q-1) (\sin \beta n) / \pi n + Q (\sin \alpha n) / \pi n \quad (24)$$

La fenêtre correspondante est décrite dans les figures 1 et 2 pour $\alpha = \pi / 20$, $\beta = 3\pi / 20$ et $Q = 100$.

3.2. Supériorité de la fenêtre de Papoulis en analyse spectrale paramétrique

3.2.1. Comparaison des facteurs de dispersion de différentes fenêtres

Pour donner l'ordre de grandeur du facteur de dispersion de fenêtres classiques, le coût (6) a été calculé pour les fenêtres rectangulaire, demi-période de sinusoïde (Papoulis), Hamming et cosinus surélevé (Hann) pour une grande longueur de fenêtre. Les résultats sont respectivement

$$\frac{1}{N+1}, \frac{0.500 \pi^2}{(N+1)^2}, \frac{0.592 \pi^2}{(N+1)^2}, \frac{0.666 \pi^2}{(N+1)^2}$$

Comme on pouvait raisonnablement s'y attendre, la fenêtre rectangulaire est mauvaise tandis que les fenêtres classiques ont un bon facteur de dispersion proche du minimum.

3.2.2. Effet de la forme de la fenêtre en estimation spectrale paramétrique

Nous avons comparé les fenêtres dans le cas de la méthode de Pisarenko permettant de mesurer la fréquence de sinusoïdes en présence de bruit [11]. Nous avons étudié un cas où le rapport signal sur bruit était élevé (40 dB). Nous avons comparé quatre fenêtres $(\sin^0 \frac{n+1}{N+2} \pi)$, Papoulis $(\sin^1 \frac{n+1}{N+2} \pi)$, Hann $(\sin^2 \frac{n+1}{N+2} \pi)$ et $(\sin^3 \frac{n+1}{N+2} \pi)$. Le lobe principal de cette dernière fenêtre est proche de celui des fenêtres de Blackman ou de Kaiser-Bessel. Dans ce type de problème, l'effet essentiel d'une fenêtre est surtout dû à la largeur et à la forme de son lobe principal parce que l'énergie des lobes latéraux est suffisamment faible: plus ce lobe principal est large, plus le biais de l'estimation est important.



On remarque que la fenêtre rectangulaire donne une mauvaise estimation : le biais est nul mais la variance de la fréquence estimée est nettement plus grande que celle obtenue en utilisant les autres fenêtres. Les trois autres fenêtres introduisent un biais. On vérifie que le biais de l'estimateur de fréquence augmente avec la largeur du lobe principal ; par exemple, si on analyse une fréquence au tiers de la fréquence d'échantillonnage, pour une fenêtre de 128 échantillons, l'erreur quadratique moyenne obtenue en utilisant les différentes fenêtres est donnée par la table I :

fenêtre	\sin^0	\sin^1	\sin^2	\sin^3
EQM	150.	1.	1.75	2.5

Table I : effet de la forme de la fenêtre sur la fréquence estimée par la méthode de Pisarenko

Une autre technique d'estimation spectrale bien connue est la modélisation autorégressive. Nous avons aussi comparé les fenêtres dans ce cas. Le signal analysé était un bruit blanc filtré par un filtre du deuxième ordre sans zéros et comportant deux pôles proches du cercle unité. Le résultat de la modélisation confirme qu'un lobe principal large augmente le biais dans l'estimation des paramètres AR : il y a un décalage en fréquence comme dans l'estimation de Pisarenko et aussi un deuxième effet dû à la largeur du lobe principal : les pôles obtenus par modélisation sont plus éloignés du cercle unité. Ici encore, l'erreur quadratique entre la vraie valeur et la valeur estimée des paramètres montre la supériorité de la fenêtre de Papoulis (Table II).

fenêtre	\sin^0	\sin^1	\sin^2	\sin^3
EQM	1.9	1.	1.25	1.45

Table II : Effet de la forme de la fenêtre sur l'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif

4. EXTENSION AUX SIGNAUX BIDIMENTIONNELS

Les signaux bidimensionnels échantillonnés ont une transformée de Fourier bidimensionnelle périodique. La fonction de coût doit donc prendre en compte cette double périodicité. On est ainsi amené à définir une nouvelle forme de coût

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{ju}, e^{jv}) |H(e^{ju}, e^{jv})|^2 du dv \quad (25)$$

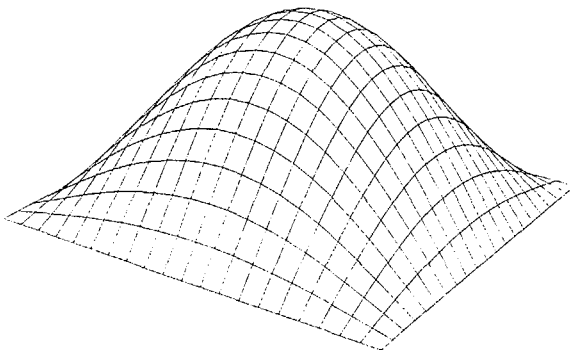


Fig. 3 : Fenêtre optimale bidimensionnelle (échantillonnage et support carrés)

et dans le cas de la dispersion spectrale minimale

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{u}{2} \cos^2 \frac{v}{2} \right) |H(e^{ju}, e^{jv})|^2 du dv \quad (26)$$

La fonction de pondération utilisée dans (26) généralise la fonction utilisée en (5) au cas des signaux bidimensionnels. Cette dernière forme permet d'obtenir une extension correcte de l'apodisation de Papoulis [10] dans le cas des signaux échantillonnés bidimensionnels. Alors, pour un échantillonnage à motif rectangulaire et pour un support rectangulaire, la meilleure fenêtre est un produit de deux fenêtres optimales mono-dimensionnelles. On peut aussi étendre l'approche à l'étude de fenêtres bidimensionnelles de forme complexe ainsi qu'aux motifs d'échantillonnage parallélogramme. Cette extension au cas des signaux bidimensionnels est détaillée dans [4].

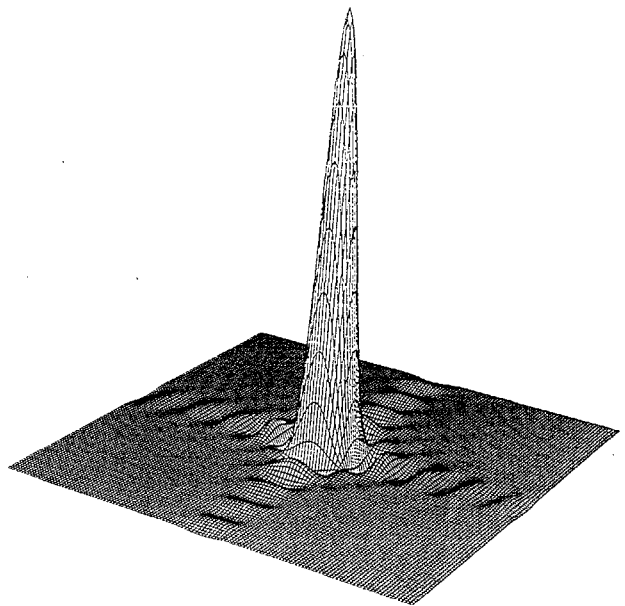


Fig. 4 : Transformée de Fourier de la fenêtre représentée à la figure 3.

- [1] N. C. Geçkinli and D. Yavuz, "Some novel windows and a concise tutorial comparison of windows families", IEEE Trans. on ASSP, vol. 26, n° 6, Dec. 1978, pp 501-507.
- [2] B. Gold and C. M. Rader, "Digital processing of signals", McGraw Hill, 1969.
- [3] F. J. Harris, "On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform", Proc. IEEE, vol. 66, Jan. 1978, pp 51-83.
- [4] J. Le Roux, "Weighting window optimization for classical 2D spectral analysis", Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. 2, 1991, pp 9-21.
- [5] J. Le Roux and J. Ménez, "A Cost Minimization Approach for Optimal Window Design in Spectral Analysis of Sampled Signals", IEEE trans. on Signal Processing, à paraître en avril 1992
- [6] J. Makhoul, "On the eigenvectors of symmetrical Toeplitz matrices", IEEE Trans. on ASSP, vol. 29, n° 4, 1981, pp 868-872.
- [7] S. L. Marple, "Digital spectral analysis with applications", Prentice Hall, 1987.
- [8] A. H. Nutall, "Some windows with very good sidelobe behaviour", IEEE Trans. on ASSP, vol. 29, n° 1, Feb. 1981, pp 84-91.
- [9] A. Papoulis, "Signal analysis", McGraw Hill, 1977.
- [10] A. Papoulis, "Apodization for optimum imaging of smooth objects", J. Opt. Soc. Am. vol. 62, n° 12, December 1972, pp 1423-1429.
- [11] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function", Geophysics J. of Astrosciences, vol. 33, 1973, pp 347-366.