

# La Spirale Discrète:

## Applications en Quantification Vectorielle et Modulation

Daoud Berkani, Ali Chékima et Jean-Pierre Adoul<sup>†</sup>

École Nationale Polytechnique, Alger, Algérie

<sup>†</sup>Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Québec) Canada

### RÉSUMÉ

Plusieurs problèmes de quantification et de modulation mettent en œuvre un ensemble indexé de points dans le plan. Il s'agit par exemple du jeu des vecteurs arrondis des valeurs possibles produites par un quantificateur vectoriel à deux dimensions ou du jeu des signaux d'un système de modulation dans le plan de phase. L'article étudie la spirale d'Archimède qui est une courbe paramétrée du plan telle, qu'en coordonnées polaires, le rayon croît proportionnellement à l'angle. La discrétisation de cette spirale par incréments d'angles constants permet de définir des ensembles finis de  $N$  points sur la base de deux paramètres de "design" et d'un facteur d'échelle. L'article relie certaines propriétés très variées de ces ensembles à la valeur particulière de l'incrément. La valeur des paramètres et la performance de bons quantificateurs pour la source Gaussienne sont tabulés pour des débits par variable compris dans la gamme de .5 à 4.5 bits par incréments de .5 bit. Les quantificateurs ainsi construits ne nécessitent pas le stockage de leurs vecteurs arrondis.

### ABSTRACT

Several problems in quantization or modulation make use of an indexed set of points in the plane. For instance, this could be the set of possible output vectors of a two-dimensional vector quantizer or this could be the signal set in the phase/quadrature plane for a modulation system. The article studies the spiral of Archimedes which is a parametrized curve in the plane such that, in polar coordinates, the radius increases linearly with the angle. The discrete points along this spiral obtained by constant angle increments yield finite sets of  $N$  points defined by two design parameters and a scaling factor. The article relates a variety of properties of these point sets to special values of the angular increment. The value of the parameters as well as the performance of the corresponding quantizer are given in a table for good quantizers for the Gaussian source operating at rates, per real variable, ranging between .5 and 4.5 bits in increments of .5 bit. Vector quantizers designed in this manner do not necessitate storage of their rounded vectors.

## I - INTRODUCTION

Plusieurs problèmes de quantification vectorielle rencontrés dans le codage de la parole ou de l'image ainsi que dans les problèmes de transmission numériques mettent en œuvre un ensemble de signaux. Il s'agit par exemple du jeu des vecteurs possibles d'un quantificateur ou du jeu des signaux possibles d'un système de modulation. Cet article considère le problème du "design" de bons quantificateurs vectoriels à deux dimensions pour la source Gaussienne. Rappelons qu'un quantificateur vectoriel est une fonction,  $y = Q(x)$ , qui à tout vecteur,  $x$ , fait correspondre un vecteur,  $y$ , tiré d'une collection finie de vecteurs,  $Q$ . Ce vecteur arrondi,  $y$ , est choisi de telle sorte à minimiser une distance  $d(x,y)$  prédéfinie. Le problème du design de bons quantificateurs pour la source Gaussienne a déjà reçu assez d'attention [1-5] avec le développement de quantificateurs dit "polaires" dans lesquels le rayon et la phase du vecteur sont quantifiés séparément. La résolution de la phase étant fonction de la valeur quantifiée du rayon. Ici nous introduisons une nouvelle technique de "design" qui présente plusieurs avantages intéressants. Cette technique est basée sur la discrétisation de la spirale d'Archimède.

## II - SPIRALE D'ARCHIMEDE DISCRÉTISÉE

La spirale d'Archimède est une courbe du plan qui se décrit très simplement sous la forme d'une fonction complexe,  $S(\varphi) = u(\varphi) + j v(\varphi)$ , d'une seule variable réelle,  $\varphi$ . Cette fonction est la suivante.

$$S(\varphi) = \varphi e^{j\varphi} \quad (1)$$

Considérons la collection finie,  $Q$ , définie de la façon suivante à partir de quatre paramètres.

$$Q(\Delta\varphi, \varphi_0, G, N) = \{y_n | y_n = GS(\varphi_0 + n\Delta\varphi); n = 0, 1, \dots, N-1\} \quad (2)$$

$N$  est la taille (ou la cardinalité) de la collection. Les vecteurs,  $y = y_n$ , sont obtenus par échantillonnage de la spirale d'Archimède par incrément de  $\Delta\varphi$  à partir de l'angle de départ,  $\varphi_0$ . L'entier,  $n$ , fournit une façon naturelle d'indexer la collection. Enfin,  $G$  est un facteur d'échelle. Afin de réduire l'interdépendance de ce facteur avec les deux autres paramètres d'angles on le normalise par rap-



port au plus grand rayon échantillonné sur la spirale. Cela conduit au facteur d'échelle réduit,  $g$ , entrant dans la relation suivante.

$$G = g[\varphi_0 + (N-1)\Delta\varphi] \quad (3)$$

C'est cette forme réduite du facteur d'échelle que nous considérerons dans l'analyse qui suivra.

Pour une taille,  $N$ , donnée on obtient une riche variété de collections possibles. La figure ci-dessous donne quatre exemples de spirales discrétisées pour des collections de taille 128, avec  $\varphi_0=29$ ,  $g = 153$  et pour diverses valeurs de  $\Delta\varphi$ , le paramètre le plus important. Le cercle unité est également tracé.

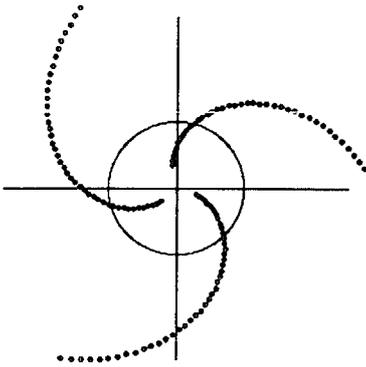


Fig. 1a:  $\Delta\varphi = 2.08$

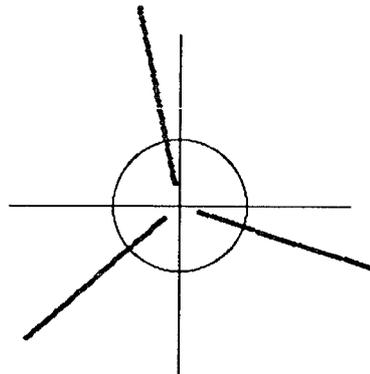


Fig. 1b:  $\Delta\varphi = 2\pi/3 = 2.0944$

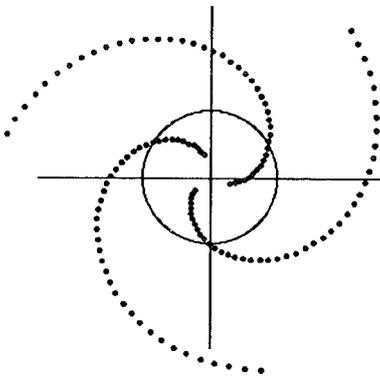


Fig. 1c:  $\Delta\varphi = 2.12$

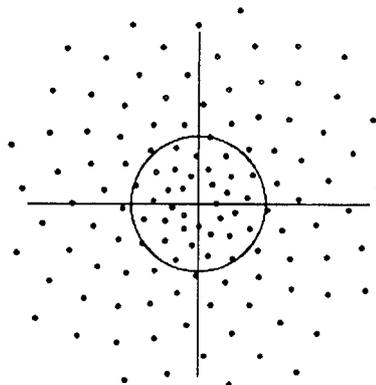


Fig. 1d:  $\Delta\varphi = 2.40$

Lorsque l'incrément  $\Delta\varphi$  prend une valeur du type  $2\pi/m$  avec  $m$  petit ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) la spirale discrète apparaît comme une étoile simple à  $m$  branches (fig. 1b,  $m=3$ ). A proximité d'une telle valeur, les  $m$  branches apparaissent s'enrouler dans le sens négatif (fig 1a:  $\Delta\varphi = 2\pi/m - \varepsilon$ ) ou dans le sens positif (fig 1c:  $\Delta\varphi = 2\pi/m + \varepsilon$ ). Lorsque  $\Delta\varphi$  évolue dans l'intervalle  $2\pi/m, 2\pi/(m-1)$  nous allons de  $m$  branches vers  $m-1$  branches en passant par une variété d'états intermédiaires comme celui de  $2m$  branches plus clairsemée à  $4\pi/(2m-1)$  ainsi que de splendides arrangements comme celui de la figure 1d dans lesquels il est difficile de décider si les multiples branches clairsemées s'enroulent dans le sens positif ou négatif. Il est clair que ces différents types de spirales discrètes utilisées comme quantificateurs pour la source Gaussienne conduiront à des performances très variées. Nous allons faire une ana-

lyse des trois paramètres de "design" pour une taille donnée pour déterminer l'art et la manière de construire des quantificateurs performants (cette étude est aussi utile pour ce qui est du "design" de jeux de signaux pour les techniques de modulation).

### III - LA SOURCE GAUSSIENNE

Considérons la source Gaussienne discrète produisant une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées selon la loi normale. Nous groupons deux à deux ces variables pour former les parties réelle & imaginaire d'une suite équivalente de variables complexes (on pourrait aussi bien traiter ces paires comme vecteurs à deux dimensions). Soit,  $x$ , une telle variable complexe et  $y$  la valeur quantifiée en prenant pour critère la distance Euclidienne carrée ou, ce qu'on appelle aussi l'erreur quadratique.

$$y = Q(x) \quad (4)$$

$$= y_n \text{ tel que } |y_n - x|^2 = \min_{y \in Q} |y - x|^2$$

Notre but est de déterminer des collections de la famille

$$Q = Q(\Delta\varphi, \varphi_0, G, N)$$

qui vont conduire aux plus petites distances moyennes ou, si on exprime les performances en déciBell, au plus forts rapports signal à bruit  $D$ . Nous avons.

$$\sigma_e^2 = E\{|Q(x) - x|^2\} / 2 \quad (5)$$

$$D = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) ; \text{ où } \sigma_x^2 = E\{|x|^2\} / 2$$

$$= -20 \log_{10} \sigma_e^2 ; \text{ puisque } \sigma_x^2 = 1$$

Une collection de taille  $N$  conduit à un débit de

$$R = \log_2(N) / 2 \quad (6)$$

bits par variable réelle pour représenter en binaire l'indice  $n$  résultant de la quantification. Pour un débit (ou une taille) donné(e) la performance,  $D$ , d'un quantificateur est bornée. Shannon a montré que cette borne est la suivante.

$$D \leq D(R) = 20 \log_{10} 2^R = 6.03R \quad (7)$$

Ainsi pour un débit,  $R$ , donné, la performance d'un quantificateur sera comparée à cette limite supérieure.

### IV - OPTIMISATION DES PARAMETRES

Nous nous tournons maintenant vers l'analyse de la performance  $D$  en fonction de la valeur des paramètres de design. Nous illustrons le cas de la taille  $N = 16$ . La figure

ci-dessous donne D (soit le RSB en dB) en fonction de  $\Delta\phi$  pour différentes valeurs du facteur d'échelle réduit.

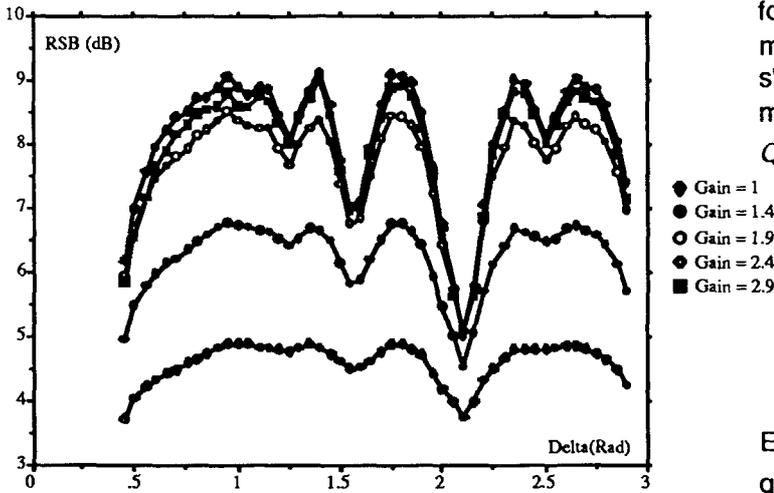


Figure 2: Performances en dB versus  $\Delta\phi$  d'un quantificateur de taille 16 pour différents gains réduits, g.

On observe une chute de performance pour  $\Delta\phi = 2\pi/m$  avec  $m = 3$ , la plus sérieuse,  $m = 4, 5$ , c'est à dire quand la spirale discrète apparaît comme une étoile simple à m branche. La figure 2 confirme que le gain est un paramètre indépendant quant aux performances et qu'il peut donc être optimisé séparément. Enfin on constate qu'il y a une multitude de bons quantificateurs ayant tous des performances similaires. Ces quantificateurs correspondent aux situations où la spirale discrète couvre l'espace sous la forme d'un lattis assez régulier comme dans le cas de la figure 1d.

Tournons nous maintenant vers l'optimisation du couple  $g, \phi_0$  toujours pour une taille 16 et une valeur performante de  $\Delta\phi$ .

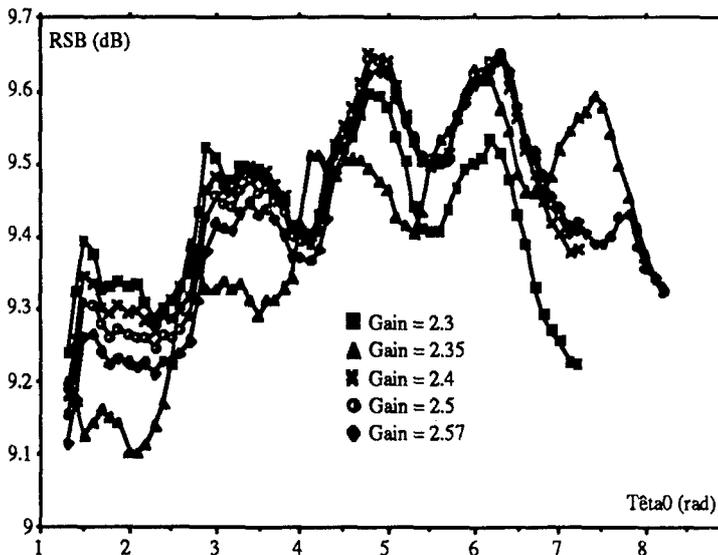


Figure 3: Performances versus  $\phi_0$  pour diverses valeurs du gain réduit, g.

Les deux paramètres doivent être optimisés conjointement pour conduire au meilleur résultat. Terminons cette section avec quelques remarques sur la

région d'optimisation. La distribution Gaussienne est à symétrie circulaire, c'est à dire que la distribution conditionnelle de la phase, connaissant le module, est uniforme. Il s'en suit que deux quantificateurs,  $Q$  et  $Q'$ , de même taille seront équivalents vis à vis des performances s'ils ne diffèrent que par une rotation et/ou une symétrie miroir. Ainsi, on peut vérifier que les quantificateurs,  $Q'$  et  $Q''$ , suivants sont équivalents à  $Q$ ,

$$Q = Q(\Delta\phi, \phi_0, G, N) \text{ est équivalent à:} \quad (8)$$

$$Q' = Q(-\Delta\phi, -\phi_0, G, N) \text{ (symétrie miroir)}$$

$$Q'' = Q(\Delta\phi + 2k\pi, \phi_0'', G'', N) \text{ avec } \frac{G}{G''} = \frac{\phi_0''}{\phi_0} = \frac{\Delta\phi + 2\pi}{\Delta\phi}$$

En combinant les propriétés de  $Q$  et  $Q'$  on peut voir aussi que des incréments  $\Delta\phi$  et  $2\pi - \Delta\phi$  conduisent à des quantificateurs équivalents une fois accomplie l'optimisation du couple  $g, \phi_0$ .

Ainsi, si l'on souhaite faire la recherche du quantificateur optimal de taille  $N$  par un algorithme, du type gradient par exemple, on peut réduire l'espace de recherche sans perte de généralité à la région suivante.

$$\begin{aligned} 0 < \Delta\phi &\leq \pi \\ 0 < g &< g_{\max} \\ -\left(\frac{N}{2}\right)\Delta\phi &< \phi_0 < \phi_{0\max} \end{aligned} \quad (9)$$

Où  $g_{\max}$  et  $\phi_{0\max}$  sont des quantités raisonnablement grandes.

## V - RESULTATS

Voici les performances de quelques bons quantificateurs basés sur les spirales discrètes pour des débits allant de .5 à 4.5 bits par variable réelle et par incréments de .5 bit, soit, des tailles de  $2^k$  pour  $k = 1, 2, 3, \dots 9$ .

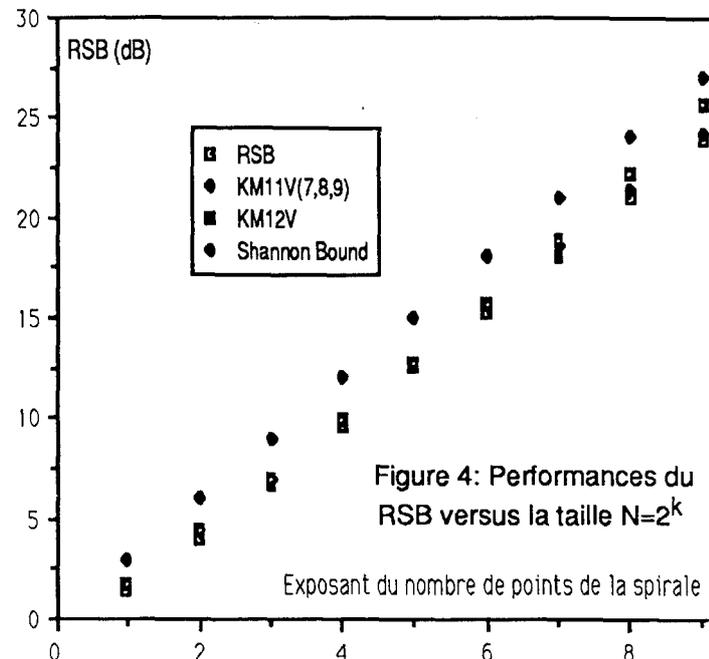


Figure 4: Performances du RSB versus la taille  $N=2^k$



R	$\Delta\phi$	$\phi_0$	g	RSB	Kmy
.5	3.3	1.39	1.2	1.477	1.757
1	4.08	8	1.59	3.97	4.47
1.5	3.8	10.2	2.02	6.73	6.91
2	1.4	6.3	2.4	9.65	9.895
2.5	2.41	13.87	2.64	12.53	12.78
3	5.3	43	2.4	15.26	15.69
3.5	2.6	29	3.06	18.11	18.90
4	1	15.99	3.14	20.99	22.17
4.5	1	19.5	3.25	23.91	25.77

Table de résultats pour la spirale discrète

Les performances en dB sont données pour un bon quantificateur spirale défini à chacun des débits, par variable réelle, considérés. La performance est comparée à ce que donne le quantificateur optimisé par l'algorithme dit de K-moyenne [6] c'est à dire en relâchant toutes contraintes sur la position des points.

#### Spirale discrète avec point supplémentaire à l'origine:

On définit une deuxième famille de quantificateur en ajoutant systématiquement l'origine. Plus précisément, on définit la construction  $Q_v()$  comme suit

$$Q_v = Q_v(\Delta\phi, \phi_0, G, N) = \mathbf{0} \cup Q(\Delta\phi, \phi_0, G, N-1)$$

Où,  $\mathbf{0}$ , représente l'origine (nombre complexe 0). Remarquons que  $\mathbf{0}$  n'a pas besoin d'être stocké comme un paramètre et que le calcul de la distance d'un point donné à l'origine est en général plus simple qu'à tout autre point. Par ailleurs, les considérations de symétrie données par les équations (8) pour définir des quantificateurs équivalents s'appliquent tout autant aux quantificateurs du type  $Q_v$ . Le tableau ci-dessous montre une petite amélioration des performances à hauts débits.

R	$\Delta\phi$	$\phi_0$	g	RSB	Kmy
.5	1.4	1.39	1.27	1.13	1.757
1	1.51	18.4	1.51	3.93	4.47
1.5	2.04	14	2.04	6.71	6.91
2	2.4	6.2	2.4	9.65	9.895
2.5	2.66	11.5	2.66	12.41	12.70
3	2.82	43	2.82	15.31	15.69
3.5	3.05	40.5	3.05	18.15	18.87
4	3.19	25	3.19	21.03	22.14
4.5	3.27	24.5	3.27	23.93	25.83

Table de résultats pour la spirale discrète avec point supplémentaire à l'origine

#### Spirale discrète avec $\phi_0$ nul:

Finalement, on considère aussi le cas où l'angle de départ est toujours nul. Il s'agit d'un cas particulier de la spirale discrète initiale. En fixant ce paramètre on réduit la spécification du quantificateur à un seul paramètre de design et un facteur d'échelle. La baisse de performance est assez faible.

R	$\Delta\phi$	$\phi_0$	g	RSB	Kmy
.5	1.4	0	1.28	1.13	1.754
1	4.08	0	1.8	3.4	4.32
1.5	3.8	0	2.25	6.19	6.94
2	1.4	0	2.569	9.18	9.88
2.5	1.86	0	2.61	12.01	12.56
3	5.3	0	2.88	14.93	15.57
3.5	2.6	0	3.0	17.88	18.58
4	1	0	3.1	20.76	22.01
4.5	1	0	3.2	23.72	25.67

Table de résultats pour la spirale discrète pour laquelle l'angle de départ,  $\phi_0$ , est fixé à 0.

## VI - CONCLUSION

Une forme de discrétisation de la spirale d'Archimède a été proposée. Elle permet de définir des ensembles de points pour le "design" de quantificateurs à deux dimensions. Quelle que soit la taille visée, un tel quantificateur peut être défini par seulement deux paramètres réels et un facteur d'échelle évitant ainsi le stockage des vecteurs arrondis. Certaines valeurs des paramètres conduisent à de bons quantificateurs pour la source Gaussienne.

## VII - REFERENCES

- [1] J-P. Adoul, "la quantification vectorielle des signaux: approche algébrique", Annales des Télécommunications, vol. 41, 1986.
- [2] W.A. Pearlman, "Polar quantization of a complex random variable", IEEE Trans. on Communications, vol. COM-27 pp 892-899, June 1979.
- [3] S.G. Wilson, "Magnitude/Phase quantization of independent Gaussian variates", IEEE Trans. on Communications, vol. COM-28, pp 1924-1929, Nov. 1980.
- [4] P.F. Swaszek and J.B. Thomas, "Optimal circularly symmetric quantizers", J. Franklin Inst., vol. 313, pp 272-384, June 1982.
- [5] P.F. Swaszek and T. Ku, "Asymptotic performance of unrestricted polar quantizers", Proc. of the 1984 Conference on Information Sciences and Systems, pp 581-586, March 1984, Princeton University.
- [6] J.T. Tou & R.C. Gonzalez, "Pattern Recognition Principles" Addison-Wesley, 1974