



CHAOS DANS UN SYSTEME DE TRANSMISSION MICDIF

C. UHL*, D. FOURNIER-PRUNARET**, O. MACCHI*, C. MIRA**

*Laboratoire des Signaux et des Systèmes, E.S.E.- C.N.R.S., Plateau de Moulon
91190 GIF SUR YVETTE, FRANCE

* GDR Traitement du Signal et Images

**INSA, Avenue de Rangueil, 31077 TOULOUSE, FRANCE

Résumé. Nous étudions dans cet article l'existence de phénomènes chaotiques dans le système de transmission MICDIF. Le couplage entre la quantification non linéaire et la prédiction au codeur rend celui-ci récursif et non linéaire même lorsque la prédiction est transverse; le codeur a une boucle de contre réaction qui contient un filtre linéaire récursif \mathcal{R} . En nous limitant à un prédicteur transverse d'ordre 1, nous déterminons la structure de bifurcations de l'équation d'état du codeur et nous montrons que le signal de sortie du codeur peut être chaotique même si la condition de stabilité de \mathcal{R} est vérifiée.

Abstract. In this paper the existence of chaotic phenomena in the DPCM transmission system is studied. The coupling at the encoder between the nonlinear quantization and the prediction makes the encoder recursive even if the prediction is transversal; the encoder has a feedback loop which is a recursive linear filter \mathcal{R} . For an order 1 transversal predictor, the bifurcations structure of the encoder state equation is determined. It is proven that, the encoder output signal may be chaotic even if the stability condition of \mathcal{R} is satisfied.

I. INTRODUCTION : LE SYSTEME MICDIF

Le chaos est un phénomène non linéaire engendré par un mécanisme purement déterministe. Il se manifeste par un signal de sortie dont la variation a une allure erratique mais dont certaines caractéristiques le distinguent cependant d'un phénomène de bruit. Une particularité importante d'un système, siège de phénomènes chaotiques, est sa très grande sensibilité aux conditions initiales. Des états initiaux très voisins engendrent rapidement des états associés au même instant, très différents; d'où l'impossibilité de prédire l'évolution d'un système en situation chaotique.

Le système que nous étudions est un système de transmission MICDIF (modulation par impulsion et codage différentiel) utilisé pour le codage numérique d'un signal téléphonique d'entrée s . Une réduction de débit est obtenue en partie grâce à la prédiction: un signal prédit x_n est calculé à partir du passé de s_n et permet de ne conserver que l'innovation du signal:

$$e_n = s_n - x_n \quad (1)$$

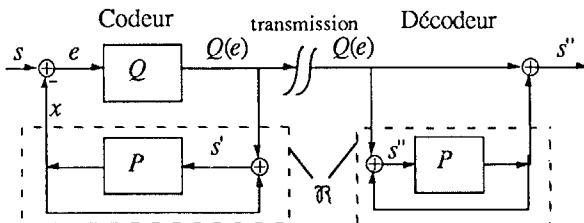


Fig. 1 : Schéma du système de transmission MICDIF

Pour une autre partie, la réduction de débit provient du couplage entre la prédiction P et la quantification Q qui est une fonction non linéaire instantanée appliquée à l'innovation (voir la fig. 1). Il en résulte que:

- d'une part, le prédicteur P (de sortie x) a pour entrée le signal reconstitué à partir de l'innovation quantifiée, c'est-à-dire:

$$s'_n = x_n + Q(e_n) \quad (2)$$

Soit \mathcal{R} le filtre dont l'entrée est $Q(e)$ et la sortie x , $\mathcal{R} = P/(1 - P)$
- d'autre part, le codeur (d'entrée s , de sortie $Q(e)$) est récursif, même si P est transverse. Il est évidemment non linéaire. Tous les ingrédients sont présents pour qu'il y ait du chaos. On

voit sur la fig. 1 que le codeur est une boucle avec Q (non linéaire) dans la partie directe et \mathcal{R} (linéaire récursif) dans la voie de retour.

Le système de transmission est constitué du codeur précédent qui transmet $Q(e)$ et d'un décodeur qui fait approximativement l'inverse du codeur et fournit à partir de $Q(e)$ un signal de sortie s'' aussi proche que possible de $s = x + e$. Le décodeur ne dispose pas de e , le mieux qu'il puisse reconstituer est $s' = x + Q(e)$. C'est la structure bouclée de la fig. 1 qui assure la meilleure réduction de débit pour une puissance donnée du bruit de décodage $s'' - s$ [J1].

Au codeur, le signal reconstitué s'_n est, d'après (2) et la fig. 1 une combinaison linéaire de $Q(e_n)$, des échantillons passés de s'_n et de $Q(e_n)$ selon:

$$s'_n = Q(e_n) + \sum_{i=1}^t a_i s'_{n-i} + \sum_{j=1}^r b_j Q(e_{n-j}), \quad (3)$$

les a_i ($i = 1$ à t) et les b_j ($j = 1$ à r) étant les coefficients de prédiction transverses et récursifs. Donc s'_n est déterminé linéairement à partir de la suite $Q(e_j)$, $j = 0, \dots, n$, et des valeurs initiales s'_i , $i = 0$ à $t - 1$.

Si il n'y a pas d'erreur de transmission, le décodeur dispose de la suite $Q(e_j)$, $j = 0, \dots, n$. Le signal reconstitué s'' au décodeur est aussi calculé par (3). Si les valeurs initiales des signaux reconstitués s' et s'' sont égales, alors, à chaque instant $n > t$, $s'_n = s''_n$. Le système fonctionne correctement. Si le système est en situation chaotique des valeurs initiales différentes de s' et de s'' peuvent engendrer deux suites s'_n et s''_n très différentes, après quelques dizaines d'itérations. Il s'ensuit un important bruit de décodage. Le chaos est donc néfaste dans un système de transmission. Il faut déterminer les paramètres du codeur pour lesquels le système est en situation chaotique afin de les éviter. Tel est l'objet de cet article. On se restreint à un prédicteur transverse d'ordre 1, de coefficient de prédiction a . Cette étude est déjà complexe mais elle suffit pour comprendre le comportement de prédicteurs d'ordre supérieur.

II. LA RECURRENCE DU SYSTEME

Le signal prédit est d'après (2) et (3):

$$x_{n+1} = a s'_n = a (x_n + Q(e_n)) \quad (4)$$

Le filtre linéaire récursif \mathcal{R} a pour fonction de transfert:



$$R(z) = a z^{-1} / (1 - a z^{-1}); \tag{5}$$

il est stable si et seulement si:

$$|a| < 1 . \tag{6}$$

Une première étape est l'analyse de la stabilité du codeur au sens entrée s_n bornée implique signal prédit x_n borné. Ce travail a été réalisé dans [M1]. Nous y avons montré que le signal x_n ne diverge que si le quantificateur est saturé. La discontinuité du quantificateur ne conduisant pas à l'instabilité, elle est négligée et le quantificateur est modélisé par la caractéristique continue de compression avec une saturation:

$$Q(e) = \text{th } p e, p > 1 . \tag{7}$$

La pente p à l'origine est le gain de compression qui est pris plus grand que 1 pour augmenter le rapport signal e sur bruit de quantification lorsque e est faible.

Nous avons prouvé que la condition de stabilité du filtre \mathcal{R} , n'est pas une condition nécessaire pour la stabilité du codeur; nous y reviendrons.

Dans la suite, l'entrée s_n est supposée constante ($s_n = s$).

D'après (1), (4) et (7) l'équation du codeur est:

$$x_{n+1} = f(x_n); \quad f(x) \triangleq ax + a \text{ th } p(s - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

la variable d'état du codeur étant x_n . La fonction f est non linéaire et paramétrée par a, s et p .

Le comportement du codeur est entièrement déterminé, dans le plan de phase (x_n, x_{n+1}) , par la configuration formée par la courbe $C_{a,s}$ d'équation (8) et de la bissectrice d'équation $x_{n+1} = x_n$. La courbe $C_{a,s}$ a deux extrema A et A' car $p > 1$. L'allure générale de $C_{a,s}$ est montante (resp. descendante) pour $a > 0$ (resp. $a < 0$). De plus $C_{a,s}$ a deux asymptotes indépendantes de s : $x_{n+1} = ax_n - a$, pour $x_n \rightarrow +\infty$ et $x_{n+1} = ax_n + a$, pour $x_n \rightarrow -\infty$; $C_{a,s=0}$ est symétrique par rapport à 0; $C_{a,s}$ et $C_{a,-s}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à 0. Nous pouvons ainsi restreindre notre étude à s positif, sans perte de généralité. De plus considérons dans cet article le cas d'un coefficient de prédiction a positif. Le cas a négatif est traité dans [U1]. La famille de courbes $C_{a,s}$ est illustrée, fig. 2, pour a fixé et $s \geq 0$ variable. La valeur particulière s_1 , est définie en (15).

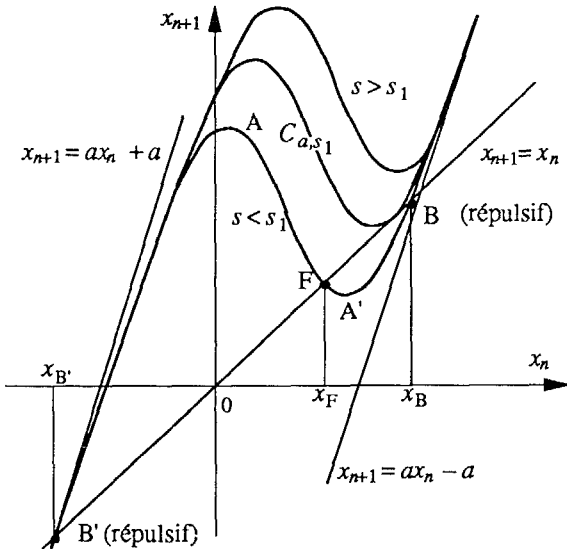


Fig. 2 : La famille de courbes $C_{a,s}$ pour $a > 1$ fixé

III. DEFINITIONS GENERALES

Un réel x est un **point fixe** de f si et seulement si :

$$x = f(x); \tag{9}$$

(x, x) est un point fixe de $C_{a,s}$. C'est l'intersection entre $C_{a,s}$ et la première bissectrice.

La **fonction composée d'ordre k** de f est définie par :

$$f_k(x) = f(f_{k-1}(x)), \quad f_1(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} . \tag{10}$$

Le conséquent de rang k de x est $f_k(x)$.

Une **fonction inverse d'ordre k** de f est définie par :

$$f_{-k}(x) = f_{-1}(f_{-(k-1)}(x)), \text{ avec } f_{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{11}$$

f_{-k} n'est pas unique. Un **antécédent de rang k** de x est $f_{-k}(x)$; x peut avoir un ou trois antécédents de rang 1.

Une suite de k points x_1, x_2, \dots, x_k , forme un **cycle d'ordre k** de f si et seulement si pour tout $i = 1$ à k :

$$\begin{cases} f_k(x_i) = x_i \\ \forall j = 1 \text{ à } k - 1 : f_j(x_i) \neq x_i, x_{j+1} = f(x_j) \\ x_1 = f(x_k) \end{cases} \tag{12}$$

D'après le théorème des fonctions composées, pour tout $i = 1$ à k :

$$S = f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_k) = (f_k)'(x_i); \tag{13}$$

S est par définition le **multiplicateur** du cycle correspondant de f d'ordre k . C'est la pente en tout point du cycle, de la courbe $x_{n+k} = f_k(x_n)$ dans le plan (x_n, x_{n+k}) . Le cycle est **attractif** si $|S| < 1$, il est **répulsif** si $|S| > 1$. Lorsque la récurrence (8) est itérée, c'est ce qui est attractif, qui est visible.

Par définition, un point de la courbe $C_{a,s}$ est un **point critique** de rang k si son abscisse est le conséquent de rang k de l'abscisse d'un extremum de la courbe. On notera C_k (resp. C'_k) le point critique de rang k issu de A (resp. A').

IV. ETUDE DES BIFURCATIONS DU CODEUR

Une bifurcation est un changement qualitatif de comportement du système sous l'effet de la variation infinitésimale d'un paramètre. L'étude du chaos dans le codeur peut se faire en déterminant la structure de bifurcations de la récurrence (8) dans le plan (a, s) pour p fixé. Celle-ci est fractale de type boîtes emboîtées [M2], [F1]. Nous indiquons ci-dessous les bifurcations jouant un rôle essentiel dans la définition de cette structure.

Les points fixes de $C_{a,s}$ sont importants dans la structure de bifurcations de (8). La courbe $C_{a,s}$ a au moins un, au plus trois points fixes $B' = (x_{B'}, x_{B'})$ et $B = (x_B, x_B)$ de multiplicateur positif, $F = (x_F, x_F)$ de multiplicateur négatif avec:

$$x_{B'} \leq x_F \leq x_B . \tag{14}$$

L'évolution des points fixes est différente suivant que $a > 1$ ou $a \leq 1$. Nous distinguons les deux cas.

Bifurcation de type 1: naissance de cycles (fig. 2)

1^{er} cas : $a > 1$. Pour $s > s_1$, $C_{a,s}$ a un unique point fixe B' . Pour $s = s_1$, $C_{a,s}$ devient tangente à la première bissectrice. Pour $s = s_1 - \epsilon$ ($0 < \epsilon \ll 1$), deux autres points fixes F et B apparaissent; F est attractif ($-1 < f'(x_F) < 0$); B est répulsif ($f'(x_B) > 1$). Une bifurcation de ce type peut également survenir pour la fonction composée f_k . Il y a alors apparition de deux cycles d'ordre k , l'un attractif, l'autre répulsif. L'ensemble des couples (a, s) pour lesquels a lieu cette bifurcation est noté Γ_k .

On peut montrer [U1] que $C_{a,s}$ a trois points fixes ssi:

$$s < s_1(a), \quad a > 1, \tag{15a}$$

$$s_1(a) \triangleq \frac{a}{a-1} \sqrt{1 - \frac{a-1}{a p}} - \frac{1}{p} \text{Argth} \sqrt{1 - \frac{a-1}{a p}} > 0. \tag{15b}$$

Dans le plan des paramètres (a, s) , la courbe Γ_1 a pour équation $s = s_1(a)$, elle est décroissante.

2^{ème} cas : $0 < a \leq 1$; $C_{a,s}$ a un unique point fixe B' ou F suivant la valeur de s . Il n'y a pas de bifurcation de type 1.

Bifurcation de type 2: doublement de période

1^{er} cas : $a > 1$. Lorsque s décroît à partir de s_1 , $f'(x_F)$ décroît à partir de 1. Il existe donc un point fixe attractif et pour n assez grand x_n est constant.

Si $a > 1/(p-1)$, pour $s = s_2 < s_1$, $f'(x_F)$ passe par la valeur -1 (cf. fig. 3). Pour $s < s_2$, le point fixe F devient répulsif et engendre un cycle d'ordre 2 attractif. Ainsi x_n tend vers un régime

périodique de période 2. Il y a donc doublement de période (ou encore division de fréquence) lors de la traversée de cette bifurcation. La valeur de s_2 est fonction de a selon:

$$s_2(a) \triangleq \frac{a}{a-1} \sqrt{1 - \frac{a+1}{ap} - \frac{1}{p} \operatorname{Argh} \sqrt{1 - \frac{a+1}{ap}}}; \quad (16)$$

$s_2(a)$ est positif pour $a > \operatorname{Sup}(1/(p-1), 1)$.

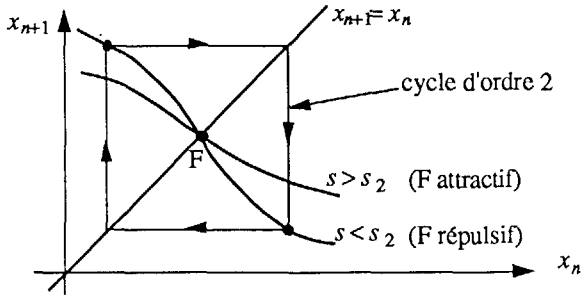


Fig. 3 : Bifurcation de type 2: doublement de période

Si $a < 1/(p-1)$, cette bifurcation n'a pas lieu et le point fixe F reste stable.

2^{ème} cas : $0 < a \leq 1$; un cycle d'ordre 2 apparaît par bifurcation de F pour $s = -s_2(a) > 0$, uniquement pour:

$$p > 2, \quad 1/(p-1) < a < 1. \quad (17)$$

Dans le plan (a, s) , soit Γ_2 la courbe où se produit le doublement de période.

Lorsque s décroît à partir de $s_2(a)$ pour $a > \operatorname{Sup}(1/(p-1), 1)$ et $-s_2(a)$ pour $1/(p-1) < a < 1$, le multiplicateur du cycle d'ordre 2 décroît à partir de 1. Il peut passer par -1 si a est assez grand. Soit Γ_{22} la courbe correspondante. Le cycle d'ordre 2 devient répulsif et il apparaît un cycle d'ordre 4 attractif, qui à nouveau peut subir une bifurcation de type 2, et ainsi de suite. Il s'ensuit une cascade de doublements de période: pour $(a, s) \in \Gamma_{2^{i+1}}$, un cycle d'ordre 2^i attractif bifurque en devenant répulsif et il naît un cycle attractif d'ordre 2^{i+1} , pour $i = 1$ à ∞ . Il a été montré [M2] que les courbes de bifurcations Γ_{2^i} ont une courbe d'accumulation $\Gamma_\infty \triangleq (a_\infty(s), s)$

qui délimite la région où il existe une infinité de cycles répulsifs.

L'existence de phénomènes chaotiques est directement liée à cette infinité de cycles répulsifs qui lui confère un aspect erratique, typique de signaux déterministes chaotiques. Donc Γ_∞ est la première courbe, pour laquelle il y a du chaos. Celui-ci est soit stable (attracteur étrange), soit instable (transitoire chaotique).

Immédiatement après la valeur $a_\infty(s)$ il existe un grand nombre de segments décrits de manière cyclique, appelés segments absorbants. Le point x_n passe régulièrement de l'un à l'autre, avec une valeur irrégulière dans chacun (voir [M2]), ce qui correspond encore à du chaos. Pour des valeurs plus grandes de a , on peut retrouver des cycles attractifs.

La cascade de ces bifurcations a été décrite ci-dessus pour la fonction f . Elle survient également pour la fonction composée f_k d'ordre k . Dans ce cas on obtient une cascade de doublements de période avec à chaque étape apparition d'un cycle d'ordre $k \cdot 2^{i+1}$ attractif, à partir d'un cycle d'ordre $k \cdot 2^i$ qui devient répulsif.

Des bifurcations non classiques où des points critiques sont confondus avec un point fixe répulsif ou avec les points d'un cycle répulsif jouent un rôle essentiel dans la structure de bifurcations de la récurrence (8) en définissant une frontière de boîte. Deux types particuliers (3 et 4) sont décrits ci-dessous. Chaque type correspond à deux bifurcations, l'une due à la position des points critiques issus de A, l'autre à la position de ceux issus de A'.

Bifurcation de type 3: limite d'apparition de cycles d'ordre impair

Le premier type de bifurcation est celui pour lequel un point critique de rang 2 (C_2 ou C'_2) est confondu avec le point fixe F (voir la fig. 4). La bifurcation $C_2 \equiv F$ a lieu pour $(a, s) \in \Gamma_2^*$; $C'_2 \equiv F$ a lieu pour $(a, s) \in \Gamma_2^*$. On montre aisément que la courbe Γ_2^* délimite la région d'apparition de cycle d'ordre impair, Γ_2^* est définie par

$$\begin{cases} s - q/p < f(a\alpha) < s + q/p \\ (a-1)(a\alpha + \operatorname{th} p(s-a\alpha)) + \operatorname{th} p(s-a^2\alpha - \operatorname{th} p(s-a\alpha)) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

avec les notations

$$\operatorname{ch}^2 q \triangleq p; \quad h(p) \triangleq -\frac{q}{p} + \operatorname{th} q; \quad \alpha \triangleq s + h(p); \quad \alpha' \triangleq s - h(p). \quad (19)$$

La définition de Γ_2^* est (18) en y remplaçant α par α' .

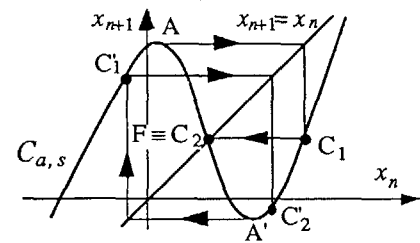


Fig. 4 : Bifurcation 3, limite d'apparition de cycles d'ordre impair

Bifurcation de type 4 : limite de stabilité

Le deuxième type de bifurcation est celui pour lequel un point critique de rang 1 (C_1 ou C'_1) est confondu avec le point fixe extrême correspondant (B ou B') (voir la fig. 5). La bifurcation $C_1 \equiv B$ a lieu pour $(a, s) \in \Gamma_1^*$; $C'_1 \equiv B'$ a lieu pour $(a, s) \in \Gamma_1^*$. La courbe Γ_1^* délimite la région du plan (a, s) pour laquelle le codeur d'entrée bornée par s est stable au sens où à toute condition initiale prise dans le segment BB' correspond une prédiction x bornée [M1]. Nous avons montré [M1] que pour p fixé, Γ_1^* est déterminé par:

$$s = s_1^*(a); \quad (20)$$

où $s_1^*(a)$ est l'unique solution positive de l'équation implicite:

$$(a-1) \alpha(s, p) = \operatorname{th} p(a\alpha(s, p) - s); \quad (21)$$

Γ_1^* est déterminé par:

$$s = s_1^*(a); \quad (22)$$

où $s_1^*(a)$ est l'unique solution positive de l'équation implicite (21) en y remplaçant α par α' .

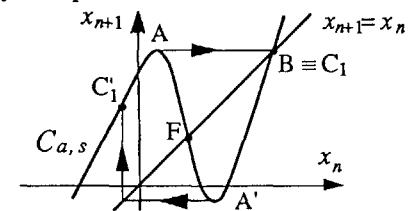


Fig. 5 : Bifurcation de type 4, limite de stabilité

Pour $s = 0$, Γ_1^* et Γ_1^* se coupent en $(a_1^*, 0)$. Pour $a = a_1^*$, toutes les bifurcations possibles pour (8) se sont produites et tous les cycles nés par ces bifurcations existent et sont répulsifs [M2]. Les suites itérées dans le segment BB' sont bornées mais non périodiques; BB' contient tous les cycles qui peuvent être créés pour (8) et tous ces cycles sont répulsifs; BB' est appelé dans [M2] un segment chaotique.

Pour $s \neq 0$, pour $(a, s) \in \Gamma_1^*$ ou pour $(a, s) \in \Gamma_1^*$, BB' n'est pas forcément un segment chaotique. Il peut exister un cycle attractif. Pour (a, s) à droite de Γ_1^* , C_2 et C'_2 sont extérieurs au segment BB' et plus aucun cycle ne peut être créé. Le segment BB' est une région de transitoire chaotique tel que $x_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.



V. CHAOS POUR QUELS PARAMETRES ?

D'après l'équation (16) de Γ_2 la structure de bifurcations de (8) est différente suivant le signe de $p - 2$. C'est pourquoi nous déterminons les courbes de bifurcations dans le plan (a, s) pour deux valeurs fixées de p : $p = 1.2$ (fig. 6) et $p = 5$ (fig. 7). Nous traçons, en plus des courbes dont les équations ont été données précédemment, les courbes Γ_{2i} pour $i = 2$ et 3 et Γ_3 . Ces dernières sont calculées en résolvant, par l'algorithme de Newton, le système d'équations:

$$f_k(x) = x, \quad (f_k)'(x) = 1, \quad i = 4, 8, 3. \quad (22)$$

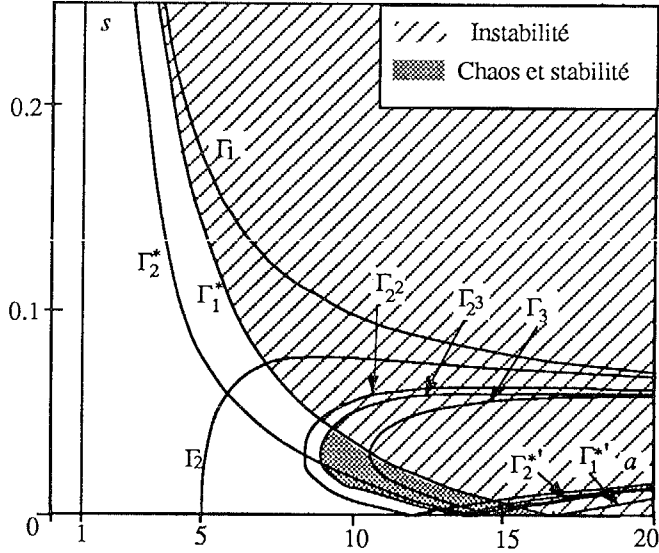


Fig. 6 : Structure de bifurcations pour $p = 1.2$

Par simulations nous avons vérifié que les courbes Γ_{2i} se rapprochent les une des autres lorsque i augmente. Dans les fig. 6 et 7, nous approximons Γ_∞ par Γ_{23} . La région d'instabilité du codeur est hachurée. Celle où le codeur est stable mais peut être en situation chaotique est grisée. D'après les fig. 6 et 7:

- pour $1 < p < 2$, il y a du chaos pour des valeurs de a assez grandes ($a > 8$ pour $p = 1.2$). Il n'y a donc pas de chaos lorsque la condition de stabilité du filtre \mathcal{R} du codeur est vérifiée.

- pour $p \geq 2$, il existe des valeurs de $a \in]0, 1[$, qui provoquent du chaos au codeur. Ce résultat est très important car jusqu'à présent l'intervalle $[0, 1]$ était considéré comme

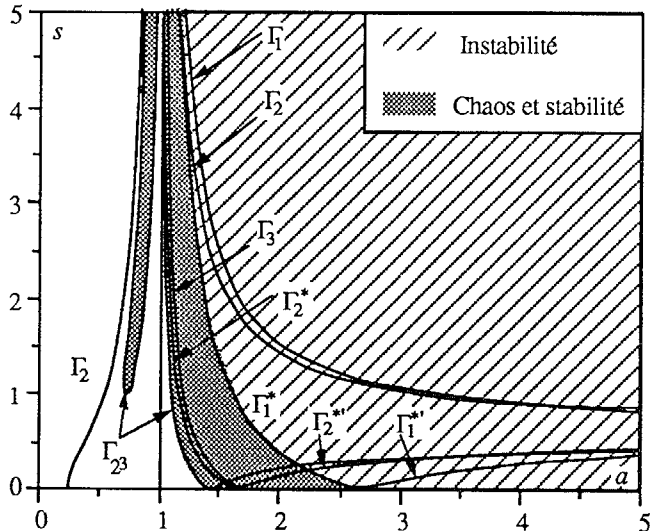


Fig. 7 : Structure de bifurcations pour $p = 5$

En revanche:

- pour $p \geq 2$, il existe des valeurs de $a \in]0, 1[$, qui provoquent du chaos au codeur. Ce résultat est très important car jusqu'à présent l'intervalle $[0, 1]$ était considéré comme

assurant de bonnes conditions de transmission grâce à la stabilité (au sens signal prédit x borné) du filtre \mathcal{R} .

Pour $p = 5$, la présence de chaos est confirmée par le diagramme de bifurcations, en fonction de a (pour $s = 2$, fig. 8). En ordonnée 500 itérations de x_n sont tracées, après une période transitoire de 1000 itérations. Ce diagramme montre le scénario de doublements de période et l'accumulation des valeurs de bifurcations de a vers la valeur $a_\infty(s)$ qui délimite la région chaotique. Au delà de $a_\infty(s)$ on distingue des segments absorbants. La fig. 9 montre, pour $s = 2$, $a = 0.8$, le spectre de x_n qui est très chahuté.

VI. CONCLUSION

Un codeur MICDIF est une boucle avec un quantificateur dans la voie directe et un filtre \mathcal{R} linéaire récursif dans la voie de retour. Traditionnellement les ingénieurs choisissent un filtre \mathcal{R} stable. Cette condition est surabondante pour assurer la stabilité de la boucle. Néanmoins nous avons montré ici qu'elle n'est pas suffisante pour un bon fonctionnement du système de transmission. En effet elle n'empêche pas un éventuel comportement chaotique du codeur et dans ce cas le bruit de décodage devient très grand. Il faut donc concevoir le codeur avec plus de contraintes que la seule stabilité.

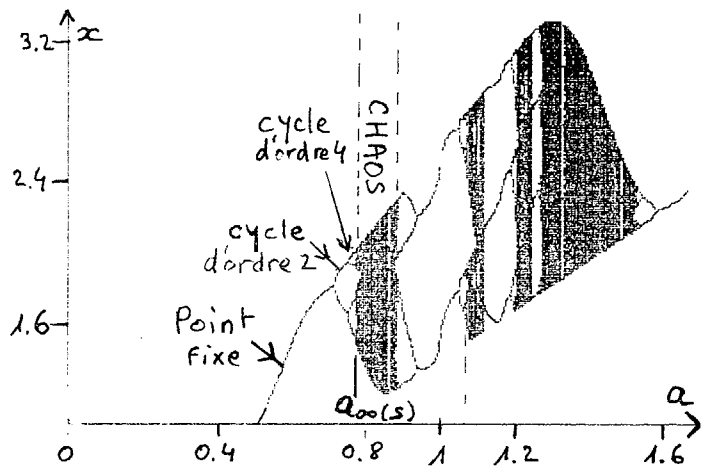


Fig. 8 : Diagramme de bifurcations pour $p = 5, s = 2$

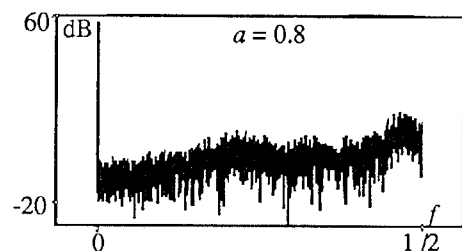


Fig. 9 : Spectre de x_n pour $p = 5, s = 2$

REFERENCES

[F1] D. Fourmier, "Structure de bifurcations d'un endomorphisme défini par un polynôme du 3ème degré", C. R. Acad. Sc. Paris, sér. 1, 294, pp. 455-458, 1982.
 [J1] N. S. Jayant, P. Noll, "Digital Coding of waveforms", Prentice-Hall, 1984.
 [M1] O. Macchi, C. Uhl, "Stability of the DPCM Transmission System", soumis à IEEE Trans. on Circuits and Systems.
 [M2] C. Mira, "Chaotic Dynamics", World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1987.
 [U1] C. Uhl, "Prédiction récursive non linéaire: stabilité et chaos", Thèse de l'Université de Paris XI, 1 juillet 1991.