

Amélioration de la Convergence de l'Algorithme "à Module Constant" pour la Déconvolution Aveugle

Katia HILAL et Pierre DUHAMEL

CNET Centre Paris B (CNET/PAB/RPE)

38-40, rue du Général Leclerc, 92131 Issy-Les-Moulineaux, France

RÉSUMÉ

ABSTRACT

L'algorithme "à module constant" (CMA) a démontré son efficacité pour effectuer l'égalisation aveugle pour les signaux à enveloppe constante. A partir de la formulation exacte par bloc du CMA [1] nous dérivons un nouveau critère par bloc. Ce critère tient compte d'une évolution fictive du filtre dû au CMA à l'intérieur du bloc. Les performances du nouvel algorithme sont comparées à celle du CMA à l'aide d'une simulation dans le contexte radio-mobile.

The constant Modulus Algorithm (CMA) was shown to perform blind equalisation on constant modulus signals. Here we use the exact block formulation of CMA already proposed in [1] to derive a new criterion. The new algorithm adapts the filter coefficients every block of data in which the CMA has already run. Simulation are performed in the mobile communication context, showing the performances of this algorithm versus CMA.

I. INTRODUCTION

L'égalisation (déconvolution) aveugle est une technique de réception en Télécommunications. Son but est de récupérer le message transmis, en compensant l'interférence entre symboles et les distorsions apportées par le canal de transmission, sans aucune information *a priori* sur les caractéristiques de ce canal. L'algorithme "à Module Constant" (CMA) qui est un cas particulier de celui proposé par Godard [2], peut s'utiliser lorsque le signal d'émission est à enveloppe constante, comme c'est le cas pour les modulations par déplacement de phase ou de fréquence.

Les perturbations du canal (trajets multiples+interférences) provoquent la déformation de l'enveloppe du signal reçu. Le CMA récupère la propriété d'enveloppe constante en utilisant les techniques de gradient stochastique. On peut montrer que le signal utile peut être restitué à l'aide d'un filtre linéaire, minimisant la distance au module souhaité δ . D'où un critère de la forme:

$$J = \frac{1}{4} E \left\{ \left[|y(n)|^2 - \delta \right]^2 \right\} \quad (1)$$

où $E\{x\}$ exprime l'espérance de x , et $y(n) = \underline{X}_n^t \underline{H}_n$ est la sortie du filtre à l'instant n , $\underline{X}_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-L+1}]^t$ est le vecteur des L dernières entrées (L étant la longueur du filtre) et $\underline{H}_n = [h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]^t$ le vecteur des coefficients complexes du filtre.

L'algorithme CMA est dérivé en prenant le gradient du critère (1) par rapport aux coefficients du filtre \underline{H} :

$$\Delta_{\underline{H}}(J) = \underline{X}_n^* (|y(n)|^2 - \delta) y(n) \quad (2)$$

et l'adaptation des coefficients du filtre s'effectue à partir de la relation (2) avec un pas d'adaptation μ tel que $0 < \mu < 1$:

$$\underline{H}_{n+1} = \underline{H}_n - \mu \underline{X}_n^* (|y(n)|^2 - \delta) y(n) \quad (3)$$

Afin d'utiliser un tel algorithme pour les systèmes radio-mobiles, il faut tenir compte des contraintes telles que la durée du traitement, la structure des données organisées en blocs, etc.. Une fois le bilan fait, on voit que des améliorations doivent être apportées pour réduire la charge de calcul et surtout accélérer la convergence. Dans le § 2, nous rappelons le résultat obtenu dans [1], qui, tout en fournissant une formulation exacte par blocs du CMA, permet de réduire notablement sa charge de calcul sans modifier son comportement adaptatif. Dans la partie III, à partir de cette formulation par blocs, nous modifions le critère afin d'obtenir un nouvel algorithme ayant de meilleures propriétés de convergence. Des courbes de simulation des deux algorithmes seront exposées dans la partie IV.

Dans ce qui suit, nous considérons $\delta=1$. Une lettre soulignée \underline{x} désigne un vecteur, une lettre en caractère gras \mathbf{X} désigne une matrice, un astérisque x^* désigne le complexe conjugué et x^t désigne le transposé de x .

II- FCMA: Une formulation par blocs du CMA



L'idée du FCMA (*Fast CMA*) est d'obtenir une formulation par blocs qui soit strictement équivalente au CMA initial, ce qui n'est pas le cas pour d'autres formulations par blocs comme dans [3]. Reformulons tout d'abord les équations du CMA:

$$y(n) = \underline{X}'_n \underline{H}_n = \sum_{i=0}^{L-1} x_{n-i} h_i \quad (4)$$

$$\alpha(n) = (|y(n)|^2 - 1)y(n) \quad (5)$$

$$\underline{H}_{n+1} = \underline{H}_n - \mu \underline{X}'_n \alpha(n) \quad (6)$$

L'équation (4) est l'équation de filtrage proprement dite, l'équation (5) calcule une "erreur" à l'instant n à partir de laquelle sont déduits les nouveaux coefficients \underline{H}_{n+1} (6).

La formulation par blocs [1] est obtenue en remplaçant le filtrage adaptatif dans le CMA par un filtrage fixe pendant N entrées, où $L=N.M$. Un terme de correction est alors appliqué à la sortie de ce filtre afin d'obtenir les sorties qu'aurait donné le CMA. Les équations (4) et (6) deviennent alors:

$$\underline{Y}'_n = \underline{X}'_n \underline{H}_{n-N+1} \quad (7)$$

$$\underline{Y}_n = \underline{Y}'_n - \mu \underline{S}_n \underline{\alpha}_n \quad (8)$$

$$\underline{H}_{n+1} = \underline{H}_{n-N+1} - \mu \underline{X}'_n \underline{\alpha}_n \quad (9)$$

où \underline{Y}'_n est un vecteur de N sorties du filtre fixe \underline{H}_{n-N+1} , \underline{X}_n est une matrice $L \times N$ dont les colonnes sont les vecteurs d'entrées

$$\underline{X}_n = [\underline{X}_{n-N+1} \quad \underline{X}_{n-N+2} \quad \dots \quad \underline{X}_n]$$

$\underline{\alpha}_n = [\alpha(n-N+1), \alpha(n-N+2), \dots, \alpha(n)]^t$ est le vecteur d'erreur, et où \underline{S}_n est une matrice triangulaire inférieure de la forme:

$$\underline{S}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{2,1} & & & \vdots \\ & \ddots & & 0 \\ s_{N,1} & s_{N,N-1} & & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$s_{i,j} = \underline{X}'_{n-N+i} \underline{X}_{n-N+j}$$

L'équation (8) donne le vecteur de sortie $\underline{Y}_n = [y(n-N+1), y(n-N+2), \dots, y(n)]^t$ où $y(n)$ est le même que celui donné dans (4). De cette façon, le filtre est adapté une fois par bloc, cependant, la sortie imite celle d'un filtre qui s'adapte à chaque nouvelle entrée, d'où l'équivalence entre le CMA et le FCMA. La matrice \underline{S} est une estimation de la partie inférieure de la matrice de corrélation du signal.

Cette formulation permet l'utilisation de toutes les techniques de filtrage rapide soit temporelles [4], soit fréquentielles pour réduire la charge de calcul dans les phases de filtrage et d'adaptation. Une implantation dans le domaine fréquentiel utilise des Transformées de Fourier Rapides de longueur double de la taille du bloc et donc indépendante de la taille du filtre. Le calcul des éléments de corrélation $s_{i,j}$ se fait, quant à lui, de façon récursive [1]. Ces techniques permettent alors une réduction du nombre total d'opérations nécessaires à l'implantation du CMA. Une réduction de 60% de cette charge

est atteinte dans l'implantation fréquentielle pour $L=256$ et $N=32$.

Choix du pas d'adaptation:

En écrivant la condition de convergence du CMA:

$$\left| |x'_n \underline{H}_{n+1}|^2 - 1 \right| < \left| |x'_n \underline{H}_n|^2 - 1 \right|^2$$

nous aboutissons à la relation suivante:

$$\mu < \frac{2}{E_n \cdot |y_n|^2 \left[2 - \mu (|y_n|^2 - 1) E_n \right]}$$

E_n étant l'énergie du signal à l'entrée du filtre. Cette relation donne à la convergence, puisque $|y(n)|^2$ tend vers 1:

$$\mu < \frac{1}{E_n} = \frac{1}{L \cdot E \{x_n^2\}} \quad (10)$$

Comparé au LMS, la majoration du pas d'adaptation est donc divisée par 2.

II- NBCMA: Nouveau critère par bloc

La formulation par bloc du CMA expliquée ci-dessus permet non seulement d'obtenir une diminution de la charge de calcul, mais aussi d'accélérer la convergence de l'algorithme: En effet, il est possible de modifier le critère de façon à avoir un critère par bloc, tenant compte de l'évolution fictive du filtre due au CMA pendant la durée du bloc. Posons:

$$J' = \frac{1}{2N} E \left\{ \sum_{i=(k-1)N+1}^{kN} [|y_k(i)|^2 - \delta]^2 \right\}$$

où $y_k(i)$ est la i ème sortie du CMA dans le k ème bloc. Ce critère correspond à faire fonctionner fictivement un algorithme CMA pendant N échantillons, puis de raffiner périodiquement l'optimisation par un critère global sur la durée du bloc. Le gradient du critère J' est donné par:

$$\Delta_{\underline{H}}(J') = \frac{1}{N} \sum \left(|y_k(i)|^2 - 1 \right) \frac{d|y_k(i)|^2}{d\underline{H}} \quad (11)$$

Afin d'alléger les notations, nous omettons l'indice de bloc k et l'indice de temps n et nous désignons par y_i le i ème élément du vecteur \underline{Y} . L'équation (11) devient:

$$\Delta_{\underline{H}}(J') = \frac{1}{N} \sum \left(|y_i|^2 - 1 \right) \frac{d|y_i|^2}{d\underline{H}} \quad (12)$$

Introduisons à présent les matrices suivantes:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{d|y_0|^2}{d\underline{H}} & \dots & \frac{d|y_{N-1}|^2}{d\underline{H}} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} |y_0|^2 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & |y_{N-1}|^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \frac{dy_0}{d\underline{H}} & \dots & \frac{dy_{N-1}}{d\underline{H}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} \frac{dy_0^*}{dH} & \dots & \frac{dy_{N-1}^*}{dH} \\ y_0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & y_{N-1} \end{bmatrix}$$

le gradient (12) est alors donné par:

$$\Delta_{\underline{H}}(J') = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Afin d'expliciter l'algorithme qui s'en déduit, il s'agit de calculer la matrice \mathbf{D} . Ceci est possible en exploitant la relation (8) qui s'écrit avec les nouvelles notations:

$$\underline{Y} = \underline{Y}' - \mu \mathbf{S} \underline{\alpha} \quad (14)$$

et la relation suivante:

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{d}' \cdot \mathbf{Y} \quad (15)$$

En effectuant le calcul donné dans l'annexe 1, nous aboutissons à la relation suivante:

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{P} \quad (16)$$

\mathbf{G} et \mathbf{P} étant les deux matrices suivantes:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{I} + \mu \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^t)^{-1} \quad (17)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} + 2\mu \cdot \Re(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Y}^*))^{-1} \quad (18)$$

Le gradient du critère J' s'écrit alors:

$$\Delta_{\underline{H}}(J') = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

et l'adaptation des coefficients du filtre \underline{H} s'effectue tous les blocs avec un pas μ' selon la relation suivante dont on sait calculer chacun des termes:

$$\underline{H}_{n+1} = \underline{H}_{n-N+1} - \frac{\mu'}{N} \cdot \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comparé à l'algorithme FCMA, dont l'équation d'adaptation (9) s'écrit avec les notations précédentes:

$$\underline{H}_{n+1} = \underline{H}_{n-N+1} - \mu \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

le nouvel algorithme nécessite deux nouvelles matrices dans l'équation d'adaptation qui garde *grosso modo* la même structure. Une grande partie du calcul se fait donc d'une façon identique et les mêmes méthodes de calcul rapide peuvent être employées. L'inversion des deux matrices \mathbf{G} et \mathbf{P} peut sembler compliquée, mais \mathbf{G} est une matrice triangulaire supérieure dont l'inversion est réduite à une simple substitution, de même, on montre dans l'annexe 2 que la matrice \mathbf{P} est non seulement triangulaire supérieure mais que ses éléments sont facilement explicités par:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} & & & j & & \\ & & & \vdots & & \\ i \dots & & & & & \\ & 1 & & \frac{-2\Re(y_i y_j^* g_{i,j})}{|y_i|^2 - 1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & \vdots & & & & \\ & 0 & \dots & 0 & & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

où $g_{i,j}$ est l'élément de la i ème ligne et la j ème colonne de \mathbf{G} .

Evaluation du nombre d'opération:

Le nouvel algorithme nécessite pour une implantation fréquentielle identique à celle du FCMA:

$$4L(\log_2 N + 2) + 8L/N + 5/6N^3 + 9N^2 + 6N \log_2 N - 1/6N + 22$$

multiplications réelles, et

$$2L(6 \log_2 N + 7) + 8L/N + 5/6N^3 + 9N^2 + 18N \log_2 N + 9N + 22$$

additions réelles.

Une réduction d'environ 30% de la charge de calcul a donc lieu par rapport au CMA pour $L=256$ et $N=16$.

Choix du pas d'adaptation:

Les simulations du NBCMA ont montré que le pas μ est celui donné dans (10) alors que μ' est choisi tel que $\mu' > \mu$. Un rapport proche de 2 entre ces deux pas a donné les meilleurs résultats dans nos simulations.

IV- Résultats de simulations:

La simulation du nouvel algorithme s'est inspirée de la recommandation européenne GSM pour les communications radio-mobiles [5]. Le signal de départ est modulé avec une modulation MDP4. Il est ensuite transmis à un débit de 270kbits/s à travers un modèle de canal dans une région montagneuse ayant une réponse impulsionnelle d'une durée de 20 μ s [5]. Un bruit blanc gaussien de rapport $S/N_0=30$ dB est rajouté à la sortie du canal.

Le signal reçu est filtré et échantillonné au rythme de 1 ech/symbole émis. Les échantillons qui se présentent à l'entrée du filtre d'égalisation appartiennent à la constellation ci-dessous.

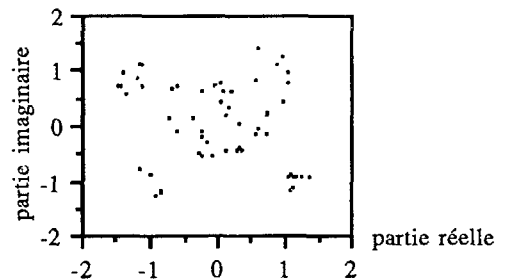


Fig 1: Signal reçu, filtré et échantillonné



La courbe suivante représente l'évolution du critère $(|y|^2-1)$ en sortie du CMA et du EBCMA pour un filtre de longueur $L=32$ et des blocs de longueur $N=32$.

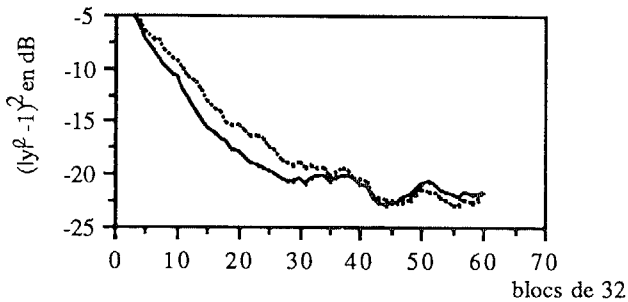


Fig 2: critère en sortie de l'égaliseur

CMA $\mu=0,01$
EBCMA ——— $\mu=0,01 \quad \mu'=0,02$

Sur cette courbe on constate que le nouvel algorithme a réalisé un gain d'environ 3dB dans la première partie de la convergence. A la convergence, la constellation du signal en sortie de l'égaliseur est la suivante.

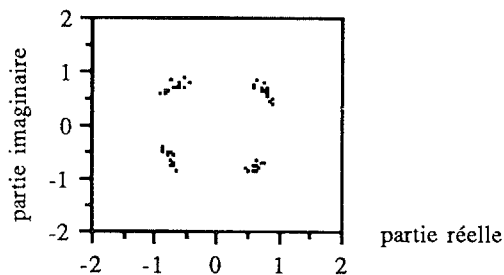


Fig 3: Constellation en sortie de l'égaliseur.

Au bout du 20^{ème} bloc de 32 échantillons, le critère est tombé à -20 dB. Cette durée de 640 échantillons en terme de la normalisation GSM correspond à environ quatre trames de données. Etant donné le comportement accéléré de l'algorithme, et le fait qu'un mobile reçoit une trame de durée 0.557ms toutes les 4.5ms, il est envisageable de reboucler la trame reçue quatre fois à l'entrée de l'égaliseur.

Au vu de ces simulations, le EBCMA, bien que convergeant plus vite que le CMA initial, ne montre pas une amélioration suffisante. Nous tentons donc actuellement de développer un algorithme minimisant exactement le critère à chaque itération afin de pouvoir accélérer davantage la convergence. Il faut remarquer que l'amélioration apportée par le CMA aurait été beaucoup plus sensible pour des filtres plus longs.

V- Conclusion:

La formulation exacte par blocs du CMA donnée dans [1] permet d'envisager un nouveau critère -non classique- par bloc. L'algorithme obtenu (EBCMA) adapte les coefficients du filtre une fois par bloc selon un critère qui prend en compte l'évolution fictive du filtre donnée par le CMA et qui

minimise une erreur globale sur N échantillons. Comme l'algorithme dont il est dérivé, ce nouvel algorithme a une charge de calcul réduite par rapport au CMA. Les simulations dans le cas réel de la communication avec les mobiles montrent l'amélioration que le EBCMA apporte en accélérant la convergence. La question sous-jacente à cette étude est: Peut-on améliorer les algorithmes d'égalisation aveugle, de telle manière que l'on puisse se passer d'une séquence connue à l'intérieur de la trame de signal émise vers les mobiles?

Annexe 1: Dérivation de (16)

Explicitons le $i^{\text{ème}}$ terme de l'équation (8):

$$y_i = \underline{X}_i^t \underline{H} - \mu \sum_{j=0}^{N-1} s_{i,j} (|y_j|^2 - 1) y_j$$

où $s_{i,j}$ est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \underline{S} . Les deux variables \underline{H} et \underline{H}^* sont indépendantes puisqu'elles résultent des variables $\Re(\underline{H})$ et $\Im(\underline{H})$ par un changement de variables. La dérivation de y_i et y_i^* par rapport à \underline{H} donne alors:

$$\frac{dy_i}{d\underline{H}} = -\mu \sum_{j=0}^{N-1} s_{i,j} \left[(|y_j|^2 - 1) \frac{dy_j}{d\underline{H}} + y_j \frac{d|y_j|^2}{d\underline{H}} \right]$$

$$\frac{dy_i^*}{d\underline{H}} = \underline{X}_i^* - \mu \sum_{j=0}^{N-1} s_{i,j}^* \left[(|y_j|^2 - 1) \frac{dy_j^*}{d\underline{H}} + y_j^* \frac{d|y_j|^2}{d\underline{H}} \right]$$

Ceci donne en notation matricielle :

$$\underline{d} = -\mu \underline{d} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}^t - \mu \underline{D} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{S}^t$$

$$\underline{d}' = \underline{X}^* - \mu \underline{d}' \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}^t - \mu \underline{D} \cdot \underline{Y}^* \cdot \underline{S}^t$$

Ces deux relations et (17) donnent:

$$\underline{d} = -\mu \underline{D} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{S}^t \cdot \underline{G}$$

$$\underline{d}' = \underline{X}^* \underline{G}^* - \mu \underline{D} \cdot \underline{Y}^* \cdot \underline{S}^t \cdot \underline{G}^*$$

la relation (16) se déduit alors immédiatement d'après (15).

Annexe 2: Dérivation de l'expression de P

D'après (17) on a:

$$\underline{S}^t \underline{G} = \underline{\mu}^{-1} \underline{A}^{-1} (\underline{I} - \underline{G})$$

en remplaçant dans (18) on obtient:

$$\underline{P} = \left[\underline{I} + 2\Re \left(\underline{Y} \cdot \underline{A}^{-1} \underline{Y}^* - \underline{Y} \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{Y}^* \right) \right]^{-1}$$

d'où l'expression de \underline{P} .

VI- Bibliographie:

- [1] J.Benesty & P.Duhamel, "A fast constant modulus algorithm", EUSIPCO, et à paraître dans IEE Proc. special issue on adaptive filtering.
- [2] D.N. Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems", IEEE Trans. COM-28, N°11, Nov. 1980.
- [3] R.Treichler, S.L.Wood & M.G.Larimore, "Convergence rate limitations in certain frequency-domain adaptive filters", ICASSP-1989, pp. 960-963.
- [4] Z.J.Mou & P.Duhamel, "Short-length FIR filters and their use in fast FIR filtering", IEEE Trans. on Sig. Proc., june 1991.
- [5] Commission of the European Communities, "COST 207: Digital land mobile radio communications", 1989.