FILTRAGE ADAPTATIF PAR MOINDRES CARRES DES SIGNAUX MULTIDIMENSIONNELS

Maurice BELLANGER

CNAM ,292 rue Saint-Martin,75141 Paris Cedex 03

RÉSUMÉ

Le filtrage adaptatif par moindres carrés rapides d'un signal à K dimensions peut se faire par K passages dans un filtre pour signal à une dimension.L'approche présentée pour la structure transversale directe s'applique aussi aux structures en treillis et à rotations.

L'application à un type de filtrage non linéaire est soulignée.

ABSTRACT

Fast least squares adaptive filtering of K-dimensional signals can be performed through K runs of the algorithm for for one-dimensional signals.The approach,which is presented here for the transversal structure in direct form,applies as well to lattice-ladder and QR-rotation structures.

Application to non linear adaptive filtering is pointed out.

I - INTRODUCTION

Les signaux multidimensionnels se rencontrent couramment en filtrage numérique adaptatif,par exemple en télécommunications pour l'égalisation de canaux radio,en automatique pour l'identification des systèmes,en détection,dans les antennes adaptatives,dans certains filtrages non linéaires.

Le principe d'un filtre adaptatif ayant K signaux d'entrée $x_i(n)$, $1 \leqslant i \leqslant K$,et un signal de référence y(n),est représenté à la figure 1.L'erreur de sortie e(n) est utilisée pour faire la mise à jour des coefficients des branches transversales $H_i(Z)$ en minimisant la fonction quadratique suivante:

$$J(n) = \sum_{p=1}^{n} W^{n-p}\, e^2(p) \qquad (1)$$

où W est un facteur de pondération-oubli ($1 << W < 1$).

La méthode utilisée pour réduire la quantité de calculs dans le cas d'un signal d'entrée unique peut être étendue pour tenir compte des entrées multiples,en faisant apparaitre des matrices de coefficients de prédiction à KNxK éléments et des matrices d'erreurs à KxK éléments [1].

L'objet de la présente contribution est d'attirer l'attention sur une approche particulièrement intéressante pour la réalisation: le filtrage par moindres carrés d'un signal à K dimensions peut se faire par K passages dans un filtre pour signal à une dimension [2].Dans ces conditions,il suffit de réaliser un coeur de traitement,matériel ou logiciel,pour signal à une dimension et de l'utiliser autant que nécessaire,en lui fournissant les données appropriées.L'approche est valable quelle que soit la structure, transversale,en treillis ou à rotations.

Une présentation simplifiée de cette propriété de séparabilité est d'abord donnée pour le filtre adaptatif transversal à 2 entrées.

II - FILTRE ADAPTATIF A 2 DIMENSIONS

On considère d'abord les deux vecteurs de données suivants:

$$X_{2N}(n) = \begin{bmatrix} x_2(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_2(n+1-N) \\ x_1(n+1-N) \end{bmatrix} \; ; \; X_{1,2N}(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_1(n+2-N) \\ x_2(n+1-N) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

L'objectif de l'algorithme est la mise à jour,à chaque itération , du gain d'adaptation:

$$G_{2N}(n) = R_{2N}^{-1}(n)\, X_{2N}(n) \qquad (3)$$

L'existence d'un algorithme rapide est due aux relations entre, d'une part la matrice de corrélation:

$$R_{2N}(n) = \sum_{p=1}^{n} W^{n-p}\, X_{2N}(p)\, X_{2N}^t(p) \qquad (4)$$

et les deux matrices suivantes:

$$R_{2N+1}^{(1)}(n+1) = \sum_{p=1}^{n} W^{n+1-p} \begin{bmatrix} x_1(p) \\ X_{2N}(p-1) \end{bmatrix} \left[x_1(p), X_{2N}^t(p-1) \right] \qquad (5)$$

et

$$R_{2N+1}^{(2)}(n+1) = \sum_{p=1}^{n} W^{n+1-p} \begin{bmatrix} X_{2N}(n+1) \\ x_2(n+1-N) \end{bmatrix} \left[X_{2N}^t(n+1), x_2(n+1-N) \right]$$

La minimisation de la fonction coût:

$$E_{1a}(n) = \sum_{p=1}^{n} W^{n-p} \left[x_1(p)-A_{1,2N}^t(n)X_{2N}(p-1)\right]^2 \qquad (6)$$

conduit,en utilisant l'enchainement de calculs classique (voir chapitre 6 dans [1]),à l'équation matricielle suivante:

$$R_{2N+1}^{(1)}(n+1) \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -A_{1,2N}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1a}(n+1) \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

qui peut être considérée comme une équation de prédiction linéaire avant.
L'algorithme rapide consiste alors à calculer $G_{2N}(n+1)$ à partir de $G_{2N}(n)$,ce qui est obtenu en reproduisant 2 fois les équations du paragraphe 6.4 dans [1].L'équation de la prédiction linéaire avant (7) fournit le vecteur:

$$G_{1,2N+1}(n+1) = R_{2N+1}^{(1)\,-1}(n+1) \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ \\ X_{2N}(n) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Ensuite la prédiction arrière conduit au gain intermédiaire:

$$G_{1,2N}(n+1) = \left[\sum_{p=1}^{n+1} W^{n+1-p} X_{1,2N}(p)X_{1,2N}^t(p)\right]^{-1} X_{1,2N}(n+1) \qquad (9)$$

La prédiction avant est utilisée à nouveau pour obtenir:

$$G_{2,2N+1}(n+1) = R_{2N+1}^{(2)\,-1}(n+1) \begin{bmatrix} X_{2N}(n+1) \\ \\ x_2(n+1-N) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Et finalement,la prédiction arrière fournit le gain cherché, $G_{2N}(n+1)$.Le détail des calculs est donné par le tableau 1, pour la partie prédiction et la partie filtrage.

III - FILTRE ADPTATIF A K DIMENSIONS

L'approche exposée ci-dessus pour 2 signaux d'entrée, s'étend à K signaux d'entrée,en fournissant pour chaque valeur de l'indice n les K vecteurs à KN éléments de prédiction avant et arrière,ainsi que les énergies d'erreur de prédiction avant,c'est à dire l'ensemble $A_{i,KN}(n)$,$B_{i,KN}(n)$ et $E_{ia}(n)$,avec $1 \leqslant i \leqslant K$.
Pour chaque valeur de l'indice n,il faut donc faire K fois l'ensemble des calculs correspondant à la partie calcul du gain d'adaptation de l'algorithme pour signaux à une dimension.Dans le cas de l'algorithme MCR1,il faut faire ainsi $8K^2N+4K$ multiplications et 2K divisions.Cette complexité est à comparer à celle de l'approche directe (paragraphe 7.6 dans[1]),qui correspond à $(7K^2N+KN+3K^2+2K)$ multiplications et 2 divisions.Les complexités arithmétiques apparaissent ainsi comparables,l'algorithme MCR K-D/1-D ayant l'avantage d'une plus grande simplicité et modularité dans l'enchainement des calculs par rapport à l'algorithme direct.
La même approche s'applique également aux structures modulaires,en treillis et à rotations.Le développement complet de ce type d'algorithme pour la méthode à rotations dite QR est exposé dans la référence [3].

IV - APPLICATION AU FILTRAGE NON LINEAIRE

Le filtrage multidimensionnel s'applique au filtrage non linéaire,quand la sortie reste une fonction linéaire des coefficients et que les non linéarités portent sur les valeurs du signal d'entrée.En effet,il suffit alors de considérer les combinaisons non linéaires des valeurs d'entrée retardées comme autant de signaux d'entrée différents [4].
Le schéma de principe est représenté à la figure 2.
Par exemple,dans le cas d'un filtre quadratique où la fonction coût s'écrit:

$$J(n) = \sum_{p=1}^{n} \left[y(p) - X^t(p)H(n) - X^t(p)M(n)X(p)\right]^2 \qquad (11)$$

la sortie $\tilde{y}(n)$ du filtre programmable,compte tenu des symétries,prend la forme:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i\, x(n-i) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1-j} m_{i(i+j)}\, x(n-i)\, x(n-j-i) \qquad (12)$$

En posant $x_j(n) = x(n)\,x(n-j)$, cette équation devient:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i\, x(n-i) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1-j} m_{i(i+j)}\, x_j(n-i) \qquad (13)$$

et le filtre quadratique est équivalent à un filtre adaptatif à N+1 entrées.

V - CONCLUSION

L'utilisation des algorithmes des moindres carrés pour le filtrage adaptatif à entrées multiples apparait souvent aux utilisateurs comme conceptuellement compliquée et laborieuse à mettre en oeuvre.La méthode qui a été développée ci-dessus se présente comme une extension directe du cas d'une entrée unique,facile à appliquer et à réaliser aussi bien en matériel qu'en logiciel.Elle est générale et tient au principe même des moindres carrés.Elle devrait contribuer à étendre le domaine d'utilisation des filtres adaptatifs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.BELLANGER,"Analyse des Signaux et Filtrage Numérique Adaptatif",Ed.Masson,Paris,1989.

[2] D.SLOCK,L.CHISCI,H.LEV-ARI and T.KAILATH, "Modular and Numerically Stable Multichannel FTF Algorithms",Proc. of IEEE-ICASSP conference, Glasgow,Scotland,May 1989,pp.1039-1042.

[3] M.BELLANGER,"The FLS-QR Algorithm for Adaptive Filtering:the Case of Multichannel Signals", Signal Processing,vol.22,No2,Feb.1991,pp.115-126.

[4] M.A.SYED and V.J.MATHEWS,"Lattice and QR Decomposition-Based Algorithms for Recursive Least Squares Adaptive Nonlinear Filters",Proc. of IEEE-ISCAS conference,New Orleans,USA,May 1990.

ALGORITHME MCR 2-D/1-D

Disponible au temps n:

Coefficients du filtre adaptatif 2-D	:	$H_{2N}(n)$
Coefficients de la prédiction avant	:	$A_{1,2N}(n)$; $A_{2,2N}(n)$
Coefficients de la prédiction arrière	:	$B_{1,2N}(n)$; $B_{2,2N}(n)$
Vecteur des données	:	$X_{2N}(n)$
Gain d'adaptation	:	$G_{2N}(n)$
Energies d'erreur de prédiction avant	:	$E_{1a}(n)$; $E_{2a}(n)$
Facteur de pondération	:	W

Nouvelles données au temps n:

Signaux d'entrée : $x_1(n+1)$, $x_2(n+1)$; reference : $y(n+1)$

Calcul du gain d'adaptation:

$$e_{1a}(n+1) = x_1(n+1) - A_{1,2N}^t(n)\, X_{2N}(n)$$
$$A_{1,2N}(n+1) = A_{1,2N}(n) + G_{2N}(n)\, e_{1a}(n+1)$$
$$\epsilon_{1a}(n+1) = x_1(n+1) - A_{1,2N}^t(n+1)\, X_{2N}(n)$$
$$E_{1a}(n+1) = W\, E_{1a}(n) + e_{1a}(n+1)\, \epsilon_{1a}(n+1)$$

$$G_{1,2N+1}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ G_{2N}(n) \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_{1a}(n+1)}{E_{1a}(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -A_{1,2N}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(n+1) \\ m_1(n+1) \end{bmatrix}$$

$$e_{1b}(n+1) = x_1(n+1-N) - B_{1,2N}^t(n)\, X_{1,2N}(n+1)$$
$$G_{1,2N}(n+1) = \frac{1}{1-m_1(n+1)e_{1b}(n+1)} \left[M_1(n+1) + m_1(n+1)\, B_{1,2N}(n) \right]$$
$$B_{1,2N}(n+1) = B_{1,2N}(n) + G_{1,2N}(n+1)\, e_{1b}(n+1)$$

$$e_{2a}(n+1) = x_2(n+1) - A_{2,2N}^t(n+1)\, X_{1,2N}(n+1)$$
$$A_{2,2N}(n+1) = A_{2,2N}(n) + G_{1,2N}(n+1)\, e_{2a}(n+1)$$
$$\epsilon_{2a}(n+1) = x_2(n+1) - A_{2,2N}^t(n+1)\, X_{1,2N}(n+1)$$
$$E_{2a}(n+1) = W\, E_{2a}(n) + e_{2a}(n+1)\, \epsilon_{2a}(n+1)$$

$$G_{2,2N+1}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ G_{1,2N}(n+1) \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_{2a}(n+1)}{E_{2a}(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -A_{2,2N}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2(n+1) \\ m_2(n+1) \end{bmatrix}$$

$$e_{2b}(n+1) = x_2(n+1-N) - B_{2,2N}^t(n)\, X_{2N}(n+1)$$
$$G_{2N}(n+1) = \frac{1}{1-m_2(n+1)\, e_{2b}(n+1)} \left[M_2(n+1) + m_2(n+1)\, B_{2,2N}(n) \right]$$
$$B_{2,2N}(n+1) = B_{2,2N}(n) + G_{2N}(n+1)\, e_{2b}(n+1)$$

FILTRE ADAPTATIF:

$$e(n+1) = y(n+1) - H_{2N}^t(n)\, X(n+1)$$
$$H_{2N}(n+1) = H_{2N}(n) + G_{2N}(n+1)\, e(n+1)$$

Table 1 : Algorithme des moindres carrés rapide pour 2 signaux d'entrée,utilisant 2 fois l'algorithme à entrée unique

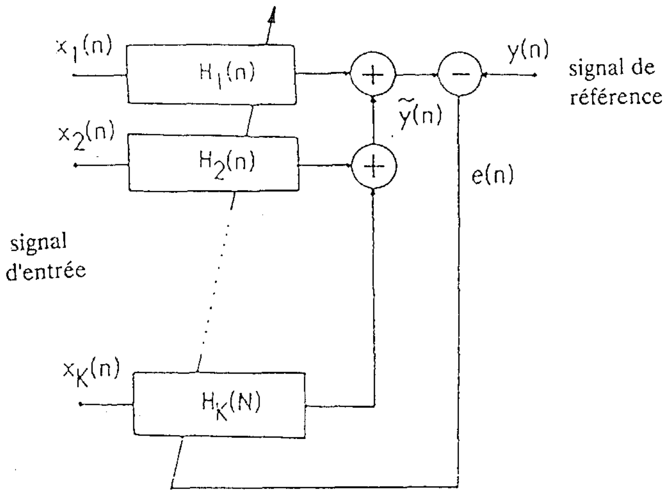

Fig.1 Principe du filtre adaptatif à entrées multiples

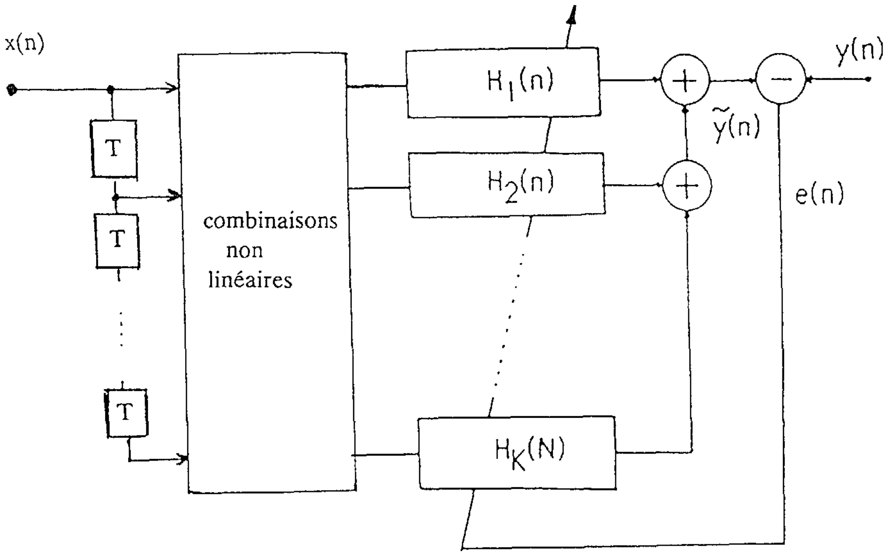

Fig.2 Filtrage adaptatif non linéaire par filtrage multidimensionnel