

Conversion de Paramètres en Filtrage Adaptatif avec Algorithmes des Moindres Carrés Rapides

Hassane MIMOUN

I.S.E.P. 21, rue d'Assas F-75006 Paris

et

Maurice BELLANGER

C.N.A.M. 292, rue Saint Martin 75141 Cedex 03

RÉSUMÉ

La conversion entre les paramètres qui interviennent dans les filtres adaptatifs en structure transversale, en treillis et à rotations est étudiée. La procédure de conversion est vérifiée par des simulations. Les correspondances simples qui sont obtenues peuvent servir à comparer les algorithmes et à illustrer certaines de leurs propriétés.

I - Introduction :

En filtrage adaptatif on distingue principalement trois types de structures : les structures transversales, en treillis et à rotations. Les algorithmes des moindres carrés associés ont des complexités arithmétiques croissantes mais des robustesses vis à vis des imprécisions de réalisation également croissantes.

La structure transversale est la plus simple, avec une quantité de calculs par valeur de sortie du filtre approximativement égale à $8N$, en désignant par N l'ordre du filtre. Les paramètres sont les N coefficients du filtre et l'optimisation est globale. Cette approche est cependant délicate à mettre en oeuvre en raison de la sensibilité aux erreurs d'arrondi dans les calculs et de phénomènes d'accumulation de ces erreurs qui doivent être contrôlés dans les applications où le système doit fonctionner en permanence sur une longue durée [1].

La structure en treillis est modulaire: c'est la mise en série de N cellules identiques, à chacune desquelles est associé un coefficient. Tous les ordres de filtres de 1 à N sont ainsi disponibles. Le coût en calculs est d'environ deux fois celui de la structure transversale, mais les phénomènes d'accumulation des erreurs d'arrondi ne se produisent apparemment pas et le système peut fonctionner en permanence [2].

La modularité se trouve dans la structure à rotations de même que l'absence d'accumulation d'erreurs d'arrondi. Le système est caractérisé par un ensemble de N angles de

ABSTRACT

The conversion between the various parameters which are involved in the transversal, lattice and QR-rotation structures for adaptive filtering is investigated. The techniques proposed are checked by computer simulations. The simple correspondances which are described are useful when comparing algorithms and, also, they can serve to illustrate some of their properties.

rotation et les opérations peuvent se faire sans calcul d'énergie des signaux. Il en résulte que la dynamique interne peut rester du même ordre que celle des données, au lieu du double, ce qui conduit à des gains intéressants sur la précision des calculs quand l'amplitude des signaux varie beaucoup[3].

La conversion entre les coefficients des structures transversales et en treillis pour un filtre de prédiction linéaire est une opération classique. Elle est obtenue par les relations de récurrence sur l'ordre [1].

La conversion entre les paramètres des structures à rotations et les coefficients du treillis est plus délicate et c'est l'objet principal du présent article.

II- Conversion dans le cas de la prédiction :

Le schéma de principe du filtre adaptatif est donnée à la figure 1 et un algorithme des moindres carrés rapide associé à la structure à rotations est donnée à la figure 2 [4]. Les paramètres qui permettent de faire la liaison avec le treillis sont les éléments $x_{qi}(n)$ du vecteur des données d'entrée transformées. On montre qu'ils vérifient la relation :

$$E_{a(i-1)}(n) = E_{ai}(n) + x_{qi}^2(n) \quad (1)$$

où $E_{ai}(n)$ est l'énergie de l'erreur de prédiction avant, en



sortie d'un prédicteur à i coefficients. Cette relation apparaît d'ailleurs directement dans l'algorithme, du fait que les rotations conservent la norme des vecteurs. Ainsi l'énergie du signal d'entrée se trouve décomposée par :

$$\sum_{p=1}^n W^{n-p} x^2(p) = E_{b0}(n) = E_{a0}(n) = E_{aN}(n) + \sum_{i=1}^N x_{qi}^2(n) \quad (2)$$

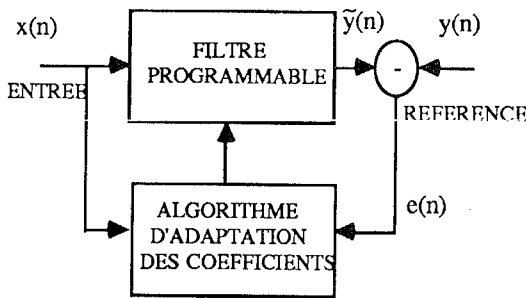


Fig. 1- Principe d'un filtre adaptatif

Or les coefficients du treillis normalisés relient eux aussi les énergies d'erreur de prédiction :

$$E_{ai}(n) = E_{a(i-1)}(n) [1 - k_i^2(n)] \quad (3)$$

La correspondance apparaît en rapprochant les équations (1) et (3); elle est donnée par [5] :

$$x_{qi}(n) = k_i(n) E_{a(i-1)}^{1/2}(n) \quad (4)$$

Pour passer aux coefficients transversaux, il faut utiliser les coefficients du treillis non normalisés pour la prédiction avant et arrière, qui sont donnés par[1]:

$$k_{ai}(n) = k_i(n) [E_{b(i-1)}(n-1) / E_{a(i-1)}(n)]^{1/2} \quad (5)$$

$$k_{bi}(n) = k_i(n) [E_{a(i-1)}(n) / E_{b(i-1)}(n-1)]^{1/2} \quad (6)$$

Les énergies d'erreur de prédiction avant sont disponibles dans la seconde rotation de l'algorithme de la figure 2. Pour la prédiction arrière, on peut faire appel à l'équation :

$$E_{bi}(n) = E_{b(i-1)}(n-1) [1 - k_i^2(n)] \quad (7)$$

Ensuite, les coefficients transversaux peuvent être obtenus par les relations de définition :

$$A_i(n) = \begin{bmatrix} A_{i-1}(n) \\ 0 \end{bmatrix} - k_{bi}(n) \begin{bmatrix} B_{i-1}(n) \\ -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B_i(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{i-1}(n) \end{bmatrix} - k_{ai}(n) \begin{bmatrix} -1 \\ A_{i-1}(n) \end{bmatrix} \quad (9)$$

pour $i \leq N$.

Finalement, la procédure de conversion entre les structures à rotations et transversale comprend l'ensemble des équations (4 - 9).

ALGORITHME MCRQR-2

Disponible à l'instant n :

$X_q(n)$: Vecteur des données transformées
 $Y_q(n)$: Vecteur référence transformée
 $G(n)$: Vecteur unité transformé
 $E_a(n)$: Energie de prédiction avant

Données à l'instant n+1 :

Signal d'entrée : $x(n+1)$
Référence: $y(n+1)$

Partie Prédiction :

$$\begin{bmatrix} | e_{aq}(n+1) | & | x(n+1) | \\ | & | = Q_a(n) | \\ | X_q(n+1) | & | W^{1/2} X_q(n) | \end{bmatrix}$$

$$E_a(n+1) = W E_a(n) + e_{aq}^2(n+1)$$

$$\begin{bmatrix} | 0 | & | X_q(n+1) | \\ | & | = Q_\alpha(n+1) | \\ | E_{b0}^{1/2}(n+1) | & | E_a^{1/2}(n+1) | \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \gamma_N(n) e_{aq}(n+1) / E_a^{1/2}(n+1)$$

$$\begin{bmatrix} | \alpha_1 | & | G_N(n) | \\ | & | = Q_\alpha(n+1) | \\ | G_N(n+1) | & | \alpha_2 | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | \gamma_N(n+1) | & | 1 | \\ | & | = Q_a(n+1) | \\ | G_N(n+1) | & | 0 | \end{bmatrix}$$

Partie Filtrage :

$$\begin{bmatrix} | e_q(n+1) | & | y(n+1) | \\ | & | = Q_a(n+1) | \\ | Y_q(n+1) | & | W^{1/2} Y_q(n) | \end{bmatrix}$$

$$e(n+1) = \gamma_N(n+1) e_q(n+1)$$

Fig.2.- Algorithme MCR associé à la structure à rotations.



III- Expérimentation :

La réalisation expérimentale de la procédure ci-dessus peut se faire en prenant comme signal d'entrée un ensemble de sinusoïdes et en examinant la position des zéros du prédicteur dans le plan complexe.

Pour le signal suivant :

$$x(n) = \sin(n\pi/4) + \sin(n\pi/7) + \sin(n2\pi/3) + b(n)$$

où $b(n)$ désigne un bruit blanc, le rapport signal à bruit étant $SNR = 40$ dB, la figure 3. montre l'évolution des zéros du prédicteur à $N = 8$ coefficients dans le plan complexe. On vérifie que les valeurs théoriques, $e^{+j\pi/7}$, $e^{-j\pi/7}$, $e^{+j\pi/4}$, $e^{-j\pi/4}$, $e^{+j2\pi/3}$ et $e^{-j2\pi/3}$ sont bien atteintes. Dans l'algorithme le facteur de pondération a pour valeur $W = 0.99$ et l'énergie initiale $E_0 = 1$.

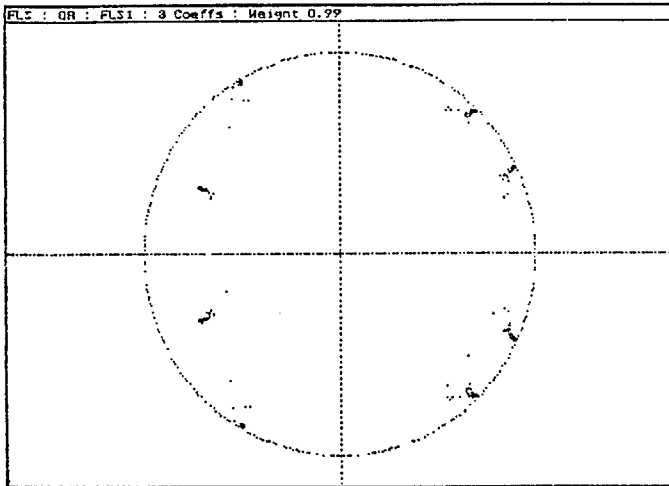


Fig.3.- Evolution des zéros du filtre à d'ordre $N = 8$.

IV- Conversion dans le cas de modélisation :

Comme pour le signal d'entrée, le vecteur des données de référence transformé fournit une décomposition de la puissance du signal :

$$\sum_{p=1}^n W^{n-p} y^2(p) = E_N(n) + \sum_{i=1}^N y_{qi}^2(n) \quad (10)$$

La correspondance avec le modèle transversal est très simple si le signal d'entrée est un bruit blanc. En effet la référence qui s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \quad (11)$$

a pour puissance :

$$E[y^2(n)] = E[x^2(n)] \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_i^2 \right] \quad (12)$$

Par suite, il vient après convergence :

$$E[y_{qi}(n)] = h_{i-1} [E[x^2(n)] / (1 - W)]^{1/2} \quad (13)$$

Exemple :

Soit le signal de référence :

$$y(n) = b(n) + 2b(n-1) - 0.5b(n-2)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc centré et de variance unité. La figure 4 montre, pour $W=0.99$, l'évolution des y_{qi} en fonction du temps, ainsi que l'erreur en sortie du filtre. On voit que les valeurs théoriques (10, 20, -5) sont bien atteintes en moyenne après convergence.

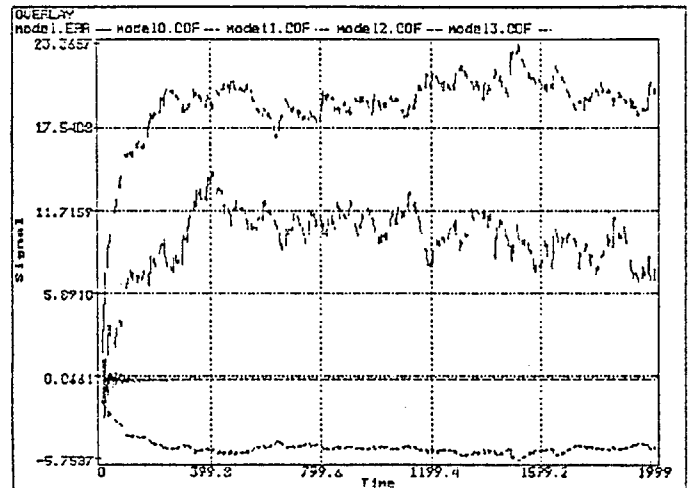


Fig.4. Evolution des y_{qi} en fonction du temps.

Par contre si les données d'entrée sont corrélées, alors la correspondance s'établit avec les coefficients $k_{fi}(n)$ ($0 \leq i \leq N-1$) de la partie échelle d'un filtre en treillis. Dans un tel filtre la puissance de la référence s'écrit :

$$E[y^2(n)] = E[e_N^2(n)] + \sum_{i=0}^{N-1} k_{fi}^2(n) E[e_{bi}^2(n)] \quad (14)$$

Il vient alors par équivalence :

$$E[y_{qi}^2(n)] = k_{f(i-1)}^2(n) E[e_{bi}^2(n)] / (1 - W) \quad (15)$$

A noter l'analogie avec l'équation (4) pour la prédiction.

Exemple :



Le signal autorégressif $x(n) = b(n) + 0.6x(n-1)$, où $b(n)$ est un bruit blanc de puissance unité, est appliqué à l'entrée du système. Le signal de référence est défini comme précédemment par :

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) - 0.5x(n-2)$$

Dans ces conditions, les calculs des paramètres du treillis conduisent aux valeurs théoriques suivantes après convergence : $E[y_{q1}(n)] = 25$; $E[y_{q2}(n)] = 16$; $E[y_{q3}(n)] = -5$. La figure 5 donne l'évolution des coefficients $y_{qi}(n)$ et l'erreur de sortie du filtre. Après convergence les valeurs théoriques sont bien atteintes en moyenne.

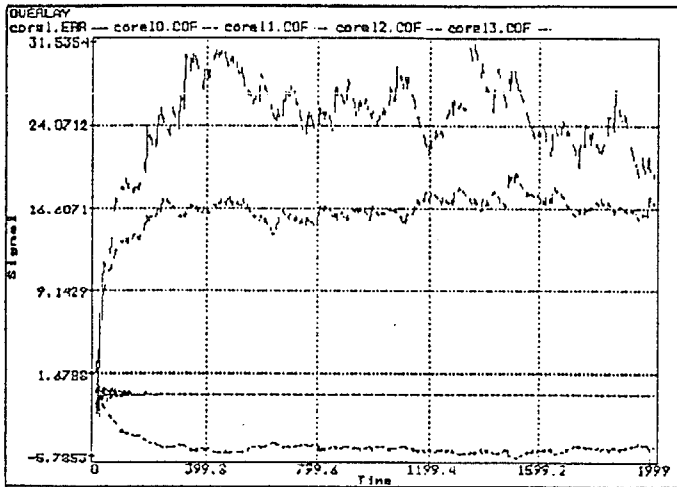


Fig.5.- Modélisation avec signal d'entrée AR.

V- Conclusion :

Les relations qui ont été établies entre les coefficients des structures transversales et en treillis d'une part et les variables de la structure à rotations d'autre part, montrent d'abord la cohérence de ces trois approches, qui, évidemment, conduisent aux mêmes résultats. La différence essentielle entre elles réside dans la facilité de réalisation sur une machine à précision finie. De ce point de vue, au fur et à mesure que l'on connaît mieux les algorithmes à rotations, leurs avantages apparaissent plus clairement et ils devraient avoir des applications importantes. Dans ces conditions, il est intéressant de savoir exploiter les variables qu'ils fournissent et les relations de conversion peuvent présenter une certaine utilité.

Bibliographie :

- [1] M. BELLANGER, "Analyse des Signaux et Filtrage Numérique Adaptatif", Ed. Masson, Paris 1989.
- [2] F. LING, D. MANOLAKIS and J. PROAKIS, "Numerically Robust LS Lattice-Ladder Algorithms with direct

Updating of the Coefficients", IEEE Trans., Vol. ASSP-34, August 1986, pp. 837-845.

[3] J. CIOFFI, "The Fast Rotor's RLS Algorithm", IEEE Trans., Vol. ASSP-38, N° 4, April 1990, pp. 631-653.

[4] M. BELLANGER and P. REGALIA, "The FLS-QR algorithm for Adaptive Filtering : The case of Multichannel Signals", Signal Processing, Vol. 22, N° 2, Feb. 1991, pp. 115-126.

[5] P. REGALIA and M. BELLANGER, "On The Duality between Fast QR Methods and Lattice Methods in Least Squares Adaptive Filtering", IEEE Transactions on signal Processing, vol. 39, N°4, April 1991, pp 879-891.