

**COMPARAISONS DE METHODES DE SEPARATION DE SOURCES**

Antoine Souloumiac \*, Jean-François Cardoso \*

\* Thomson-CSF/RGS/STS 66 rue du Fossé Blanc, 92231 Gennevilliers, France.

× Télécom Paris - CNRS URA 820 - GdR TdSI 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France.

email: cardoso@sig.enst.fr

**RÉSUMÉ**

Nous présentons dans cette communication une nouvelle classe de méthodes permettant de séparer un mélange linéaire bruité de sources indépendantes, en traitement d'antenne bande étroite. Ces méthodes sont fondées sur la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices déduites du tenseur des cumulants d'ordre quatre des signaux capteurs, problème résolu efficacement par composition de rotations de Givens. Des simulations numériques démontrent l'efficacité de ces méthodes dont les performances se comparent favorablement aux méthodes existantes, pour un coût de calcul similaire ou inférieur.

**ABSTRACT**

We present in this communication a new class of methods aimed at retrieving independent components from a linear mixture in narrow-band array processing context. These methods are based on the joint diagonalisation of a set of matrices deduced from the fourth order cumulant tensor of array outputs. Numerical simulations demonstrate the efficiency of these methods, which compare favorably with existing methods, while being considerably more effective from the computational point of view.

**1. INTRODUCTION**

Le problème de séparation de sources se pose dans le contexte suivant: une antenne de  $N$  capteurs reçoit, après propagation dans un milieu quelconque, des signaux émis par  $M < N$  sources statistiquement indépendantes. Le but de la séparation de sources est alors d'isoler les signaux sources inconnus à partir de la connaissance des signaux capteurs et d'information a priori. Nous nous restreignons au cas de sources bande étroite se propageant dans un milieu linéaire: les signaux capteurs sont alors des combinaisons linéaires bruitées des signaux sources. Ce modèle est décrit par l'équation:

$$x = \sum_{1 \leq p \leq M} s_p a_p + b \quad (1)$$

où les vecteurs complexes de dimension  $N$   $x$  et  $b$  représentent respectivement les signaux capteurs et un bruit additif gaussien. Le signal complexe émis par la  $p$ -ième source est noté  $s_p$  et le vecteur directionnel correspondant est  $a_p$ . On suppose que les  $M$  vecteurs directionnels sont linéairement indépendants et que les signaux sources sont stationnaires, ergodiques et circulaires.

Les méthodes de séparation de sources procèdent en deux temps: on estime d'abord les vecteurs directionnels des sources en présence puis on met en oeuvre un filtrage pour estimer les signaux émis dans les directions reconnues comme contenant une source. Nous ne traitons ici que de la première étape d'identification des vecteurs directionnels. Les méthodes classiques d'identification combinent l'information contenue dans les statistiques d'ordre deux des signaux capteurs (matrice de covariance) et une information a priori sur les vecteurs directionnels: la forme du front d'onde, la géométrie de l'antenne ou plus complètement la variété d'antenne. A l'opposé, les méthodes de séparation aveugle renoncent à toute

information a priori sur les vecteurs directionnels: tout élément de l'espace vectoriel des signaux capteurs peut être le vecteur directionnel d'une source. En contrepartie, ces méthodes doivent exploiter l'indépendance des signaux sources et nécessitent le recours aux statistiques d'ordres supérieurs.

Jutten [6] et Fety [4] ont proposé des méthodes adaptatives utilisant des transformations non-linéaires tandis que les approches de Lacoume [5], Comon [3] et Cardoso [1] et [2] exploitent les cumulants du second et du quatrième ordre. Nous proposons ici une extension de la technique [1] et la comparons avec celle de [3].

**2. MODELE CANONIQUE**

Les approches décrites dans cet article utilisent l'information du second ordre pour effectuer un blanchiment du signal. Ceci suppose que l'on est capable d'estimer, dans la matrice de covariance  $R$  des observations, les contributions respectives du bruit et du signal utile. Dans la suite, nous supposons que le blanchiment est effectué de façon parfaite. Il consiste en un redressement des signatures et en une projection sur l'espace signal de sorte que l'on est ramené au modèle "canonique": le nombre de sources est égal à la dimension de l'espace, les signaux sources sont mutuellement indépendants, stationnaires jusqu'à l'ordre quatre et de variance unité; leurs vecteurs directionnels (ou signatures) forment une base orthonormée. On voit que les statistiques du second ordre permettent de résoudre le problème de séparation à une transformation unitaire près. Nous montrons à la section suivante comment la "rotation manquante" est obtenue comme solution d'un problème de diagonalisation d'une ou plusieurs matrices construites à partir des cumulants du quatrième ordre.



### 3. IDENTIFICATION PAR DIAGONALISATION

#### 3.1 Diagonalisation d'une covariance pondérée

On définit, pour toute matrice hermitienne  $A$ , sa "covariance pondérée" hermitienne associée par :

$$R_A \triangleq E \{ x^* A x x x^* \} - R A R - R \text{Tr}(A R) \quad (2)$$

où "\*" signifie complexe conjugué. On démontre (cf 4.) de manière générale (indépendamment du blanchiment) qu'un mélange de signaux indépendants de kurtosis  $k_p$ , entaché d'un bruit gaussien, présente une covariance pondérée de la forme :

$$R_A = \sum_p k_p a_p^* A a_p a_p a_p^* \quad (3)$$

où le kurtosis, pour des signaux circulaires, est  $k_p \triangleq E \{ |s_p|^4 \} - 2E \{ |s_p|^2 \}^2$ .

Si les signatures sont orthonormées (par la vertu du blanchiment) l'expression (3) apparaît alors comme une décomposition propre. On sait que si les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont distinctes, les vecteurs propres normés sont définis (à une phase près) de façon unique. (cette indétermination de phase est inhérente au problème et n'a pas de conséquence sur la séparation). Par conséquent, si les valeurs propres  $k_p a_p^* A a_p$  d'une covariance pondérée par  $A$  sont distinctes, le problème d'identification est résolu et sa solution est obtenue par un algorithme (quelconque) de diagonalisation.

Une première version simplifiée de cette méthode est dans [1] où l'on ne traitait que le cas non bruité avec l'identité en guise de matrice de pondération. Il suffit dans ce cas de diagonaliser  $E \{ |x|^2 x x^* \}$ . L'extension au cas bruité est dans [7] et consiste à soustraire à cette dernière matrice le terme correcteur  $R^2 + R \text{Tr} R$ , conformément à (2). Le couple d'expressions (2,3) est plus général mais, dans tous les cas, dans ce type de méthode par diagonalisation d'une matrice, on se heurte au problème de la dégénérescence des valeurs propres : si celles-ci sont identiques, la base des vecteurs propres n'est pas définie de façon unique. Bien entendu, si  $A$  est choisie au hasard, les valeurs propres sont presque sûrement distinctes mais une telle approche n'est pas satisfaisante, surtout lorsqu'il faudra traiter des statistiques empiriques.

Nous proposons ici une généralisation de la méthode utilisant une diagonalisation conjointe de plusieurs matrices de covariance pondérées dans le but i) de lever les dégénérescences éventuelles et ii) d'intégrer une plus grande quantité d'information statistique dans un critère de diagonalisation.

#### 3.2 Diagonalisation conjointe

Dans le cas de statistiques exactes, toutes les matrices de covariance pondérées admettent les signatures comme vecteurs propres (3) et peuvent donc être diagonalisées simultanément. Cette diagonalisation conjointe est plus contraignante que celle d'une matrice unique. Nous montrons en appendice 1 que la diagonalisation conjointe de  $M$  covariances pondérées linéairement indépendantes ne peut se faire que dans la base des signatures et assure par conséquent l'unicité recherchée.

Dans le cas de statistiques estimées, une diagonalisation conjointe exacte n'est pas possible à cause des erreurs

d'estimation. Il faut donc définir une diagonalisation conjointe approchée. Nous devons pour cela définir un critère de "proximité" à la diagonalisation parfaite. Diagonaliser une matrice hermitienne  $H$  de taille  $M \times M$  est équivalent à trouver une base orthonormée  $\mathbf{B} = \{v_i \mid i=1, M\}$  telle que, dans cette base, la somme des modules carrés des termes diagonaux soit maximale. C'est-à-dire que l'on cherche la base  $\mathbf{B}$  maximisant le critère :

$$C(H, \mathbf{B}) \triangleq \sum_i |v_i^* H v_i|^2 \quad (4)$$

Nous définissons la diagonalisation conjointe d'une famille  $\mathbf{H} \triangleq \{H_k \mid k=1, K\}$  de matrices hermitiennes comme la maximisation de :

$$C(\mathbf{H}, \mathbf{B}) \triangleq \sum_k w_k C(H_k, \mathbf{B}) \quad (5)$$

où  $w_k$  est une pondération réelle positive à spécifier. L'appendice 2 décrit notre implantation d'un algorithme de diagonalisation conjointe.

### 4. QUADRICOVARIANCE

Nous établissons ici le lien entre les covariances pondérées et les cumulants du quatrième ordre. On appelle quadricovariance, et on note  $Q$ , l'application linéaire qui, à toute matrice hermitienne  $A$ , associe  $Q(A) \triangleq R_A$ , sa covariance pondérée elle aussi hermitienne. Nous conservons le symbole "\*" pour noter le produit scalaire, que ce soit de deux vecteurs ou de deux matrices. C'est-à-dire que, pour deux matrices hermitiennes  $A$  et  $B$ , on a  $A^* B \triangleq \text{Tr}(BA)$ . Pour quatre vecteurs  $a, b, c, d$  quelconques, on a d'après (2) :

$$(ab^*)^* Q(cd^*) = E \{ a^* x x^* b d^* x x^* c \} - E \{ a^* x x^* b \} E \{ d^* x x^* c \} - E \{ a^* x x^* c \} E \{ d^* x x^* b \} \quad (6)$$

On reconnaît dans le membre de droite l'expression, dans le cas circulaire, des cumulants croisés des quatre variables aléatoires  $a^* x$ ,  $x^* b$ ,  $x^* c$  et  $d^* x$ . Par conséquent :

$$(ab^*)^* Q(cd^*) = \text{Cum}(a^* x, x^* b, x^* c, d^* x) \quad (7)$$

Pour le modèle (1) qui nous intéresse (sources indépendantes et bruit gaussien), on obtient, par nullité des cumulants croisés des signaux et des cumulants du bruit :

$$\text{Cum}(a^* x, x^* b, x^* c, d^* x) = \sum_p k_p (a_p^* a_p) (a_p^* b) (a_p^* c) (d_p^* a_p)$$

cette égalité étant valable pour tout  $a, b, c, d$  on a :

$$Q = \sum_p k_p (a_p a_p^*) (a_p a_p^*)^* \quad (8)$$

De cette expression découle immédiatement l'expression (3) de tout  $R_A = Q(A)$ .  $Q$  est donc un endomorphisme auto-adjoint ( $A^* Q B = B^* Q A$ ) de rang  $M$  agissant sur l'espace vectoriel réel  $H(E)$  des matrices hermitiennes donc  $Q$  est diagonalisable :

$$Q = \sum_{1 \leq l \leq M^2} \lambda_l M_l M_l^* \quad (9)$$

où les  $M_l$ , matrices hermitiennes orthonormées, sont les "matrices propres" de  $Q$  et  $\lambda_l$  ses valeurs propres. On peut remarquer que les équations (8) et (9) sont deux décompositions propres de  $Q$  donc si les  $k_p$  sont distincts alors

les matrices propres  $M_l$  et les  $a_p a_p^*$  coïncident : c'est ce qui fonde la méthode [2]. Nous définissons le sous-espace signal comme étant le sous-espace engendré par les  $M$  premières matrices propres; le projecteur sur ce sous-espace s'écrit alors :

$$\Pi_S = \sum_{1 \leq l \leq M} M_l M_l^* \quad (10)$$

### 5. CRITERES DE SEPARATION

#### 5.1 Critère de Comon

Après s'être ramené au modèle canonique défini au 2. Comon propose un algorithme itératif qui maximise un critère de contraste voir [3]. Ce critère est égal à la somme des carrés des cumulants d'ordre quatre des composantes du processus  $x$  dans la base  $\{v_i \mid i=1, M\}$  ( c'est-à-dire les  $v_i^* x$  ). Or on a  $\text{Cum}(v_i^* x, x^* v_i, x^* v_i, v_i^* x) = (v_i v_i^*)^* Q (v_i v_i^*)$ . Le critère de Comon peut donc s'écrire :

$$C(B) \triangleq \sum_{1 \leq i \leq M} |(v_i v_i^*)^* Q (v_i v_i^*)|^2 \quad (11)$$

#### 5.2 Critères de diagonalisation conjointe

On peut réécrire  $|v_i^* H v_i| = (v_i v_i^*)^* H H^* (v_i v_i^*)$  de sorte que le critère de diagonalisation conjointe s'écrit aussi :

$$C(H, B) = \sum_{1 \leq i \leq M} (v_i v_i^*)^* T (v_i v_i^*) \quad (12)$$

avec  $T \triangleq \sum_k w_k H_k H_k^*$ . Se pose alors le problème du choix des matrices  $H_k$ . La quadricovariance particularise certaines matrices : ses matrices propres. Nous nous intéresserons donc à la diagonalisation conjointe des matrices propres avec deux pondérations :  $w_k = \lambda_k^2$  ( $T$  vaut alors  $Q^2$ ) et  $w_k = 1$  pour  $k$  inférieur ou égal à  $M$  et nul sinon ( $T$  vaut alors  $\Pi_S$ ).

#### 5.3 Comparaison des critères

La maximisation des deux types de critères (11) et (12) passe par la recherche de rotations de Givens qui figurent à la puissance huit dans le critère de Comon et seulement à la puissance quatre dans le cas de la diagonalisation conjointe. Cela explique que, dans ce dernier cas, la transformation unitaire  $2 \times 2$  soit accessible par un calcul direct et non itérativement comme c'est le cas pour le contraste.

La diagonalisation conjointe permet en outre d'utiliser les propriétés de la quadricovariance. Considérer le "tenseur cumulant" comme un endomorphisme hermitien de  $H(E)$  permet de diviser par quatre la taille du tenseur, de travailler en arithmétique réelle, et surtout de tirer parti du faible rang de la quadricovariance. Le point le plus coûteux de ces algorithmes est la remise à jour après chaque rotation de Givens. Dans un cas on remet à jour le "tenseur cumulant" en entier c'est-à-dire  $M^4$  complexes dans l'autre  $K$  matrices hermitiennes  $M \times M$  c'est-à-dire  $K$  fois  $M^2$  réels avec  $K$  variant entre  $M$  et  $M^2$ . Ce gain comme nous le montrons dans les simulations qui suivent ne s'obtient pas au prix d'une dégradation des performances.

### 6. SIMULATIONS

Nous nous plaçons dans le cas d'un réseau linéaire à cinq capteurs équi-espacés à une demi longueur d'onde et de deux sources indépendantes à 0 et 13 degrés (brouillage de lobe principal). Les échantillons des signaux sources sont indépendants, de module constant et de phase distribuée

uniformément entre 0 et  $2\pi$ , ce qui fournit des signaux non-gaussiens de kurtosis égal à -1. Le bruit est gaussien, blanc temporellement et spatialement. Enfin, le blanchiment est effectué avec une matrice de covariance exacte.

Les algorithmes d'identification fournissent en sortie deux vecteurs directionnels orthogonaux estimant les vecteurs directionnels exacts eux aussi orthogonaux. Nous devons donc, pour quantifier les performances des différentes méthodes, mesurer "l'écart" entre deux bases orthonormées, or celles-ci sont reliées par une relation matricielle du type de (16). Nous choisissons comme indice de performance le  $\text{Min}\{\cos(\theta)^2, \sin(\theta)^2\}$ . Ce critère est nul dans le cas d'une estimation parfaite et est borné supérieurement par  $1/2$ . Cependant, on peut vérifier qu'une méthode absolument inefficace, qui par exemple fournirait des "estimations" totalement aléatoires, aurait un indice de performance moyen de l'ordre de 0.2. C'est relativement à cette valeur qu'il faut juger les résultats de la seconde figure.

Nous comparons donc la méthode de Comon (PC), la diagonalisation conjointe des  $M$  premières matrices propres (DC) et la diagonalisation conjointe de toutes les matrices propres pondérées par le carré de leur valeur propre (DCP). Sur la figure 1, sont portées les valeurs de l'indice de performance lors de 50 tirages indépendants, dans le cas de sources de puissances 10 dB relativement au bruit, avec une quadricovariance estimée avec 100, 200 et 500 échantillons indépendants. De gauche à droite figurent respectivement les méthodes PC, DC, DCP.

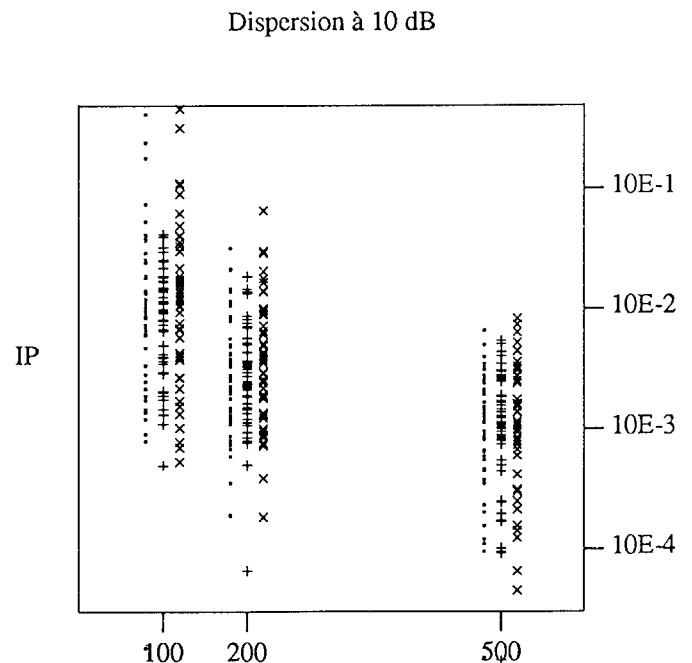


Figure 1

Sur la figure 2, sont portés les indices de performance moyens estimés à l'aide 500 tirages indépendants pour diverses valeurs du rapport signal à bruit (le trait plein pour la méthode PC, tirets pour la méthode DC et pointillé pour la méthode DCP). Ces résultats nous semblent justifier l'emploi des méthodes aveugles en précisant dans quelles conditions ces méthodes ont des performances acceptables. Il est de plus clair que les trois méthodes simulées fournissent des résultats voisins puisque



Indice de performance moyen

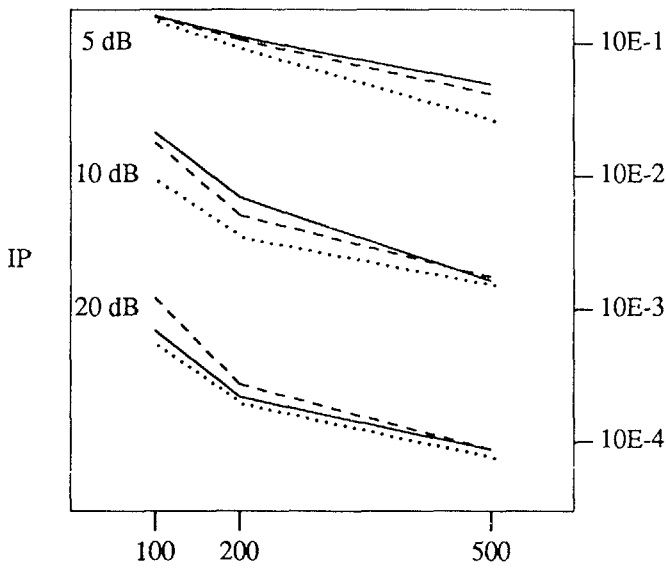


Figure 2

dans aucun contexte le rapport des indices de performance des estimateurs ne dépasse deux.

### CONCLUSION

Nous avons proposé dans cet article une classe de méthodes de séparation en aveugle de sources indépendantes. Ces méthodes sont fondées sur la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices résultant de contractions tensorielles de la quadricovariance des signaux capteurs. Nous avons montré expérimentalement que les performances obtenues se comparent favorablement aux méthodes existantes pour un coût de calcul équivalent ou moindre.

### Appendices

**Unicité de la diagonalisation conjointe.** Une famille libre de  $M$  matrices de l'image de  $Q$ , c'est-à-dire une famille libre de covariances pondérées ne peut être conjointement diagonalisée que dans la base des signatures. De façon équivalente, cette base est déterminée de façon unique par la donnée de  $M$  matrices linéairement indépendantes de l'image de  $Q$ . En effet, si une famille de  $H_k = QA_k$  était diagonalisable dans deux bases orthonormées  $\{a_p | p=1, M\}$  et  $\{b_q | q=1, M\}$  on aurait alors :

$$H_k = \sum_p \alpha_{pk} a_p a_p^* = \sum_q \beta_{qk} b_q b_q^* \quad (13)$$

Or les tableaux  $\alpha$  et  $\beta$  sont carrés et non-singuliers (donc inversibles) car la famille  $\{H_k\}$  est libre donc, pour tout  $q$  compris entre 1 et  $M$ , on aurait :

$$b_q b_q^* = \sum_p \gamma_{pq} a_p a_p^* \quad (14)$$

Cette équation est une décomposition propre; le terme de gauche est de rang un; pour que le terme de droite le soit aussi il faut que pour chaque  $q$  entre 1 et  $M$  un seul des  $\gamma_{pq}$  soit non nul.

**Algorithme de diagonalisation conjointe** Nous proposons très classiquement d'approcher la transformation unitaire optimale par multiplications successives de rotations de Givens, ce qui nous ramène au problème de diagonalisation conjointe de  $K$  matrices hermitiennes  $2 \times 2$  :

$$H_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k^* & d_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

pour  $k$  compris entre 1 et  $K$ . Nous paramétrisons la transformation unitaire  $2 \times 2$  de la façon suivante :

$$V = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & e^{i\varphi} \sin(\theta) \\ -e^{-i\varphi} \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (16)$$

et nous cherchons celle qui maximisera la quantité  $\sum_k a_k^2 + d_k^2$ , mais  $a_k^2 + d_k^2 = 1/2(a_k + d_k)^2 + 1/2(a_k - d_k)^2$  or  $a_k + d_k$  est constant (constance de la trace) donc nous n'avons qu'à maximiser la quantité  $\sum_k (a_k - d_k)^2$ . Or après la transformation

$H'_k = V^H H_k V$  on a :

$$\frac{a'_k - d'_k}{2} = \cos(2\theta) \frac{a_k - d_k}{2} - \sin(2\theta) \cos(\varphi) \text{Re}(b_k) - \sin(2\theta) \sin(\varphi) \text{Im}(b_k) \quad (17)$$

Le problème de diagonalisation conjointe revient donc à trouver le vecteur singulier à droite de plus grande valeur singulière de la matrice réelle suivante :

$$G = \begin{bmatrix} : & : & : \\ \frac{a_k - d_k}{2} & \text{Re}(b_k) & \text{Im}(b_k) \\ : & : & : \end{bmatrix} \quad (18)$$

ou le vecteur propre de plus grande valeur propre de  $G^T G$ , ce qui peut se calculer directement.

### REFERENCES

- [1] J.F. Cardoso, "Source separation using higher order moments", Proc. ICASSP'89, pp. 2109-2112, Glasgow, 1989.
- [2] J.F. Cardoso, "Eigen-structure of the fourth-order cumulant tensor with application to the blind source separation problem", Proc. ICASSP'90, pp. 2655-2658, Albuquerque, 1990.
- [3] P. Comon, "Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle", Traitement du Signal, pp. 435-450, Vol 7, No 5 spécial Non linéaire non gaussien, 1990.
- [4] L. Fety, "Méthodes de traitement d'antenne adaptées aux radio-communications", Thèse de docteur ingénieur de l'ENST, Juin 1988.
- [5] M. Gaeta, J. L. Lacoume, "Estimateurs du maximum de vraisemblance étendus à la séparation de sources non gaussiennes", Traitement du Signal, pp. 419-434, Vol 7, No 5 spécial Non linéaire non gaussien, 1990.
- [6] C. Jutten, J. Hérault, "Une solution neuromimétique au problème de séparation de sources", Traitement du Signal, pp. 389-403, Vol 5, No 6, 1988.
- [7] V. C. Soon, L. Tong, Y. F. Huang, R. Liu, "An extended fourth order blind identification algorithm in spatially correlated noise", Proc. ICASSP'90, pp. 1365-1368, Albuquerque, 1990.